Unité I
Statistique

STATISTIQUE

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- examinent différentes mesures de dispersion qui s'appliquent à des distributions de données;
- développent des fonctions de répartition et les associent à des distributions de fréquences;
- examinent des distributions binomiales, développent leurs propriétés et résolvent des problèmes liés;
- examinent des distributions normales, développent leurs propriétés et résolvent des problèmes liés;
- utilisent les cotes z pour résoudre des problèmes relatifs à la courbe normale;
- utilisent la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes portant sur des échantillons de grandes tailles.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- de voir que la dispersion a une incidence sur la distribution des données;
- de faire la différence entre la distribution binomiale et la distribution normale;
- d'acquérir des connaissances sur l'utilisation des cotes z pour résoudre des problèmes statistiques;
- de recourir à la calculatrice ou à un logiciel graphique pour résoudre des problèmes d'analyse statistique;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Matériel

- calculatrice à affichage graphique et logiciel

Durée

- unité facultative

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Utiliser les distributions de probabilités normales et binomiales pour résoudre des problèmes impliquant l'incertitude

Résultats d'apprentissage spécifique

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

Se reporter aux annexes I-1, I-2 et I-3 à la fin de l'unité. L'annexe I-1 comprend des exercices pour les élèves; l'annexe I-2 donne des solutions à ces exercices et l'annexe I-3 des notes à l'intention des enseignants qui ont trait aux exercices.

- **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer**

La statistique est une branche des mathématiques qui porte sur la collecte, l'organisation et l'interprétation de données. Une fois que les données ont été réunies, elles sont présentées le plus souvent sous forme de tableau ou de graphique. Lorsque les données brutes sont organisées et présentées dans un tableau, on parle d'une distribution de fréquence. Cette distribution de fréquence donne la liste des divers événements et de la fréquence de réalisation de chacun. On peut considérer ce tableau comme une fonction qui fait un lien entre la valeur de chaque donnée et sa fréquence.

Différentes mesures peuvent être effectuées, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple

Le tableau suivant représente les notes finales obtenues par les élèves d'un groupe de mathématiques de secondaire 4 :

Note	Fréquence
98	2
94	4
88	7
87	4
86	6
83	9
80	5
78	4
75	3
74	1

a) Quel est le mode de cette distribution?

b) Quelle est la moyenne de cette distribution?

c) Quelle est la médiane de cette distribution?

d) Utilise ta calculatrice à affichage graphique pour déterminer les valeurs ci-dessus (si possible) et trace un nuage de points de cette distribution.

e) Combien y a-t-il d'élèves dans ce groupe?

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressources imprimées

Le succès à la portée de tous les apprenants : Manuel concernant l'enseignement différentiel - Ouvrage de référence pour les écoles (maternelle à Secondaire 4). Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 1996.

Angel, P. et coll. Omnimaths 12. Western Edition. Whitby, Ont. : McGraw-Hill Ryerson Ltd., 2000.
[ISBN : 007552600X]

LeBlanc, D. Addition-Wesley Mathematics 12, Western Canadian Edition, Don Mills, Ont. : Addison-Wesley Longman Ltd., 2000.
[ISBN : 020134629X]

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications ✔ Liens ✔ Estimation et Calcul Mental

Résolution ✔ Raisonnement Technologie ✔ Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer (suite)**

f) Si on choisit un élève au hasard, quelle sera
   i) sa note la plus probable?
   ii) sa note la moins probable?
   iii) la probabilité que sa note soit 80?

Solution

a) 83, étant donné que le mode est la note la plus fréquente.

b) $\dfrac{\sum(\text{note}\times\text{fréquence})}{\sum\text{fréquence}} = \dfrac{3810}{45} = 84\dfrac{2}{3}$, puisque $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

N'oubliez pas qu'on appelle cette valeur la valeur attendue de la distribution.

c) 86, étant donné que la marque centrale (la 23^{e}) est la médiane.

d) Dans le menu Stat, inscris les notes dans la première colonne, L1, et les fréquences dans la deuxième colonne, L2.

La calculatrice TI-83 nous donnerait le résultat suivant :

L1	L2	L3 3
98	2	
94	4	
88	7	
87	4	
86	6	
83	9	
80	5	

L3(1)=

e) $n = \sum f = 45$

f) i) 83, étant donné que c'est le mode
   ii) 74, étant donné qu'un seul élève a obtenu cette note
   iii) $\dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$

La moyenne, la médiane et le mode sont appelés des mesures de la tendance centrale.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le tableau suivant illustre la longueur des mots dans un passage donné :

Longueur des mots	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence	5	4	7	6	4	3	4	0	1

a) Quelle est la longueur médiane des mots de ce passage?

b) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité qu'il contienne trois lettres?

c) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un mot de trois lettres ou de deux lettres?

d) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un mot de quatre lettres ou plus?

e) Dessine un nuage de points pour représenter ces données.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications · ✔ **Liens** · ✔ **Estimation et Calcul Mental** · Résolution · ✔ **Raisonnement** · Technologie · ✔ **Visualisation**

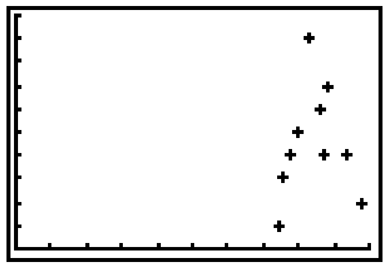
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer (suite)**

Exemple (suite)

Solution (suite)

On peut aussi représenter les données sous forme graphique. À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, inscris les données dans L1 et les fréquences dans L2. On obtient le nuage de points ou le graphique à barres suivant :



- **présenter le concept de l'écart type**

Il s'agit d'une mesure qui permet de déterminer comment les données d'une population ou d'un échantillon sont dispersées autour de la moyenne.
Les formules de calcul des écarts types sont les suivantes :

Échantillon :

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Population :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{n}}$$

(***Remarque :*** Le symbole μ est utilisé pour représenter la moyenne d'une population et $\bar{x}$ pour représenter la moyenne d'un échantillon).

Si un ensemble de nombres, x_1, x_2, . . . x_n, comprend les lectures d'une population de moyenne μ, alors chacune des différences, $(x_1 - \mu)$, $(x_1 - \mu)$, $(x_2 - \mu)$, . . . $(x_n - \mu)$ est appelée un écart par rapport à la moyenne. Il serait intéressant d'utiliser la somme de ces différences pour mesurer la dispersion de la distribution, mais la somme sera toujours zéro. Pour éliminer l'incidence des signes sur les calculs, il faut mettre au carré les différences avant de trouver la somme. La moyenne de cette somme des carrés est appelée la ***variance*** d'une distribution. Pour « éliminer » l'effet de l'élévation au carré, on prend la racine carrée de la variance pour trouver l'écart type. L'importance de cet écart type ressortira de façon beaucoup plus évidente quand on étudiera certaines distributions spéciales, notamment la distribution normale.

Sauf mention contraire, l'écart type de la population est toujours utilisé.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit les deux ensembles de données ci-dessous; calcule les écarts types des ensembles A et B.

   Ensemble A

x	3	4	5	6
f	1	1	1	1

   Ensemble B

x	13	14	15	16
f	1	1	1	1

2. Trouve la moyenne et l'écart type de la distribution de fréquence suivante :

x	4	6	7	8	9	11	12
f	2	3	5	8	4	2	1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer une distribution de probabilité**

Ce développement implique le concept de fonction.

Définition : Une variable aléatoire est une fonction qui affecte un nombre à chaque résultat possible d'un espace échantillonnal. La variable aléatoire est dépendante du sujet considéré.

Exemple 1

Si trois cartes sont choisies dans un paquet ordinaire, posons le nombre de cœurs choisis (C correspond à cœur et N à non-cœur) comme variable aléatoire.

Choix de trois cartes qui sont des coeurs (X)	valeur assignée à cet événement (x)
N N N	0
C N N, N C N, N N C	1
C C N, C N C, N C C	2
C C C	3

Quand une probabilité est affectée à chaque valeur d'un échantillon aléatoire, on obtient une fonction de répartition.

