

Exercice n° 14 : Identités I

C-1

1. Exprime chacune des expressions suivantes uniquement en termes de $\sin \theta$.
 - a. $\csc \theta$
 - b. $\cos^2 \theta$
 - c. $\cot^2 \theta$
2. Exprime chacune des expressions suivantes uniquement en termes de $\cos \theta$.
 - a. $\sec \theta$
 - b. $\sin^2 \theta$
 - c. $\tan^2 \theta$
3. Exprime chacune des expressions suivantes en termes de $\sin \theta$, ou de $\cos \theta$, ou des deux.
 - a. $\sin \theta \csc \theta$
 - b. $\sin^2 \theta + \frac{1}{\sec^2 \theta}$
 - c. $1 - \csc^2 \theta$

Prouve que chacune des équations suivantes est une identité.

4. $\cos x \sec x = 1$
5. $\csc x \sin x = 1$
6. $\tan \theta \cot \theta = 1$
7. $\cot \theta \sin \theta = \cos \theta$
8. $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$
9. Résous l'équation $4 \sin \theta + 2\sqrt{3} = 0$ dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
10. Résous l'équation $3 \cos \theta + 2 = 0$ dans l'intervalle $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Exprime ta réponse à une décimale près.
11. Représente graphiquement les deux côtés de l'équation : $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \tan \theta \sin \theta$
 - a) Que remarques-tu au sujet des graphiques ?
 - b) Démontre algébriquement que l'équation ci-dessous est une identité.
12. Pour chacune des valeurs suivantes de θ , identifie le quadrant où se trouve $P(\theta)$:
 - a. $\theta = 600^\circ$
 - b. $\theta = -400^\circ$
 - c. $\theta = \frac{11\pi}{3}$
 - d. $\theta = -9$
13. Si $\sin \theta = \frac{-3}{4}$ et que $\cos \theta > 0$, trouve la valeur exacte de $\tan \theta$.
14. Si $\theta = \frac{-8\pi}{3}$, trouve les coordonnées de $P(\theta)$.

Suite

Exercice n° 14 : Identités I

C-1

15. Trouve la(les) valeur(s) exacte(s) de θ pour l'intervalle $\pi \leq \theta \leq 2\pi$:

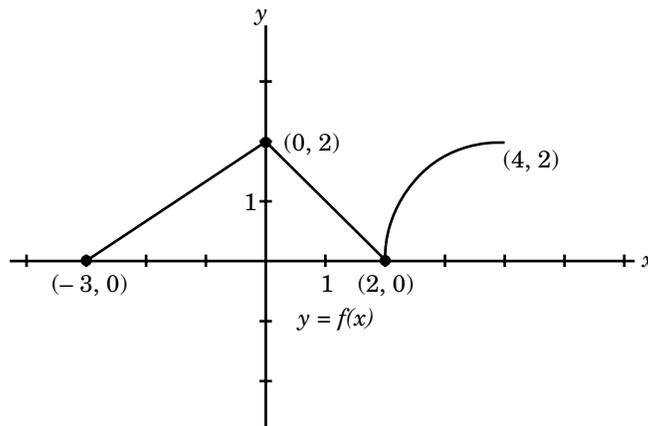
$$2 \cos^2 \theta = \sqrt{2} \cos \theta$$

16. Trouve la valeur de x si le domaine correspond aux nombres réels : $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

17. Trouve la valeur de θ , dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

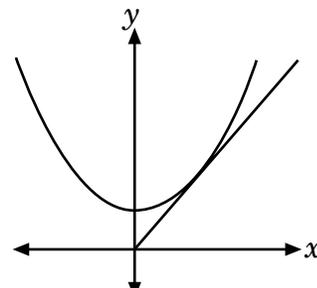
$$\tan 2\theta = -1$$

18. Utilise la représentation graphique de $f(x)$ pour calculer $f[f(4)]$.



19. Si $f(x) = \frac{3}{x+1}$, trouve une expression qui représente $f^{-1}(x)$.

20. La droite $y = mx$, $m > 0$, touche la parabole $y = x^2 + 9$ en un seul point. Trouve la valeur de m .



Exercice n° 15 : Identités II

C-1

Prouve les identités suivantes :