Définition : Une fonction de distribution de probabilité est une fonction qui associe à chaque valeur d'une variable aléatoire la probabilité que cette valeur se réalise.

Exemple 2

Si trois cartes sont choisies dans un paquet ordinaire, la variable aléatoire est le nombre de cœurs choisis.

Nombre de coeurs (x)	Probabilité de x
0	$\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50}$
1	$3\left(\frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50}\right)$
2	$3\left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50}\right)$
3	$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50}$

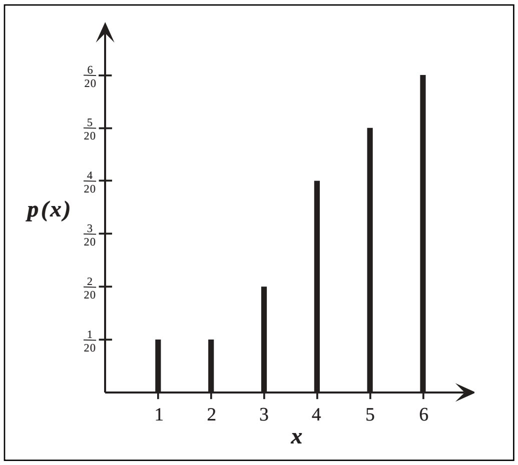
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le diagramme ci-dessous représente le graphique d'une distribution de probabilité.



Convertis le graphique en tableau et trouve :

a) la moyenne

b) le mode

c) l'écart type

d) la probabilité que $x < 5$

f) la probabilité que $2 < x < 5$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer une distribution de probabilité (suite)**

La fonction de distribution de probabilité peut être représentée par un graphique à barres. Si tu utilises la calculatrice TI-83, entre les valeurs de la variable aléatoire dans une colonne L1 et les numérateurs des probabilités dans une deuxième colonne, L2. Quand tu entres ces numérateurs, assure-toi que les probabilités ont le même dénominateur commun! Mets le nom de la deuxième colonne en surbrillance et entre L2/(dénominateur commun). La deuxième colonne devrait afficher des représentations décimales des probabilités respectives. Trace le graphique à l'aide de L1 et de L2.

Choisis la forme histogramme, puis Xlist :L1 et Freq :L2, et appuie sur GRAPH pour obtenir l'histogramme.

- **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence**

Une distribution de fréquence est une classification de données dans différentes catégories.

Note	Fréquence
98	2
94	4
88	7
87	4
86	6
83	9
80	5
78	4
75	3
74	1

Une distribution de fréquence relative est telle que chaque fréquence est divisée par la somme de toutes les fréquences.

La probabilité qu'un élève choisi ait une note de 80 est de $\frac{5}{45}$, le nombre équivalent à la fréquence relative de la note.

Note	Fréquence
98	$\frac{2}{45}$
94	$\frac{4}{45}$
88	$\frac{7}{45}$
87	$\frac{4}{45}$
86	$\frac{6}{45}$
83	$\frac{9}{45}$
80	$\frac{5}{45}$
78	$\frac{4}{45}$
75	$\frac{3}{45}$
74	$\frac{1}{45}$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Convertis la distribution de fréquence suivante en une distribution de fréquence relative :

x	4	5	6	7	8	9	10
f	12	10	8	7	6	4	2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence (suite)**

Remarque : Étant donné qu'une valeur aléatoire doit avoir au moins une de ses valeurs, la somme de toutes les probabilités (ou les fréquences relatives) d'une distribution de probabilité est 1.

Le lien entre une distribution de fréquence et sa distribution de fréquence relative nous permet de trouver la moyenne d'une distribution de probabilité.

La moyenne de la distribution de fréquence exprimée dans le tableau est :

x	1	2	3
f	2	3	4

$\frac{2(1)+3(2)+4(3)}{9}$ qui peut être écrit sous la forme $2\left(\frac{1}{9}\right)+3\left(\frac{2}{9}\right)+4\left(\frac{3}{9}\right)$

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

Cette dernière forme correspond à la somme des produits de chaque lecture et à sa fréquence relative (ou probabilité).

Par conséquent, la formule de la moyenne d'une distribution de probabilité est :

$$\mu = \sum x \cdot p(x)$$

La formule de l'écart type est :

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 \cdot p(x) - \mu^2}$$

Définition : Les distributions dont chacun des résultats est équiprobable sont appelées des **distributions uniformes**.

Exemple

Les résultats théoriques au lancer de dé :

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Distrubution uniforme)

Trouve la moyenne et l'écart type.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une urne contient trois billes rouges et cinq bleues. Si on tire deux billes, construis un tableau de la distribution de probabilité pour le nombre de billes rouges choisies si :

a) la première bille est replacée avant qu'on choisisse la deuxième.

b) la première bille n'est pas replacée avant qu'on choisisse la deuxième.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence (suite)**

  Solution

  $$\mu = \sum x \cdot p(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

  Il s'agit de la valeur attendue d'un grand nombre d'essais.

  Remarque : C'est un lancer moyen. Cette moyenne, 3,5, est un résultat qu'on ne peut obtenir à aucun lancer.

  $$\sigma = \sqrt{91\left(\frac{1}{6}\right) - 3{,}5^2} = 1{,}7$$

- **examiner une distribution binomiale**

  Une distribution discrète est telle qu'une variable aléatoire du type lancer de dé peut avoir certaines valeurs particulières dans un intervalle donné. Un résultat de 2,5 n'est pas possible.

  Règle : Pour qu'une distribution soit binomiale, elle doit satisfaire aux propriétés suivantes :

  1. Le résultat de chaque essai doit être un parmi deux possibilités seulement : un succès, définie par p; un échec, défini par q; par conséquent, $p + q = 1$.
  2. Les essais sont les mêmes après n essais répétés.
  3. Les essais sont indépendants. Les probabilités restent constantes.

  La fonction de la distribution binomiale est :

  $$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

  où x est le nombre de succès dans n essais.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

Exemple 1

Calcule la distribution de probabilité du nombre de six obtenus quand on lance un dé non truqué quatre fois.

Solution

Nombre de six (x)	**$P(x)$**
0	$\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1\times1\times\frac{625}{1296} = \frac{625}{1296}$
1	$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\times\frac{1}{6}\times\frac{125}{216} = \frac{500}{1296}$
2	$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6\times\frac{1}{36}\times\frac{25}{36} = \frac{150}{1296}$
3	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4\times\frac{1}{216}\times\frac{5}{6} = \frac{20}{1296}$
4	$\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1\times\frac{1}{1296}\times1 = \frac{1}{1296}$

Les probabilités que x = 0, 1, 2, 3, 4 sont les termes du développement binomial de $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4$.

Par exemple,

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

Certaines calculatrices à affichage graphique peuvent générer les probabilités binomiales.

Sur la calculatrice TI-83, suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd et DISTR pour obtenir le menu distribution.
2. Choisis 0:binompdf(, soit la distribution des probabilités binomiales.
3. Inscris les valeurs des paramètres, soit (4, (1/6)) dans ce cas-ci, pour obtenir :
   {0,4823 0,3858 0,1157 0,0154 7,7160E -4}.
   Cette liste correspond aux probabilités d'obtenir 0, 1, 2, 3 et 4 six respectivement.

– suite

Communications | Résolution
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
| ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une pièce de monnaie est biaisée de telle sorte que la probabilité d'obtenir des côtés face est de $\frac{4}{7}$.

a) Si tu lances cette pièce 49 fois, quel sera le nombre le plus probable de faces?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir ce nombre de côtés face?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

Si la distribution est binomiale, les deux formules suivantes peuvent s'appliquer :

a) moyenne = np

b) écart type = $\sqrt{npq}$

Exemple 2

a) Lancer des pièces de monnaie (face par rapport à pile)

b) Lancer un dé (nombre six par rapport à non-six)

c) Population d'une école (garçons par rapport à filles)

Justifie les formules au moyen de calculs liés à des expériences simples.

Solution

a) P(face) = 0,5 — P(non face) = 0,5

pour 10 lancers : moyenne = 10 (0,5) = 5 faces

$$\text{écart type} = \sqrt{10(0,5)(0,5)} \approx 1,6$$

Tu t'attends à obtenir environ 5 ± 2 faces ou environ 3 à 7 faces si tu lances la pièce 10 fois.

Remarque : Dans une distribution binomiale, deux résultats sont possibles. Appelles-les A et ~A (non A). Ensuite, si p est la probabilité que A se réalise, q est la probabilité que ~A. Comme ci-dessus, la moyenne est np et l'écart type est $\sqrt{npq}$.

Pour 100 lancers : moyenne = 100 (0,5) = 50

$$\text{écart type} = \sqrt{50(0,5)(0,5)} \approx 5$$

Tu t'attends à obtenir environ 50 ± 5 côtés face.

b) Si tu lances le dé 50 fois :

$$\text{moyenne} = 50\left(\frac{1}{6}\right) = 8,\overline{3}$$

$$\text{écart type} = \sqrt{50\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 2,6$$

Tu t'attends à obtenir un six environ 8 ± 3 fois ou 5 à 11 fois après 50 lancers. Il est probable que le résultat soit à 1 écart type de la moyenne 68 % du temps, et à 2 écarts types environ 95 % du temps. Il serait à 3 écarts types plus de 99 % du temps.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

c) Suppose qu'une école compte 395 élèves, dont 210 sont des garçons. Alors,

$$p = \frac{210}{395} \approx 0{,}53 \text{ et } q = 1 - 0{,}53 = 0{,}47.$$

Si tu choisis un élève au hasard, la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon est de 0,53. Pour calculer la probabilité de choisir exactement deux garçons si tu fais un tirage au sort de trois noms, l'espace échantillonnal pour les trois tirages est le suivant : (G ou F) et (G ou F) et (G ou F), ce qui est équivalent à $(G + F)^3$.

$$(G + F)^3 = {}_3C_0M^3 + {}_3C_1M^2F + {}_3C_2MF^2 + {}_3C_3F^3$$

Le terme qui représente un choix de deux garçons est ${}_3C_1G^2F$. Si tu remplaces G par 0,53 et F par 0,47, tu obtiens

$$\begin{aligned} P(\text{2 garçons après 3 tirages}) &= {}_3C_1(0{,}53)^2(0{,}47) \\ &= 0{,}40 \end{aligned}$$

Exemple 3

Un élève fait un examen à choix multiples qui comporte dix questions assorties de cinq choix chacune. S'il ne s'est pas préparé et qu'il choisit les réponses au hasard, quelle est la probabilité :

a) qu'il obtienne exactement cinq bonnes réponses?

b) qu'il obtienne quatre bonnes réponses ou moins?

c) qu'il obtienne au moins cinq bonnes réponses?

d) qu'il obtienne au moins sept bonnes réponses?

Solution

Il s'agit d'une distribution binomiale étant donné qu'une réponse est soit bonne, soit mauvaise. La probabilité d'obtenir une bonne réponse est une constante 0,2. Par conséquent, $p = 0{,}2$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ et $n = 10$.

a) $P(x = 5) = \binom{10}{5}(0{,}2)^5(0{,}8)^5 = 252(0{,}00032)(0{,}32768) = 0{,}0264\ 424$

ou, si tu utilises une calculatrice, bnompdf(10; 0,2; 5) = 0,026424.

Remarque : La syntaxe de saisie dans la calculatrice est : (n, p, nombre de résultats favorables).

Si tu n'entres pas le nombre de résultats favorables, comme c'était le cas dans les premiers exemples, la calculatrice génère l'ensemble de la distribution de tous les nombres possibles de résultats favorables.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Si 95 % des participants à une course de 1000 mètres ont fini la course au cours des dernières années, trouve la probabilité qu'au moins 14 des 15 participants terminent le 1000 mètres l'an prochain.
2. Quelle est la valeur attendue et l'écart type pour les 15 participants à la course dont il est question à la question 1?
3. Calcule les distributions binomiales et trace le graphique :
   a) $n = 5$, $p = 0{,}2$
   b) $n = 5$, $p = 0{,}8$
   c) $n = 10$, $p = 0{,}2$
   d) $n = 5$, $p = 0{,}5$
   e) $n = 10$, $p = 0{,}5$
   f) $n = 20$, $p = 0{,}5$
4. Dans une distribution binomiale de 20 essais, la P(15 ou moins de résultats favorables) = a, P(10 ou moins de résultats favorables) = b et P(5 ou moins de résultats favorables) = c; trouve :
   a) $P(10 < x \leq 15)$
   b) $P(5 < x \leq 10)$
   c) $P(x > 10)$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils techniques
- suite

Communications — Résolution
✔ **Liens** — ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** — Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

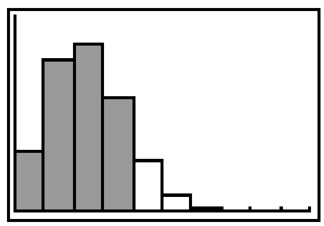
Exemple 3 – suite

Solution – suite

b) P(x ≤ 4) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)

Utilise la fonction binompdf(10; 0,2; {0, 1, 2, 3, 4}) = {0,1074 0,2684 0,3020 0,2013 0,0881}

Par conséquent, P(x ≤ 4) = 0,1074 + 0,2684 + 0,3020 + 0,2013 + 0,0881 = 0,9672. Il s'agit de la somme des 5 premiers termes du développement binomial de $(0,2 + 0,8)^{10}$. La calculatrice TI-83 comporte une fonction distribution binomiale cumulative (***cumulative binomial distribution function***) très utile pour résoudre des problèmes où il faut évaluer les probabilités fondées sur des termes tels que « moins que » et « plus que ». Cette fonction trouve la probabilité que la valeur soit moindre ou égale à la valeur x choisie. Il s'agit de la somme de l'aire des rectangles de l'histogramme associé, incluant x.



Choisis A :binomcdf(10; 0,2; 4) pour obtenir 0,96720650, tel qu'attendu.

La syntaxe est la suivante : binomcfd(n, p, le nombre maximum de résultats favorables).

c) Le résultat en (b) nous permet de trouver P(x ≥ 5) = 1 – P(x ≤ 4) = 1 – 0,9672 = 0,0328. La distribution binomiale de ce test est le développement de $(0,2 + 0,8)^{10}$, qui consiste en la série de 11 termes suivants :

$$\underbrace{P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)}_{\substack{\text{Probabilité d'obtenir 4 bonnes réponses ou moins} \\ F}} + \underbrace{P(5)+P(6)+P(7)+P(8)+P(9)+P(10)}_{\substack{\text{Probabilité d'obtenir 5 bonnes réponses ou plus} \\ G}}$$

Étant donné que la somme des probabilités est toujours 1, alors F + G = 1 ou G = 1 – F.

d) P(x ≥ 7) = 1 – P(x < 7)
La calculatrice nous donne (1 – binomcdf(10; 0,2; 7)) = 7,793E –5, un résultat improbable!

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

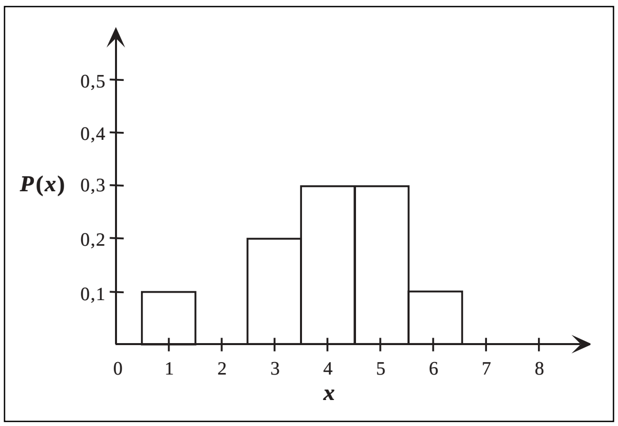
NOTES

Problèmes

1. On lance une pièce de monnaie dix fois. Trouve la probabilité :
   a) d'obtenir exactement trois côtés face
   b) d'obtenir au moins trois côtés face
   c) d'obtenir au plus trois côtés face

2. Trouve la moyenne et l'écart type de la distribution binomiale de la question 1.

3. Soit l'histogramme suivant d'une distribution binomiale; quelle est la probabilité que :
   a) x ait une valeur inférieure à 5?
   b) x ait une valeur entre 3 et 6?
   c) x ait une valeur supérieure ou égale à 3 et inférieure à 6?