1. $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \frac{1}{\sec^2 x}$

2. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

3. $\cos^2 \theta = (1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$

4. $(1 - \sec \theta)(1 + \sec \theta) = -\tan^2 \theta$

5. $2 \sec^2 x = \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}$

6. $\sec^2 x - \csc^2 x = \tan^2 x - \cot^2 x$

7. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$

8. $\frac{\csc^2 \theta - 1}{\csc^2 \theta} = \cos^2 \theta$

9. Trouve la valeur de θ si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

$$\frac{\sec \theta - 1}{2} = 1 + \sec \theta$$

10. Résous l'équation suivante dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Exprime ta réponse à 4 décimales près.

$$3 - 6 \tan \theta = \tan \theta + 6$$

11. Trouve la valeur de $\sin \theta$ si $\cos \theta = \frac{12}{13}$ et que $\tan \theta > 0$.

12. Résous graphiquement l'équation suivante, si le domaine correspond à l'ensemble des nombres réels. (Exprime ta réponse à 4 décimales près).

$$6 \sin^2 \theta + 10 \sin \theta - 4 = 0$$

Suite

Exercice n° 15 : Identités II

C-1

13. Résous algébriquement l'équation suivante si le domaine correspond à l'ensemble des nombres réels.

$$\frac{1}{4} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0$$

14. Prouve l'identité suivante en utilisant **deux méthodes différentes** :

$$\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$$

15. Exprime les angles suivants en radians.

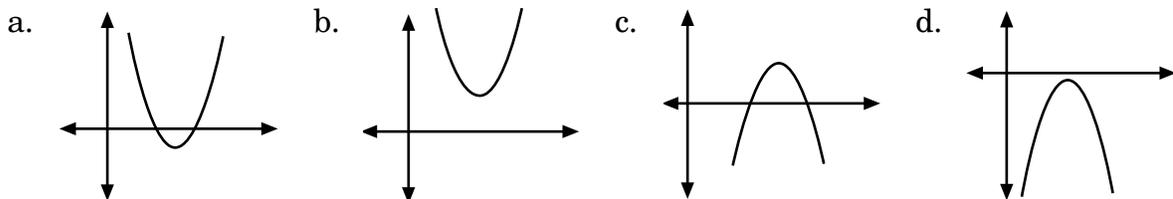
a. 225° b. 216° c. 125° d. 105°

16. Exprime les valeurs suivantes en degrés.

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{5\pi}{6}$ c. $\frac{4\pi}{3}$ d. $\frac{3\pi}{4}$

17. Si $f(x) = 2x + 3$, trouve l'ordonnée à l'origine du graphique de $y = f[f(x)]$.

18. **Question à choix multiple.** Si $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, lequel des graphiques suivants pourrait représenter $y = ax^2 + bx + c$?



19. Décompose en facteurs l'expression suivante : $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

20. Si $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, trouve $f^{-1}(5)$.

Exercice n° 16 : Identités de sommes et de différences I

C-2

1. Trouve la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ dans la formule d'addition pour $\sin(\alpha + \beta)$.
2. Trouve la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ dans la formule appropriée.
3. À l'aide des relations connues pour $\sin(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$, trouve la formule pour $\tan(\alpha + \beta)$. Exprime ta réponse en termes de tangente seulement.
4. Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$, trouve :
 - a. $\sin\frac{7\pi}{12}$
 - b. $\cos\frac{7\pi}{12}$
 - c. $\tan\frac{7\pi}{12}$
5. Trouve une formule pour les expressions suivantes. Exprime ta réponse en termes de tangente seulement :
 - a. $\cot(\alpha + \beta)$
 - b. $\tan(\alpha - \beta)$
6. À l'aide de la formule obtenue à la question 3, trouve $\tan\frac{7\pi}{12}$ si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$. Compare ta réponse avec celle de la question 4c.
7. Trouve la valeur **exacte** de $\cos 105^\circ$ en utilisant les mesures 45° et 60° .
8. Si $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, et $\cos \beta = \frac{9}{41}$ et que P(α) et P(β) ne se trouvent pas dans le 1^{er} quadrant, trouve :
 - a. $\sin(\alpha + \beta)$
 - b. $\cos(\alpha + \beta)$
 - c. $\sec(\alpha + \beta)$
 - d. dans quel quadrant se trouve le point P($\alpha + \beta$)?
9. Représente graphiquement les deux côtés de l'équation : $\sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos t$
 - a. Que remarques-tu au sujet des graphiques?
 - b. Vérifie algébriquement que cette équation est une identité.
10. Trouve la valeur exacte de $\frac{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ}{1 - \cos^2 210^\circ}$

Suite

Exercice n° 16 : Identités de sommes et de différences I

C-2

11. Si $\tan \theta = \frac{6}{7}$ et $\sin \theta \leq 0$, trouve $\sec \theta$.
12. Trouve la valeur de θ pour l'équation suivante, dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$:
 $4 \cos^2 \theta + \cos \theta - 3 = 0$.