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

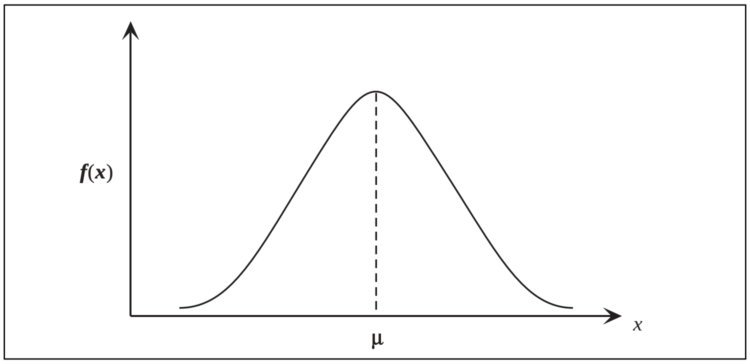
Communications	Résolution
✔ **Liens**	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale**

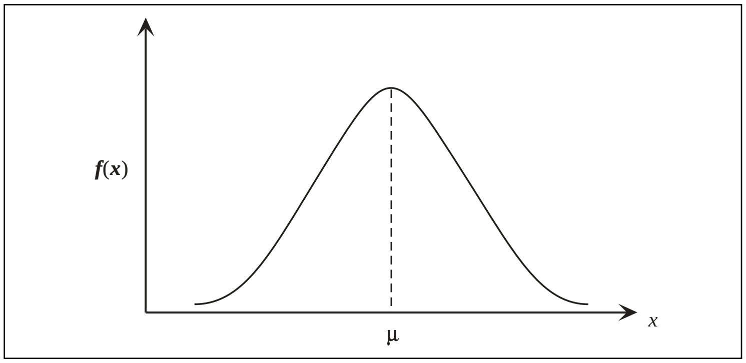
Une variable aléatoire est continue si elle peut prendre une valeur quelconque à l'intérieur d'un intervalle donné. La distribution normale revêt une importance capitale.

Le graphique de toute distribution normale, illustré ci-dessous, possède les caractéristiques générales suivantes :



1. $f(x) > 0$ pour tous les nombres réels x.
2. La courbe est symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par la moyenne.
3. La courbe est en forme de cloche, avec un seul pic à la moyenne.
4. Comme c'est le cas pour toute distribution de probabilité continue, l'aire sous l'ensemble de la courbe sur $]-\infty, \infty[$ est égale à 1. Aussi, $P(a < x < b)$ est égal à l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
5. La courbe est asymptotique par rapport à l'axe des x quand x prend une valeur très grande dans un sens positif ou négatif.

Différentes valeurs de la moyenne, μ, et l'écart type, σ, produisent une courbe différente, qui conservera toutefois la même forme caractéristique.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

La calculatrice à affichage graphique peut déterminer l'aire sous la courbe normale, donc la probabilité, si la moyenne et l'écart type de la distribution sont connus.

Exemple 1

Les notes obtenues à l'examen de mathématiques de S4 au Manitoba sont distribuées normalement avec une moyenne de 60,3 et un écart type de 10,5. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait obtenu une note :

a) inférieure à 52,4?

b) inférieure à 80?

c) supérieure à 90?

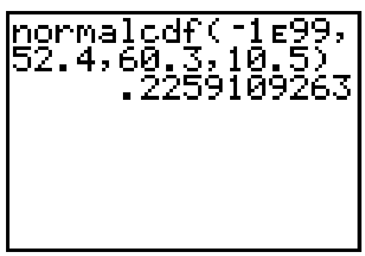
d) entre 60 et 80,5?

Solution

a) sur la calculatrice TI-83, appuie sur les touches suivantes :

1. 2nd et DISTR.
2. Choisis 2:normalcdf (puis appuie sur ENTER – le gabarit normalcdf est affiché. Il s'agit de la fonction de la distribution normale cumulative qui trouve l'aire sous la courbe normale.
3. Entre les valeurs suivantes : (–1E99, 52,4, 60,3, 10,5) syntaxe : (limite inférieure, limite supérieure μ, σ).

   Remarque : Le domaine de la courbe est]–∞, ∞[. Étant donné que –∞ n'est pas un nombre, on utilise un nombre négatif très grand, –1E99, à la place.



4. La réponse devrait être 0,22591.

Communications — ✔ **Liens** — ✔ **Estimation et Calcul Mental** — Résolution — ✔ **Raisonnement** — Technologie — ✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Au dixième près, quel pourcentage de données distribuées normalement sont à l'intérieur de deux écarts types de la moyenne?
2. Au dixième près, quel pourcentage de valeurs excède deux écarts types au-dessus de la moyenne? Quel pourcentage excède deux écarts types au-dessous de la moyenne?

Problèmes

1. Si la vie moyenne d'un certain type de pile est 30 mois, avec un écart type de 6 mois, quelle est la probabilité que la pile achetée dure plus longtemps que 36 mois (suppose que la durée de vie suit une distribution normale)?
2. Si on lance un dé 36 fois, quelle est la probabilité, si on utilise une approximation de la courbe de distribution normale :
   a) d'obtenir un « cinq » exactement 7 fois?
   b) d'obtenir un « cinq » au moins 7 fois?
   c) d'obtenir un « cinq » au plus 7 fois?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'une ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

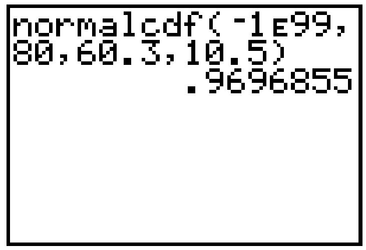
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

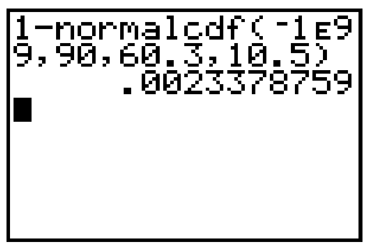
Exemple 1 – suite

Solution – suite

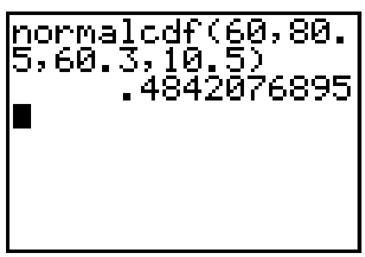
b) normalcdf(-1E99; 80; 60,3; 10,5)
réponse : 0,96969



c) 1- normalcdf(-1E99; 90; 60,3; 10,5)
réponse : 1- 0,99766 = 0,00234
ou normalcdf(90; 1E99; 60,3; 10,5)
réponse : 0,00234



d) normalcdf(60; 80,5; 60,3; 10,5)
réponse : 0,48421



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

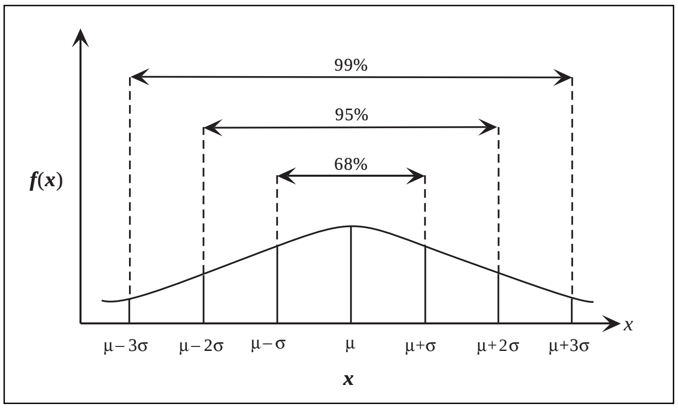
Communications | Résolution
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Règle : Toute distribution normale possède ces importantes propriétés qui contribuent à faire de l'écart type une mesure si importante.

1. Environ 68 % de la distribution se trouve à 1σ de la moyenne.
2. Environ 95 % de la distribution se trouve à 2σ de la moyenne.
3. Environ 99 % de la distribution se trouve à 3σ de la moyenne.



Exemple 2

Le poids d'une certaine race de chiens est distribué normalement, avec une moyenne de 3 kg et un écart type de 0,2 kg. Trouve le pourcentage de ces chiens dont le poids est inférieur ou égal à 3,2 kg.

Solution

normalcdf(-1E99; 3,2; 3; 0,2)

réponse : 0,84134. Par conséquent, 84 % des chiens ont un poids inférieur ou égal à 3,2 kg.

Il peut être utile d'ombrer l'aire sous la courbe normale. Sur la calculatrice TI-83, suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd et DISTR.
2. Choisis Draw et ShadeNorm(.
3. Inscris les mêmes données que pour normalcdf(:
   ShadeNorm(–1E99, 3,2, 3, 0,2)

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une variable aléatoire x est distribuée normalement avec une moyenne de 7 et un écart type de 2,5. Trouve la valeur de la variable aléatoire x tel que :

   a) 50 % des valeurs sont supérieures à x

   b) 20 % des valeurs sont inférieures à x

   c) 90 % des valeurs sont inférieures ou égales à x

2. Une variable aléatoire r est distribuée normalement avec une moyenne de 5 et un écart type de 2,5.

   a) Trouve la valeur de w tel que $P(w < r < 10) = 0{,}8413$.

   b) Trouve la valeur de w tel que $P(7 < r < w) = 0{,}1000$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

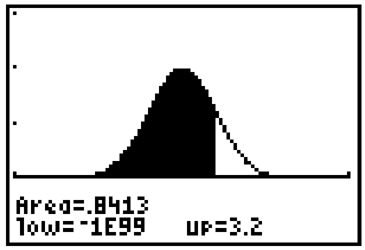
I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite



(Window : X_{min} = 2, X_{max} = 4, Y_{min} = –1, Y_{max} = 3)

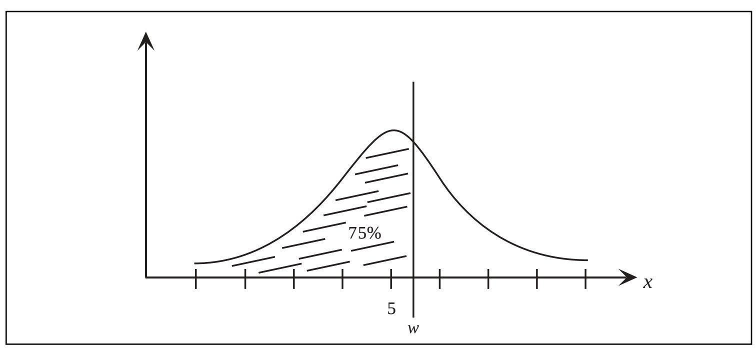
Remarque : Appuie sur DRAW et choisis 1:ClrDraw pour effacer ce dessin avant de tenter de dessiner une autre zone.

Le problème inverse : Dans de nombreux problèmes, on te donne le pourcentage, ou la probabilité, de la région d'une distribution normale, et tu dois trouver la cote correspondant à cette probabilité.

Exemple 3

Une variable aléatoire *x* est distribuée normalement avec une moyenne de 5 et un écart type de 1. Trouve la valeur de *w* tel que 75 % des valeurs sont inférieures à *w*.

Solution



– *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

La durée de vie d'une bicyclette est distribuée normalement avec une moyenne de 18,6 années et un écart type de 5,2 années. La compagnie qui fabrique les bicyclettes remplacera une bicyclette qui vient d'être achetée si elle est encore sous garantie. Pendant combien d'années la compagnie de bicyclettes devrait-elle garantir les bicyclettes si elle ne veut pas remplacer plus de 5 % des bicyclettes vendues?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications | ✔ **Liens** | ✔ **Estimation et Calcul Mental** | Résolution | ✔ **Raisonnement** | Technologie | ✔ **Visualisation**

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Exemple 3 – suite

Solution – suite

Heureusement, la calculatrice TI-83 comporte une fonction inverse qui donne la valeur de x pour obtenir la probabilité donnée. Suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd DISTR et choisis 3:invNorm(.
2. Inscris les valeurs des paramètres :
   InvNorm(0,75; 5, 1)
   réponse : 5,6745
   Syntaxe : InvNorm(probabilité [que les valeurs de w soient < x], moyenne, écart type)

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | ✔ **Résolution** | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

• **présenter les cotes normalisés**

Quand les cotes de deux distributions ou plus qui ont des moyennes ou des écarts types différents doivent être comparés, il est utile de ***normaliser*** les cotes. La cote normalisée est appelée une ***cote z*** (variable centrée réduite) et on la calcule à l'aide de la formule

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

où μ correspond à la moyenne et σ est l'écart type. On obtient ainsi, en nombre d'écarts types, la position d'une cote x par rapport à la moyenne.

Exemple

Si la moyenne = 21 et que l'écart type est 4, calcule les cotes z des cotes réelles suivantes : 25, 17, 26,5, 16,5.

Solution

a) $z = \dfrac{(25 - 21)}{4} = 1$

b) $z = \dfrac{(17 - 21)}{4} = -1$

c) $z = \dfrac{(26{,}5 - 21)}{4} = 1{,}375$

d) $z = \dfrac{(16{,}5 - 21)}{4} = -1{,}125$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Quelle est ta matière la plus forte si tu as obtenu les notes suivantes? Discute de ta réponse.

Matière	Ta note	Moyenne de l'école	Écart type/ école
Français	80	75	2
Mathématiques	85	75	5
Physique	82	75	5

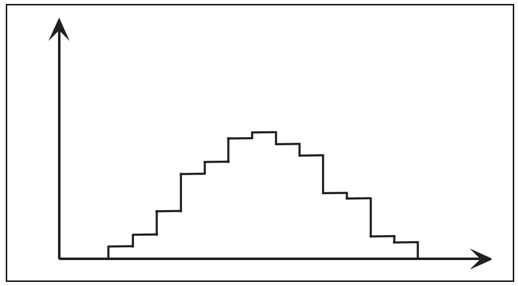
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

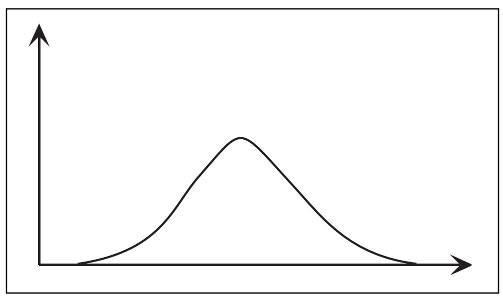
- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale**

  Quand les événements sont également probables, la distribution binomiale ressemble au graphique ci-dessous.



On voit une saillie au milieu et deux pointes.

Plus le nombre d'événements et d'essais est élevé, plus la courbe de la distribution devient régulière. Ainsi, si on lance 1000 pièces de monnaie un million de fois, la distribution aurait l'apparence suivante :



À ce point, notre distribution serait proche d'une distribution théorique, appelée la ***distribution normale***.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

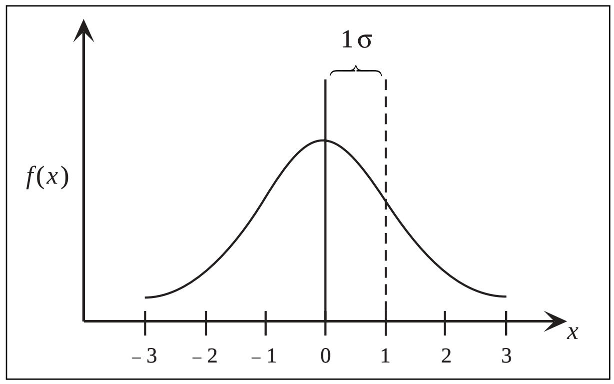
I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

  Géométriquement, toute courbe normale peut être transformée en une ***courbe normale standard***, dont la moyenne est 0 et l'écart type est 1. L'équation de cette courbe est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Avant que les calculatrices à affichage graphique ne deviennent des outils très puissants pour mesurer l'aire sous la courbe normale, la courbe normale standard servait à trouver les probabilités de toutes les distributions normales : on convertissait les cotes x de la fonction normale en cotes z de la fonction standard. Des tables qui donnent l'aire sous la courbe normale standard sont disponibles.