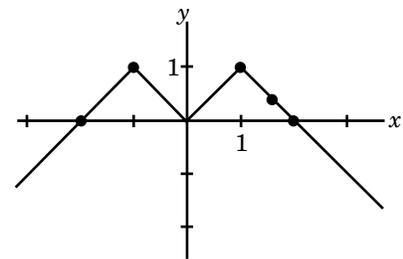
Prouve les identités dans les questions 13 à 15.

13. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ 14. $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$ 15. $\frac{1}{\csc x - \sin x} = \tan x \sec x$

16. Trouve la distance entre la droite $2x - 3y + 7 = 0$ et le point du cercle unitaire à $\frac{\pi}{3}$.
17. Trace le graphique de $y = x^2(x - 2)$.
18. Résous : $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = -1$.

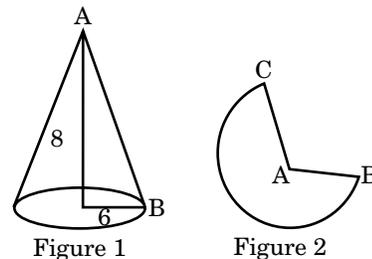
19. Le graphique illustré représente une fonction $f(x)$.

- a. Si l'équation $f(x) = k$ comporte exactement quatre racines, que peut-on dire de k ?
- b. Si l'équation $f(x) = k$ comporte exactement deux racines, que peut-on dire de k ?



20. Un cône a une hauteur de 8 cm et un rayon de 6 cm. Si on le coupait le long de la droite AB pour ensuite le mettre à plat, il aurait la forme de l'illustration de la figure 2.

- a. Quelle est la longueur de AB ?
- b. Quelle est la longueur de l'arc principal BC dans la figure 2 ?
- c. $\angle CAB$ vaut combien de degrés ?
- d. Quelle était l'aire de la surface du cône ?



Exercice n° 17 : Identités de sommes et de différences II

C-2

1. Exprime $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$ en termes d'une fonction de θ seulement.

2. Développe et simplifie l'expression suivante : $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$.

3. Exprime $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ en termes d'une fonction de θ seulement.

4. Prouve les identités suivantes :

a. $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$

b. $\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin t$

5. Trouve la valeur **exacte** des expressions suivantes :

a. $\sin \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{\pi}{16}$

b. $\cos 33^\circ \cos 27^\circ - \sin 33^\circ \sin 27^\circ$

6. Soit $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$ et $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ où α et β se trouvent dans le troisième quadrant.

a. Trouve les coordonnées de $P(\alpha - \beta)$.

b. Dans quel quadrant se trouve le côté terminal de $(\alpha - \beta)$?

7. Démontre que l'énoncé suivant est vrai : $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin \theta$.

8. Démontre que l'énoncé suivant est faux :

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$$

9. Prouve l'identité suivante : $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$.

Suite

Exercice n° 17 : Identités de sommes et de différences II

C-2

10. Démontre que les relations suivantes sont toujours vraies :

$$\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$

11. Prouve que l'énoncé suivant est vrai pour toutes les valeurs possibles de α et de β :

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

12. Si $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ et $\tan \beta = \frac{3}{4}$ et que α et β ne se trouvent pas dans le 1^{er} quadrant, trouve $\tan(\alpha - \beta)$.

13. Élabore le côté droit de l'équation suivante : $\sin t = \boxed{}$ pour obtenir une identité en utilisant

- une somme ou différence de cosinus
- une somme ou différence de sinus
- prouve l'identité en a. algébriquement

14. Résous l'équation suivante si le domaine correspond aux nombres réels; exprime ta réponse à deux décimales près :

$$2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta - 3 = 0$$

15. Si $\theta = -924^\circ$, trouve l'angle de référence de θ .

16. Trouve les valeurs approximatives de θ si l'intervalle est $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et que $3 \cos^2 \theta = \cos \theta$. (Exprime ta réponse à deux décimales près.)

17. Si $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, trouve les facteurs de $\sin^3 x - \cos^3 x$.

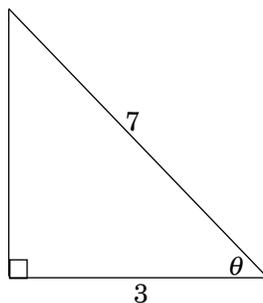
18. Si $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, trouve les facteurs de $\tan^3 x + \cot^3 x$.