Exemple 1

Les notes à l'examen de mathématiques de secondaire 4 au Manitoba sont distribuées normalement avec une moyenne de 60,3 et un écart type de 10,5. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait obtenu une note :

a) inférieure à 52,4?

b) inférieure à 80?

c) supérieure à 90?

d) entre 60 et 80,5?

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans un échantillon de 122 personnes, la température corporelle moyenne est 36,8° C, avec un écart type de 0,35° C. Si on suppose une distribution normale, trouve :

a) le nombre de personnes dont la température est supérieure à 37,0° C

b) le nombre de personnes dont la température est inférieure à 36,0° C

De plus, estime l'étendue des températures mesurées dans l'échantillon.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes *z* et des tables de cotes *z* pour résoudre des problèmes *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

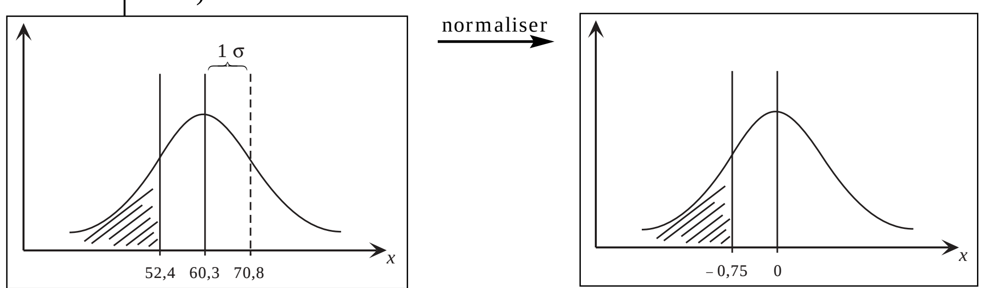
• **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

Convertis la distribution normale en une distribution normale standard.

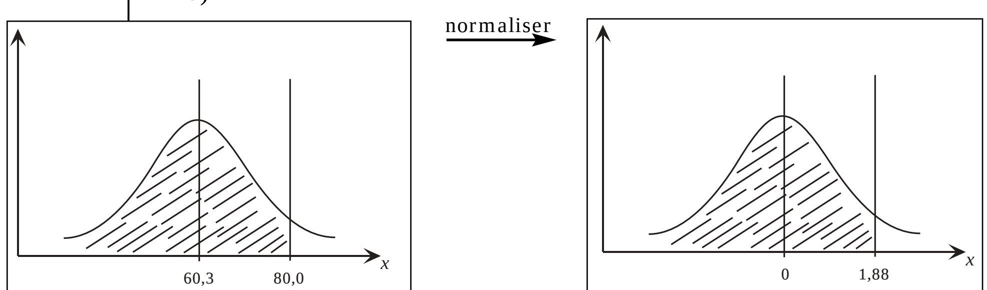
a)



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{54,2-60,3}{10,5} = -0,75$$

ce qui signifie que la cote 52,4 se trouve à 0,75σ unité au-dessous de la moyenne. La table nous donnerait 0,2358 comme réponse; elle n'est pas aussi précise que la réponse obtenue avec la calculatrice, qui affiche plus de chiffres après la virgule.

b)



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{80-60,3}{10,5} = 1,88$$

ce qui signifie que la cote de 80 se trouve à 1,88σ unités au-dessus de la moyenne. La table nous donnerait 0,9699 comme réponse.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes – *suite*

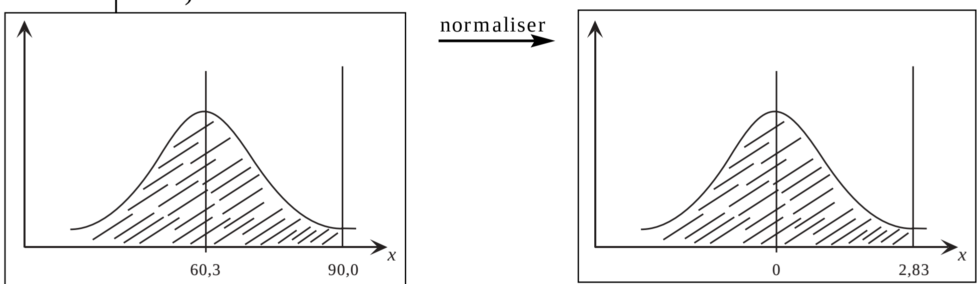
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

c)

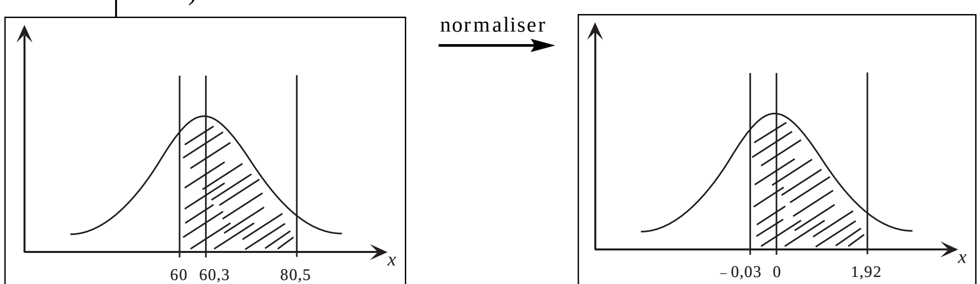


$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{90-60,3}{10,5} = 2,83$$

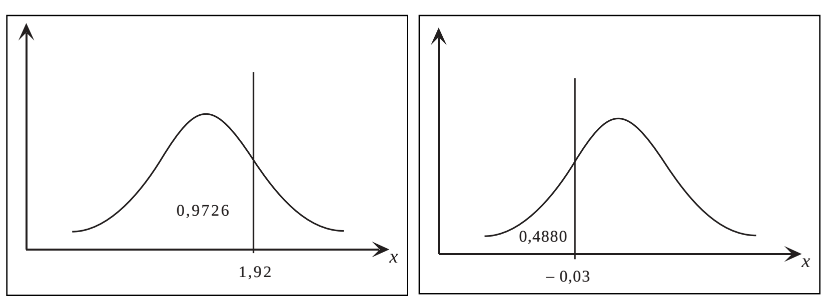
ce qui signifie que la cote de 90 se trouve à $2,83\sigma$ unités au-dessus de la moyenne. La table donnerait 0,9977 comme réponse.

Par conséquent, $P(x > 90) = 1 - P(x \le 90) = 1 = 0,9977 = 0,0023$.

d)



$$z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{60-60,3}{10,5} = -0,03 \text{ et } z_2 = \frac{80,5-60,3}{10,5} = 1,92$$



La table donnerait des aires de : 0,4880 et 0,9726, respectivement. Par conséquent, $P(60 < x < 80,5) = 0,9726 - 0,4880 = 0,4846$.

– suite

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Suppose que x est distribué normalement, et que $\mu = 100$ et $\sigma = 10$. Trouve :

   a) $P(x < 115)$

   b) $P(x \geq 85)$

   c) $P(80 < x < 110)$

   d) $P(110 \leq x \leq 120)$

   e) $P(50 < x < 125)$

2. Si la variable aléatoire x est distribuée normalement, et que $\mu = 100$ et $\sigma = 15$, trouve la valeur de w tel que :

   a) $P(x \leq w) = 0{,}8776$

   b) $P(x \leq w) = 0{,}5342$

   c) $P(x > w) = 0{,}8776$

   d) $P(w \geq x) = 0{,}1234$

   e) $P(85 \leq x \leq w) = 0{,}5000$

   f) $P(\mu - w \leq x \leq \mu + w) = 0{,}6000$

   g) $P(\mu - w \leq x \leq \mu + w) = 0{,}8000$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 2

Le volume d'une canette de boisson gazeuse est normalement distribué autour d'une moyenne de 350 ml, avec un écart type de 1,5 ml.

a) Calcule la cote z pour une canette dont le volume est 355 ml.

b) Quel pourcentage de la production sera constitué de canettes dont le volume se trouve entre 350 ml et 355 ml?

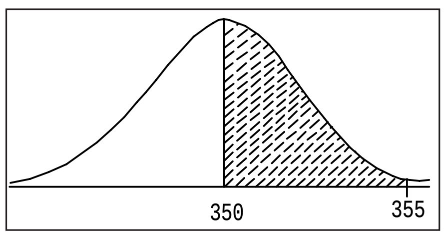
c) Quel pourcentage de la production sera constitué de canettes dont le volume est inférieur à 355 ml?

d) Si les canettes dont le volume est inférieur à 346 ml doivent être jetées, combien seront rejetées dans une série de 50 000?

Solution

a) $\dfrac{355-350}{1,5}=3,\overline{3}$ La cote z est 3,3.

b)



aire = pourcentage de la production ≈ 49,96%

c) environ 50 + 49,96 ou 99,96%

d) $\dfrac{346-350}{1,5}=-2,\overline{6}$ La cote z est –2,6.

0,4% (50 000) ≈ 200 canettes rejetées

Remarque : La calculatrice TI-83 donne une aire sous la courbe normale standard qui se situe entre deux courbes z quelconques. Appuie sur 2nd VARS pour obtenir le menu DISTR. Sélectionne 2:normalcdf et inscris les extrémités de l'intervalle.

Pour obtenir l'aire sous –2,6, tu pourrais entrer –7 et –2,6667 comme extrémités. Plus de 99,7 % de l'aire se trouve entre –3 et 3.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans la population, les notes obtenues au test de mesure du QI sont distribuées normalement autour d'une moyenne de 100, avec un écart type de 10. Si le test est administré à un groupe important de personnes :

a) Quelle est la proportion de personnes qui devraient avoir un QI entre 100 et 120?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne du groupe ait un QI supérieur à 120?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

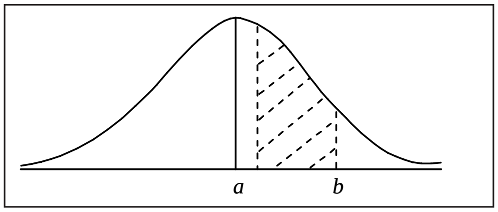
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

I-2 utiliser des cotes *z* et des tableaux de cotes *z* pour résoudre des problèmes *– suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

• **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 3



a) Quelle est l'aire au-dessous de la courbe?

b) Si P($a < x < b$) = 0,4, quelle est l'aire au-dessous de la courbe dans l'intervalle $a < x < b$?

c) Si P($x < b$) = 0,9, calcule P($x > b$), puis la valeur de b.

Solutions

a) L'aire sous la totalité de la courbe normale est 1.

b) L'aire est la probabilité d'obtenir une valeur entre *a* et *b*. La réponse est 0,4.

c) P($x > b$) = 1 – 0,9 = 0,1

Sur la calculatrice graphique TI-83, sélectionne 3 inv Norm dans le menu DISTR. Inscris l'aire, la moyenne et l'écart type, soit inv Norm (0.1, 0, 1) ≈ –1,28. Dans ce cas, cela signifie que *b* se trouve à 1,28 écart type au-dessus de la moyenne.

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur les intervalles de confiance de grands échantillons

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Liens** | Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
Visualisation

• **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale**

Dans de nombreux cas, une variable aléatoire normale constitue une excellente approximation d'une distribution binomiale pourvu que *n*, le nombre d'essais, soit important et *p*, le nombre de réalisations, ne soit ni trop petit ni trop près de 1.

Utilise la distribution normale pour trouver la distribution binomiale approximative seulement quand $np > 5$ et $nq > 5$ dans les deux produits.

Exemple 1

a) Trouve la probabilité exacte d'obtenir sept côtés face si on lance douze fois une pièce de monnaie non truquée.

b) Utilise une approximation normale pour trouver la probabilité d'obtenir sept côtés face si on lance une pièce de monnaie non truquée douze fois.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

a) $P(7\text{faces}) = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 792\left(\frac{1}{4096}\right) = \frac{99}{512}$

ou à l'aide d'une calculatrice
P(7 faces) = binompdf(12; 0,5; 7) = 0,19336

b) $np = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ et $nq = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6 > 5$

Par conséquent, l'approximation normale peut être utilisée. Pour ce faire, tu dois connaître la moyenne et l'écart type de la distribution.

$\mu = np = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ et $\sqrt{npq} = \sqrt{6\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} = 1{,}7321$

En plus, étant donné que la probabilité dans une distribution continue est 0, on utilise la correction de continuité où on tient pour acquis que les valeurs entières de la distribution discrète, par exemple 1, 2, 3, ..., correspondent aux intervalles [0,5; 1,5], [1,5; 2,5], [2,5; 3,5], ... Étant donné qu'une distribution normale est continue, alors P(7 faces) :

- dans une distribution binomiale = P(6,5 ≤ faces ≤ 7,5) = 0,19336
- dans une distribution normale = normalcdf(6,5; 7,5; 6, ...) = 0,19318, qui diffère de la valeur binomiale réelle de 0,19336 – 0,19318 = 0,00018 seulement. Ainsi, l'approximation est très adéquate.

Exemple 2

On lance un dé non truqué 60 fois. Utilise une approximation normale pour calculer la probabilité d'obtenir :

a) 10 cinq

b) au plus 10 cinq

c) moins de 10 cinq

d) entre 8 et 12 cinq

e) de 8 à 12 cinq

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Détermine l'intervalle normal qui serait utilisé pour trouver de façon approximative les probabilités binomiales suivantes :
   a) P(60 < x < 70)
   b) P(x ≥ 25)
   c) P(x < 25)
   d) P(638 < x ≤ 700
   e) P(3 ≤ x ≤ 4)
   f) P(17 ≤ x < 20)
   g) P(x = 10)

2. On sait que 30 % des objets fabriqués par la compagnie Mauvais gadgets sont défectueux. Si 1 200 de ces gadgets sont choisis, quelle est la probabilité que plus de 500 seront défectueux?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

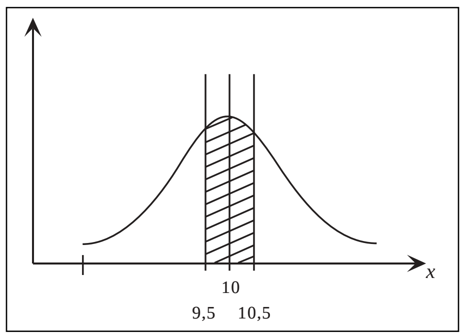
Solution

$$np = 60\left(\frac{1}{6}\right) = 10 > 5 \text{ et } nq = 60\left(\frac{5}{6}\right) = 50 > 5$$

Par conséquent, l'approximation normale peut être utilisée. De plus,

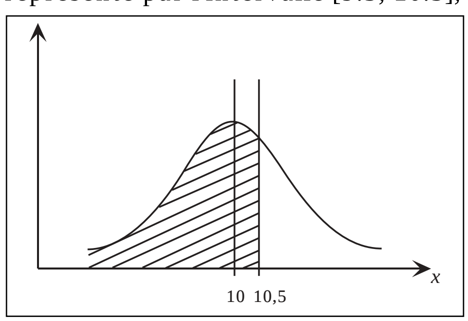
$$\mu = np = 10 \text{ et } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\left(\frac{5}{6}\right)} = 2{,}89.$$

a) P(10 cinq) = P(9,5 ≤ cinq ≤ 10,5) =
normalcdf(9.5, 10.5, 10, 2,89) = 0,13736



b) P(cinq ≤ 10) = P(–1E99 ≤ cinq ≤ 10,5) =
normalcdf(–1E99, 10.5, 10, 2.89) = 0,56868

Remarque : La limite supérieure étant 10,5, le nombre 10, représenté par l'intervalle [9.5, 10.5], est inclus.



– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Une distribution binomiale, x, a une moyenne μ et un écart type σ. Décris, en tes propres mots, comment tu pourrais calculer de façon approximative $P(a < x < b)$ à l'aide de l'approximation normale. Tiens pour acquis que $np > 5$ et $nq > 5$.