19. Prouve l'identité suivante : $\sec^2 x(1 - \sin^2 x) = 1$.

Exercice n° 18 : Identités d'angles doubles

C-2

- En commençant par l'identité pour $\sin(\alpha + \beta)$, prouve que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.
 - En commençant par l'identité pour $\cos(\alpha + \beta)$, prouve que $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.
- Utilise les données de la question 1b pour prouver les identités suivantes :
 - $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$
 - $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
- Fais la dérivation pour la relation $\tan 2\theta$.
- Évalue $\tan (120^\circ)$ en utilisant la formule d'angles doubles donnée ci-dessus et en supposant que $\theta = 60^\circ$.
- Calcule $\cos \frac{\pi}{5}$ à deux décimales près si $\cos \frac{\pi}{10} = 0,95$. Utilise une formule d'angles doubles pour trouver la réponse.
- Prouve l'identité suivante : $\csc 2x - \cot 2x = \tan x$
- Si $\sin \theta = \frac{4}{5}$ et $\cos \theta = \frac{3}{5}$, trouve :
 - $\sin 2\theta$
 - $\cos 2\theta$
- Si θ est l'angle indiqué sur le diagramme, trouve la valeur exacte de $\sin 2\theta$.



- Résous graphiquement l'équation

$$2\cos 2\theta - \sqrt{3} = 0 \text{ dans } [0, 2\pi].$$

Donne les réponses à 3 décimales près.

Suite

Exercice n° 18 : Identités d'angles doubles

C-2

10. Prouve l'identité suivante : $\frac{\csc^4 x + \cos^3 x}{\csc^2 x + \cot^2 x} + \cot^2 x = \csc^2 x$
11. Dans une fonction $f(x)$ **paire**, $f(-x) = f(x)$. À l'aide de la formule de soustraction pour $\cos \theta$, prouve que $\cos \theta$ est une fonction paire. Débute avec l'expression $\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta)$.
12. Dans une fonction $f(x)$ **impaire**, $f(-x) = -f(x)$. À l'aide de la formule de soustraction pour $\sin \theta$, prouve que $\sin \theta$ est une fonction impaire. Débute avec l'expression $\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta)$.
13. Si $\sin \theta = \frac{-2}{3}$, et que θ se trouve dans le 4^e quadrant, trouve la valeur exacte de $\cot \theta$.
14. Trouve la valeur exacte de : $\frac{\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}}$
15. Prouve l'identité suivante : $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x$
16. Résous l'équation suivante si le domaine correspond à l'ensemble des nombres réels : $\tan \theta = \sqrt{3}$
17. Résous l'équation suivante si le domaine correspond à l'ensemble des nombres réels. Exprime tes réponses à 4 décimales près.
 $\csc^2 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin \theta + 3 = 5$
18. Exprime chacun des énoncés suivants sous forme de fonction de x seulement :

a. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

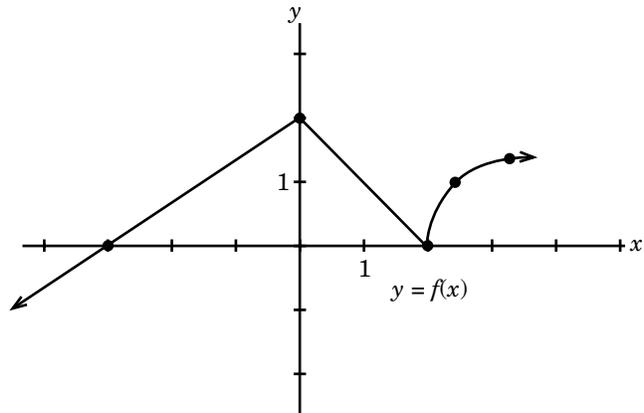
b. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Suite

Exercice n° 18 : Identités d'angles doubles

C-2

19. a. Utilise le graphique de la fonction $y = f(x)$ pour tracer le graphique de $y = f^{-1}(x)$.
- b. Indique si $y = f(x)$ est une fonction biunivoque.



20. Soit $y = 3(x - 4)^2 + 2$,
- a. indique le nom de cette fonction ;
- b. donne les coordonnées du sommet ;
- c. montre les transformations de cette fonction par rapport à l'équation d'origine $y = x^2$.