Problèmes

1. Si tu lances 2 dés non truquées 10 000 fois, trouve la probabilité d'obtenir une somme de 8 entre 1 350 et 1 400 fois.
2. Le bon vieux Harry, le meilleur vendeur d'autos d'occasion chez la Ville de l'auto, vend une automobile à 30 % des consommateurs qu'il rencontre. Si Harry rencontre 2 300 consommateurs, quelle est la probabilité qu'il vende au moins 700 voitures?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

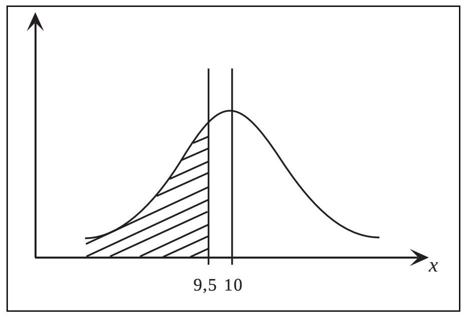
• **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

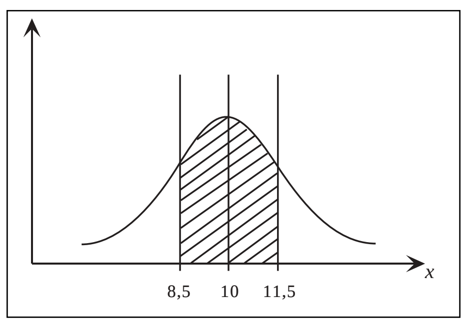
c) P(cinq < 10) = P(–1E99 ≤ cinq ≤ 9,5) =
normalcdf(–1E99, 9.5, 10, 2.89) = 0,43132

Remarque : La limite supérieure étant 9,5, le nombre 10, représenté par l'intervalle [9,5; 10,5], est exclu.



d) P(8 < cinq < 12) = P(8,5 < cinq < 11,5) =
normalcdf(8.5, 11.5, 10, 2.89) = 0,39626

Remarque : La limite inférieure étant 8,5, le nombre 8 est exclu, et la limite supérieure étant 11,5, le nombre 12 est aussi exclu.



Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

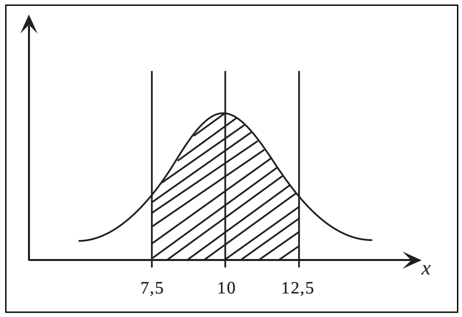
- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

e) P(8 ≤ cinq ≤ 12) = P(7,5 ≤ cinq ≤ 12,5) = normalcdf(7.5, 12.5, 10, 2.89) = 0,61299

Remarque : La limite inférieure est 7,5, afin d'inclure le nombre 8, et la limite supérieure est 12,5, afin d'inclure le nombre 12.



- **construire des intervalles de confiance pour la population**

Dans cette section, les statistiques relatives à un échantillon sont utilisées pour faire des prédictions sur la moyenne de la population. Cette partie du cours de statistique est appelée ***statistique inférentielle***.

Si la prédiction de μ doit être sûre 95 % du temps, trouve l'intervalle $[a, b]$ tel que $\mu \in [a, b]$ 95 % du temps. Si elle doit être sûre 99 % du temps, trouve l'intervalle $[c, d]$ tel que $\mu \in [c, d]$ 99 % du temps.

Les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ sont les intervalles de confiance de 95 % et de 99 % pour la moyenne de la population. Ces ***intervalles de confiance*** sont ceux que les statisticiens utilisent le plus souvent. Les nombres réels appartenant à un intervalle de confiance, par exemple a et b de $[a, b]$, sont appelés les ***limites de confiance***.

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu**

Le ***théorème de la limite centrale*** énonce que :

Si la taille de l'échantillon, n, est importante ($n \geq 30$), la distribution des moyennes des échantillons, $\overline{x}$, forme une distribution normale approximative qui a les caractéristiques suivantes :
a) moyenne = μ, et
b) écart type = $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Le théorème de la limite centrale peut être utilisé pour trouver l'intervalle de confiance de 95 % de la moyenne de la population, μ, comme suit :

- On utilise les cotes z pour une distribution normale ***standard***. Par conséquent,

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

où $\overline{x}$ est une moyenne de l'échantillon quelconque, μ est la moyenne des moyennes et, selon le théorème de la limite centrale, la population n est la taille de l'échantillon et σ est l'écart type de la population.

- Un intervalle de confiance de 95 % suppose que $z \in [-1.96, 1.96]$. Par conséquent,

$$-1,96 \leq z \leq 1,96$$

$$-1,96 \leq \frac{\overline{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \leq 1,96$$

$$-1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \overline{x} - \mu \leq 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$-\overline{x} - 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq -\mu \leq -\overline{x} + 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{x} + 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq \mu \geq \overline{x} - 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

ou l'intervalle de confiance de 95 % de μ est

$$\left[\overline{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Si on poursuit le raisonnement, on pourrait déduire qu'un intervalle de confiance de 99 % de μ est :

$$\left[\overline{x} - 2,58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une population a un écart type de 5 et une moyenne μ inconnue. Trouve :

a) l'intervalle de confiance de 95 % de μ si la moyenne d'un échantillon de taille 45 est de 30;

b) l'intervalle de confiance de 95 % de μ si la moyenne d'un échantillon de taille 80 est de 30.

Donne tes commentaires sur les différentes réponses possibles en (a) et en (b).

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– suite

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Liens** | Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu (suite)**

Exemple

a) Trouve l'intervalle de confiance de 95 % de la moyenne de la population, μ, si $\sigma = 9$ et si un échantillon de taille 49 a une moyenne de 50.

b) Répète le même processus pour trouver l'intervalle de confiance de 99 %.

Solution

a) Si tu poses un intervalle de confiance de 95 %, tu obtiens :

$$\left[\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[50 - 1{,}96\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right), 50 + 1{,}96\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right)\right]$$

$$= [50 - 2{,}52;\ 50 + 2{,}52] = [47{,}48;\ 52{,}52]$$

La moyenne de la population se situe entre 47,48 et 52,52, 95 % du temps.

b) Si tu considères un intervalle de confiance de 99 %, tu obtiens :

$$\left[\bar{x} - 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[50 - 2{,}58\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right), 50 + 2{,}58\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right)\right]$$

$$= [50 - 3{,}32;\ 50 + 3{,}32] = [46{,}68;\ 53{,}32]$$

À l'aide de la calculatrice TI-83, les intervalles ci-dessus peuvent être calculés directement et très rapidement. Suis les étapes suivantes pour calculer l'intervalle de confiance de 95 % demandé à l'exemple 1.

1. Appuie sur STAT et déplace le curseur vers TESTS.
2. Sélectionne 7:Zinterval ....
3. Sur la ligne Inpt: Data Stats line, choisis Stats.
4. Inscris les données suivantes :

   σ : 9

   x : 50

   n : 49

   C-Level (niveau C) : 0,95

5. Place le curseur sur le mot Calculate et appuie sur ENTER.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans cette question, suppose que l'écart type de la population est le même que l'écart type des échantillons.

Dans une usine, la taille des hommes suit une distribution normale dont l'écart type est 8 cm.

a) Quel est l'intervalle de confiance de 95 % de la taille moyenne si un échantillon aléatoire de 36 hommes nous donne une taille moyenne de 169 cm?

b) Quel est l'intervalle de confiance de 95 % de la taille moyenne si un échantillon aléatoire de 225 hommes nous donne une taille moyenne de 169 cm?

c) Commente les réponses à (a) et à (b) ci-dessus.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu (suite)**

  Tu devrais obtenir Zinterval

(47,48, 52,52)	concorde avec la réponse à
$\overline{x}$: 50	l'exemple 1
n : 49	

  Suis les mêmes étapes pour trouver l'intervalle de confiance de 99 % en utilisant l'option C-Level : 0.99. Tu obtiendras une réponse plus précise que la valeur arrondie obtenue avec la valeur 2,58 à l'exemple 2.

  Réponse : [46,688, 53,312]

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES