Unité E
Permutations, combinaisons et théorème du binôme

PERMUTATIONS, COMBINAISONS ET THÉORÈME DU BINÔME

Dans cette unité, les élèves :

- utilisent la notation factorielle ainsi que les principes du dénombrement pour résoudre des problèmes;
- déterminent le nombre de permutations de *n* objets distincts pris *r* à la fois et utilisent le résultat pour résoudre des problèmes;
- déterminent le nombre de combinaisons de *n* objets distincts pris *r* à la fois, et utilisent le résultat pour résoudre des problèmes;
- font la distinction entre les permutations et les combinaisons;
- utilisent le développement du binôme pour résoudre des problèmes.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'expliquer les principes de l'addition et de la multiplication et de faire des liens avec les diagrammes de Venn et les diagrammes en arbre;
- de faire le lien entre ces concepts et la résolution de probabilités théoriques;
- d'analyser des situations qui leur permettent de faire la différence entre les permutations et les combinaisons;
- de démontrer les divers types de permutations (circulaire, répétition du même objet);
- de faire le lien entre les permutations et les combinaisons et les principes fondamentaux du dénombrement;
- d'organiser des développements de binômes;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples, qui fait appel à un « calcul mental », les enseignants devraient réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe E-1) :

- la multiplication de polynômes

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

Durée

- 15 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Résoudre des problèmes de dénombrement d'ensembles, en utilisant des techniques telles que le principe fondamental du dénombrement, les permutations et les combinaisons

Résultat(s)d'apprentissage spécifique(s)

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes E-2 à E-6, p. E-40 à E-44).

- **utiliser les principes du dénombrement pour résoudre des problèmes**

Les méthodes de dénombrement sont utilisées pour compter les éléments d'un ensemble donné et les résultats d'un événement. Il s'agit d'un concept fondamental de la résolution des probabilités théoriques.

Les élèves ont déjà abordé certains problèmes de dénombrement dans le cours Mathématiques pré-calcul - Secondaire 3 quand ils ont utilisé les diagrammes de Venn. Ils verront ici une autre technique, soit le diagramme en arbre. L'exemple suivant permettra de présenter des notions élémentaires.

Exemple

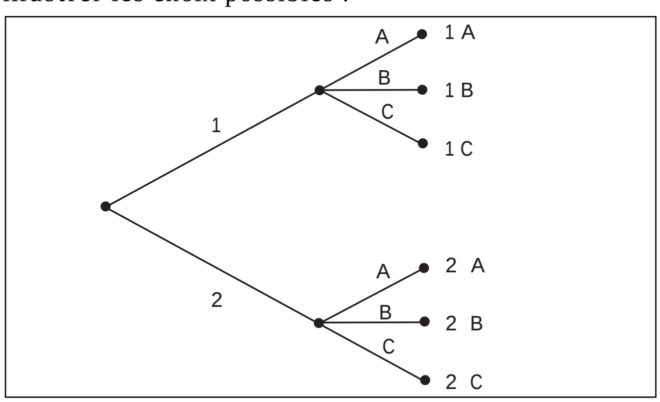
Un magasin qui vend des armoires de cuisine propose deux styles d'armoires et trois finis. Combien d'ensembles d'armoires différents sont possibles?

Solution

Discutez avec les élèves du fait qu'ils ont deux décisions à prendre :

1. Quel style choisir? Le style 1 ou le style 2? Il existe deux choix possibles pour cette décision.
2. Quel fini choisir? Le fini A, le fini B ou le fini C? Il existe trois choix possibles pour cette décision.

Le diagramme en arbre est très couramment utilisé pour illustrer les choix possibles :



Le dénombrement des points aux extrémités des branches de droite nous donne les six choix possibles pour les deux décisions.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscription au journal

Explique ce que représente un diagramme en arbre et pourquoi il nous aide à dénombrer le nombre de façons dont une série d'événements se produit.

Problème

Résous le problème suivant en utilisant un diagramme en arbre.

Mélissa envisage de se rendre de Winnipeg à Vancouver en passant par Calgary. Elle sait qu'elle peut emprunter trois routes différentes entre Winnipeg et Calgary, et deux routes entre Calgary et Vancouver. Combien existe-t-il de routes « aller-retour » différentes entre Winnipeg et Vancouver, en passant par Calgary, et combien de routes permettent de retourner à Winnipeg en passant par Calgary si on utilise une route seulement une fois?

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs, Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçons 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir le principe fondamental du dénombrement (multiplication)**

Cette méthode illustre le principe fondamental du dénombrement. On peut aussi l'appeler le principe de la multiplication, qui suppose des énoncés « ET ».

Définition : Supposons qu'un événement K puisse se produire de k façons et que, après la réalisation de cet événement, l'événement M puisse se produire de m façons. Le nombre de façons dont les événements K et M peuvent se produire équivaut à km façons.

On peut étendre cette formule pour ***inclure*** un nombre quelconque de décisions successives. Dans l'exemple ci-dessus, les élèves peuvent illustrer les deux décisions liées aux armoires par deux espaces vides.

$\underline{\quad 2 \quad}$ $\underline{\quad 3 \quad}$ = 6 styles et finis différents

Décision 1 — 2 choix
Décision 2 — 3 choix

Exemple

a) Combien de nombres à 3 chiffres différents peut-on construire en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sans les répéter?
b) Combien de nombres à trois chiffres seront pairs?
c) Combien de nombres à trois chiffres seront impairs?
d) Combien de nombres à trois chiffres seront supérieurs à 300?

Solution

a) $\underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } = 210$

b) Rappelez aux élèves qu'ils doivent tout d'abord tenir compte des restrictions en premier lieu : le dernier chiffre devant être pair, il y a 3 choix (2, 4, 6).

$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\ 3\ }$

Il faut placer six chiffres dans deux espaces.

$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 90$

c) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Amenez les élèves à découvrir qu'ils auraient pu, pour trouver le nombre de nombres impairs, soustraire du total obtenu en (a) le nombre de nombres pairs trouvé en (b). Cette méthode est possible quand des événements complémentaires se produisent.
Le diagramme de Venn qui suit illustre les propriétés de la complémentarité. Les éléments inscrits dans le cercle A ont la propriété A, alors que ceux qui sont à l'extérieur du cercle A mais à l'intérieur de l'ensemble de tous les éléments possibles n'ont pas la propriété A.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Tu achètes une voiture chez un concessionnaire qui t'offre sept couleurs différentes, trois modèles de moteur et deux types de transmission. Combien de voitures le concessionnaire doit-il garder en stock pour être à même d'offrir un modèle de chaque type?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

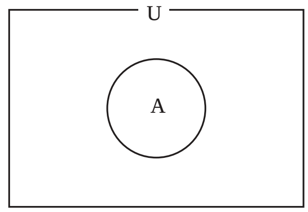
E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir le principe fondamental du dénombrement (multiplication) (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite



d) $\underline{5} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} = 150$

- **présenter la notation factorielle**

Exemple 1

Dans combien d'ordres différents peux-tu faire jouer quatre disques compacts?

Solution

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$

Ce schéma de multiplication qui commence par 4 est exprimé par la formule 4!, et se lit « factorielle 4 ».

En règle générale, la factorielle n est donnée par la formule $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Exemple 2

Démontre que :

a) $5! + 4! = 6 \cdot 4!$

b) $(k+1)! + k! = (k+2)k!$

Solution

a) Membre gauche : $5! + 4! = 120 + 24$
$= 144$

Membre droite : $6 \cdot 4! = 6\,(24)$
$= 144$

b) Membre gauche : $(k+1)! + k!$
$(k+1)k! + k!$
$k!\,(k+1+1)$
$(k+2)k!$
$\therefore$ membre gauche = membre droite

Remarque : $0! = 1$.

Utilise la calculatrice à affichage graphique pour calculer les factorielles qui sont des grands nombres. Sur la calculatrice TI-83, sélectionne $\boxed{\text{MATH}} \rightarrow \boxed{\text{PRB}}\ \boxed{4}$.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Simplifie : $\frac{11!}{9!}$
2. $\frac{8!}{9!}$
3. De combien de façons différentes deux personnes peuvent-elles être assises sur sept chaises?
4. De combien de façons trois pièces de monnaie peuvent-elles être choisies parmi cinq pièces? (Exprime la réponse sous forme factorielle).

Problème

Combien de multiples de 5 comportant 4 chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 5, 7, 9, 0 si aucune répétition n'est permise?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
| Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **expliquer le principe de dénombrement par addition, qui suppose des énoncés « OU »**

  Quand deux événements se produisent de façon indépendante, il faut additionner les résultats pour obtenir le nombre total de façons dont un événement peut se produire. Pour ce faire, il faut illustrer les deux situations de façon distincte et faire l'addition pour obtenir le nombre total.

Exemple 1

Combien de nombres entiers sont inférieurs à 300? (Aucune répétition possible)

Solution

Nombres à 3 chiffres $\underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 8\ } = 144$

(2 ou 1)
(2, 9, et 8 représentent le nombre de choix parmi les chiffres pour chacune des positions possibles) ***ou***

Nombres à 2 chiffres $\underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 9\ } = 81$ ***ou***

Nombres à 1 chiffre $\underline{\ 10\ } = 10$

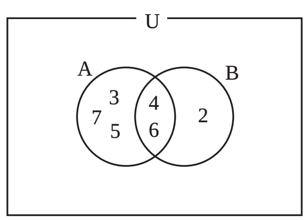
Total : 144 + 81 + 10 = 235 nombres (principe de l'addition)

Exemple 2

Combien de nombres à 3 chiffres différents, pairs et supérieurs à 300, peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7?

Solution

Le diagramme de Venn ci-dessous illustre pourquoi cette question exige un dénombrement cas par cas. Le cercle A contient tous les chiffres pouvant occuper la première position qui sont une solution possible du problème, alors que le cercle B contient tous les chiffres pouvant occuper la dernière position qui sont une solution possible du problème. Étant donné que les cercles contiennent les éléments 4 et 6 en commun, le dénombrement devrait être effectué pour trois cas distincts.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Simplifie : $\dfrac{7!(r+1)!}{6!(r-1)!r}$
2. Simplifie : $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
3. $\dfrac{(a-1)!}{(a+1)!}$

Problèmes

1. Combien de nombres entiers ne contenant pas de chiffres répétés y a-t-il entre 1 et 1000 inclusivement?
2. Prouve :

$$\frac{k!}{(r-1)!(k-(r-1))!} + \frac{k}{r!(k-r)!} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

2. Démontre que $\dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{(n-r+1)}{r} \cdot \dfrac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

- **expliquer le principe du dénombrement par addition, qui suppose des énoncés « OU » (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

Cela illustre le principe de l'addition : le problème comporte deux restrictions et il faut établir des cas.

Cas 1 : Le dernier chiffre est 2.

$\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 25$

Cas 2 : Le dernier chiffre est 4.

$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 20$

Cas 3 : Le dernier chiffre est 6.

$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 20$

Total : 25 + 20 + 20 = 65 nombres (principe de l'addition)

E-2 déterminer le nombre de permutations possibles de *n* objets distincts pris *r* à la fois, et utiliser le résultat pour résoudre des problèmes

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

- **définir une permutation**

Une permutation d'un ensemble d'objets distincts est un arrangement ordonné de ces objets. Pour effectuer la permutation d'un ensemble d'objets, il faut les réorganiser.

Ainsi, si on fait une permutation des lettres CAT, on obtient les six permutations suivantes : CAT, CTA, ACT, ATC, TAC et TCA.

Le nombre de façons dont on peut placer *n* objets dans *r* positions disponibles, soit ${}_nP_r$ ou $P(n, r)$, est donné par la formule suivante :

$${}_nP_r \text{ ou } P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple 1

Des lettres sont inscrites sur des fiches. Eva a tiré les lettres A, W, L, N, S, O et D. Combien de permutations de quatre de ces lettres sont possibles?

Solution

Il faut trouver le nombre de permutations de 7 objets distincts pris 4 à la fois, soit 7P4 ou P(7, 4), qui peut être évalué dans le menu $\boxed{\text{MATH}} \rightarrow \boxed{\text{PRB}}$ de la calculatrice TI-83 ou avec les factorielles.

$${}_7P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. De combien de façons trois élèves peuvent-ils être assis devant six pupitres?
2. Le restaurant Pizzas Poppies offrent deux choix de salades, quatre choix de desserts et huit choix de pizzas. Combien de repas de trois services sont possibles?

Inscriptions au journal

1. Explique la signification de ${}_8P_3$. Pourquoi ${}_3P_8$ n'aurait-il aucun sens?
2. Que représente ${}_nP_n$? Explique pourquoi ${}_nP_n = n!$.
3. Janice a remarqué que, si elle ajoute un s à la fin d'un mot qui n'avait pas de s auparavant, le nombre de permutations reconnaissables triple. Que peut-on déduire au sujet du mot original?

Problèmes

1. De combien de façons cinq personnes peuvent-elles s'asseoir dans trois pupitres?
2. De combien de façons quatre couples mariés peuvent-ils être assis sur un banc de parc si les conjoints doivent être assis côte à côte?
3. Trouve algébriquement la valeur de n : ${}_{(n-1)}P_2 = 72$.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçons 2, 3 et 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de *n* objets différents pris *r* à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
- suite

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie | ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une permutation (suite)**

Remarque : On peut aussi utiliser le principe élémentaire du dénombrement, p. ex., $\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 840$ permutations.

Exemple 2

De combien de façons 3 élèves de 4e secondaire, 3 élèves de 3e secondaire, 4 élèves de 2e secondaire et 2 élèves de 1re secondaire peuvent-ils être assis en rangée, si un élève de 4e secondaire doit être assis à chaque extrémité de la rangée?

Solution

$$\underline{3}\ \underbrace{\underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}_{\text{10 personnes asseoir}}\ \underline{2}$$

Nombre de façons = 3 · 2 · 10! = 21 772 800

Remarque : Encouragez les élèves à utiliser la méthode des espaces vides quand les permutations comportent des restrictions.

- **résoudre des équations sur les permutations**

Exemple

Résous ${}_nP_2 = 30$.

Solution

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$n^2 - n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow$$

$(n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow n = 6,\ n = -5$ (rejeté car $n \geq 0$)

alors, ${}_6P_2 = 30$

ou

$${}_nP_2 = n(n-1)$$

$$n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n+5) = 0$$

$n = 6$ ou $n = -5$ (rejeté parce que $n \geq 0$)

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calculs mentaux

1. Évalue ${}_{100}P_2$.
2. Si on veut former des « mots » de trois lettres avec le mot OLYMPIQUE, combien a-t-on de choix pour la troisième lettre?

Problèmes

1. Pendant que Jeanne mange son sandwich au fromage, elle feuillette distraitement son dictionnaire. Son regard s'arrête sur un mot et elle se rend compte qu'elle pourrait arranger les lettres du mot de $\frac{6!}{3!}$ façons. Trouve un mot qui a cette propriété.
2. Trouve le nombre de façons dont on peut placer huit livres différents sur une tablette si trois de ces livres doivent être placés ensemble.
3. Trouve la valeur de n :

$$\frac{(n+3)!}{n!} = 24$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de *n* objets différents pris *r* à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **compter le nombre d'arrangements possibles de certains objets**

En règle générale, s'il faut placer des objets ensemble, on peut compter les arrangements possibles en multipliant la factorielle du nombre de groupes par la factorielle de chacun des groupes.

Exemple

Cinq personnes, nommées A, B, C, D, E, sont assises sur un banc. De combien de façons peuvent-elles être assises si :

a) les personnes A et B veulent être assises ensemble?

b) les personnes A et B ne doivent pas être assises ensemble?

c) les personnes A et C sont assises ensemble, de même que les personnes B et E?

Solution

a) Il y a quatre groupes : AB, C, D et E. Par conséquent, 4!2!1!1!1! ou 4!2! = 48 façons.

Remarque : 1! représente un groupe d'une seule personne, on ne l'exprime pas en règle générale.

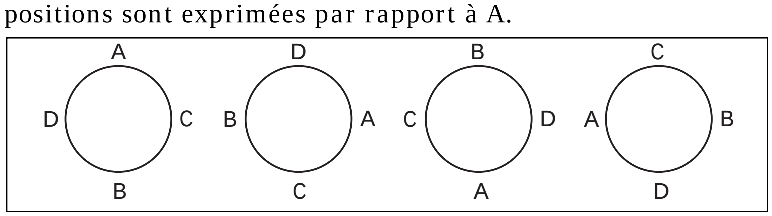
b) Tous les groupes possibles – A et B ensemble = 5! – 4!2! = 120 – 48 = 72 façons.

Remarque : Ces permutations du type « pas possible » sont importantes!

c) Il y a trois groupes : AC, BE et D. Par conséquent, 3!2!2!1! = 24 façons.

• **dénombrer des permutations circulaires**

Dans les permutations circulaires, il n'existe pas de première et de dernière position. Dans un cercle, la position est toujours déterminée par rapport aux autres éléments contenus dans le cercle. Par conséquent, toutes les permutations suivantes sont les mêmes, parce que B est à l'opposé de A, C est à droite de A et D est à gauche de A. Faites remarquer que toutes les positions sont exprimées par rapport à A.



Pour trouver toutes les permutations possibles de quatre personnes désignées par les lettres A, B, C et D, il faut considérer que la personne A, par exemple, se déplace vers l'aire désignée et qu'elle est au début du cercle. Cette personne a un seul choix : commencer le cercle. À mesure que les autres personnes entrent dans le cercle, elles peuvent choisir une position par rapport à la personne A (elles peuvent se placer à l'opposé de A, à sa droite ou à sa gauche).

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

De combien de façons différentes quatre filles et deux garçons peuvent-ils être assis autour d'une table ronde?

Problème

De combien de façons différentes cinq personnes peuvent-elles être assises autour d'une table ronde si on compte sept chaises?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental Technologie ✔ **Visualisation**

- **dénombrer des permutations circulaires (suite)**

Supposons que la personne A commence le cercle et que les autres personnes entrent dans le cercle par ordre alphabétique. Ainsi, la personne B peut choisir parmi les trois positions énoncées ci-dessus. Une fois que la personne B s'est placée dans le cercle, il reste deux positions possibles pour la personne C par rapport à la personne A. Une fois que B et C se sont placées, il ne reste plus qu'une position pour la personne D.

Le nombre de permutations de n objets dans un cercle est $(n – 1)!$.

Exemple 1

Combien de permutations circulaires peux-tu former (laisse les réponses sous forme factorielle) :
a) avec 10 objets?
b) avec 100 objets?

Solution

a) $(10 – 1) = 9!$

b) $(100 – 1) = 99!$

Exemple 2
De combien de façons différentes cinq personnes, nommées A, B, C, D et E, peuvent-elles être assises autour d'une table ronde si :
a) A et B doivent être assises l'une à côté de l'autre?
b) A et B ne peuvent être assises l'une à côté de l'autre?
c) A et B doivent être assises ensemble, de même que C et D?

Solution
c) Il y a 4 groupes, soit AB, C, D, E, qui doivent s'asseoir autour d'une table ronde : $(4 – 1)! = 3!$.

Une fois que les positions des groupes ont été décidées, les personnes A et B peuvent changer de place.

Par conséquent, on compte $3!2! = 6\ (2) = 12$ façons.

b) Toutes les positions possibles – le nombre de façons dont A et B peuvent être assises ensemble $= 4! – 3!2! = 24 – 12 = 12$ façons.

c) On compte trois groupes, soit AB, CD et E qui doivent s'asseoir en cercle, avec deux paires.

Il y a $2!2!2! = 8$ façons.

Cet exemple nous donne une combinaison de permutations circulaires et groupées.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents pris r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dénombrer le nombre de permutations d'objets identiques**

  Soit un ensemble de n objets parmi lesquels on trouve j exemplaires d'un type, k exemplaires d'un second type et m exemplaires du troisième type. Le nombre de permutations reconnaissables est

$$\frac{n!}{j!k!m!}.$$

Exemple 1

Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former avec les chiffres 46164?

Solution

$$\frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ nombres}$$

Exemple 2

Combien de permutations sont possibles avec les lettres du mot MISSISSIPPI?

Solution

$$\frac{11!}{4!4!2!} = 34\ 650$$

Exemple 3

Dans un test contenant 12 questions à choix multiples, trois réponses sont A, trois sont B, trois sont C et trois sont D. Combien de corrigés différents sont possibles?

Solution

$$\frac{11!}{3!3!3!3!} = 369\ 600$$

Exemple 4

Combien de nombres comprenant au plus 3 chiffres différents peuvent être formés avec les chiffres 0 à 9 inclusivement?

Solution

Nombres à 1 chiffre :	$\underline{10}$	= 10
Nombres à 2 chiffres :	$\underline{9}\ \underline{10}$	= 90
Nombres à 3 chiffres :	$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}$	= 900
Total :		= 1000

Remarque : Le chiffre zéro ne peut être placé au début des nombres à deux et à trois chiffres.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Combien d'arrangements différents peut-on former avec les lettres du mot RELEVEUR? Exprime la réponse sous forme de factorielle.

2. Combien de permutations sont possibles avec les lettres du mot BARABABYBAR, si on n'utilise pas l'un des B?

Choix multiples

Trouve le nombre de façons dont huit livres différents peuvent être placés sur une tablette si trois des livres doivent se trouver ensemble.

a) 4 320

b) 40 320

c) 241 920

d) 6 720

Problèmes

1. Soit les lettres du mot ÉLÉMENTS. Combien de « mots » de cinq lettres peux-tu former en faisant alterner les voyelles et les consonnes?

2. Henri, Pierre et quatre filles sont assis en rangée. Henri ne peut pas s'asseoir au bout de la rangée. De combien de façons peuvent-ils être placés?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-2 déterminer le nombre de permutations de *n* objets différents pris *r* à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

- **dénombrer le nombre de permutations d'objets identiques (suite)**

  Exemple 5

  Combien de porte-clés différents peut-on former avec quatre clés de couleurs différentes?

  Solution

  $$\frac{3!}{2!}$$

  Il faut diviser par deux parce que la face arrière et la face avant du porte-clés représentent un seul arrangement possible.

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de *n* objets distincts pris *r* à la fois et utiliser le résultat pour résoudre des problèmes

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

- **définir une combinaison**

  Toute sélection dans laquelle l'ordre n'intervient pas est appelée une ***combinaison***.

  On pourrait utiliser la notation $C(n, r)$, ${}_nC_r$, ou $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ pour indiquer des combinaisons de *n* objets pris *r* à la fois.

- **faire la distinction entre le nombre de permutations et celui de combinaisons**

  Le nombre de choix et d'arrangements possibles parmi des objets s'appelle une ***permutation*** (deux actions).

  Le nombre de choix possibles parmi des objets s'appelle une ***combinaison*** (seulement une des deux actions ci-dessus est effectuée).

  Il y a $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ permutations de *n* objets pris *r* à la fois.

  Étant donné qu'on peut arranger un groupe de *r* objets de *r*! façons, chaque combinaison d'objets pris *r* à la fois donne *r*! permutations.

  Pour déterminer le nombre de combinaisons possibles de *n* objets pris *r* à la fois, il faut diviser le nombre de permutations de *n* objets pris *r* à la fois par *r*!.

  Voici une formule générale qui donne le nombre de combinaisons de *n* objets distincts pris *r* à la fois :

  $$C(n,\ r) \text{ ou } {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} \text{ ou } {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. De combien de façons peut-on choisir trois pièces de monnaie parmi cinq pièces? (Exprime la réponse sous forme de factorielle).
2. De combien de façons trois élèves peuvent-ils être assis devant six pupitres?
3. Un comité de trois personnes est formé parmi trois garçons et trois filles. Combien de façons sont possibles si le comité doit comprendre deux garçons et une fille?
4. Évalue $({}_4C_3)^2$.

Choix multiples

1. Laquelle des formules suivantes est toujours correcte si $r > 1$ et $n > r$?

   a) ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ c) ${}_nC_n = 1$

   b) ${}_nC_n = 0$ d) ${}_nC_1 = n!$

2. De combien de façons quatre élèves peuvent-ils être assis dans une rangée de sept pupitres?

   a) ${}_7P_4$ b) ${}_7C_4$ c) 7! d) 4!

Inscription au journal

Explique la différence entre la valeur de ${}_nC_5$ et celle de ${}_nP_5$.

Problèmes

1. Trouve la valeur de n : ${}_nC_3 = 3({}_nP_2)$.

2. Démontre le lien : ${}_nC_{r+1} = \dfrac{n-r}{r+1}\,{}_nC_r$, où $0 \le r \le n$.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance,Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de n objets différents pris r à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **faire la distinction entre le nombre de permutations et le nombre de combinaisons (suite)**

Exemple 1

Dans un groupe de cinq représentants des élèves, trois seront choisis pour siéger au Comité des fêtes.

a) Dresse la liste de toutes les possibilités pour la composition des comités.

b) Calcule ${}_5C_3$ et compare ta réponse à celle obtenue en (a).

c) Si Jeanne, l'une des élèves, doit être la présidente, combien de comités sont possibles?

Solution

a) Les élèves sont représentés par A, B, C, D, E.

Comités possibles : ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

b) Le nombre de permutations des personnes prises 3 à la fois est ${}_5P_3 = \frac{5!}{2!} = 60$ façons. Cependant, une permutation comporte deux actions : (i) ***choisir trois personnes*** et (ii) ***les classer de façon différente***. Cependant, la tâche consiste uniquement à choisir trois personnes. L'ordre n'est pas important parce que les permutations ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA formeront le même comité. Par conséquent, le nombre de choix correspond au nombre de façons de choisir et de classer les personnes, divisé par le nombre de façons de classer trois personnes.

(choix et classement)

$$\frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{60}{6} = 10 \longleftarrow \text{(choix seulement)}$$

(classement)

c) Pour résoudre ce problème, il suffit de placer Jeanne dans tous les comités (soit 1C1), puis de choisir 2 autres personnes parmi les quatre élèves qui restent : 4C2 = 6 comités.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Combien de mots de quatre lettres peuvent être formés avec les lettres du mot ALGÈBRE?

2. Montre comment tu pourrais calculer le nombre de bracelets différents que tu peux créer en choisissant cinq perles parmi huit perles de couleurs différentes.

3. Tu dois asseoir douze personnes autour de deux tables circulaires; autour de la première table se trouvent sept chaises et cinq chaises entourent l'autre table. De combien de façons peux-tu y arriver?

4. Joan organise un dîner où elle invitera six de ses neuf meilleurs amis.
   a) De combien de façons peut-elle choisir six invités?
   b) De combien de façons peut-elle choisir six invités si Bill et Marie refusent d'assister au dîner ensemble?

5. Combien de « mots » de trois lettres peuvent être formés avec les lettres du mot OCTOBRE?

6. Combien de jeux de 5 cartes peuvent être formés avec un paquet de 52 cartes, si les jeux contiennent 1 paire et 3 cartes de la même valeur?

7. Évalue : ${}_{(n+1)}C_{(n-1)} = 28$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de *n* objets différents pris *r* à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **faire la distinction entre le nombre de permutations et le nombre de combinaisons (suite)**

Exemple 2

Au cribbage, une main comporte six cartes si deux personnes jouent.

a) Combien de mains différentes sont possibles?

b) Combien de mains comportent trois rois?

c) Combien de mains ne contiennent aucune figure?

Solution

a) ${}_{52}C_6$

b) Un jeu comporte 4 rois et 48 autres cartes. Par conséquent, la réponse est ${}_4C_3 \cdot {}_{48}C_3$.

c) Un jeu comporte 12 figures et 40 autres cartes. Par conséquent, ${}_{40}C_6$ mains sont possibles.

• **utiliser des combinaisons et le principe élémentaire du dénombrement pour résoudre des problèmes**

Exemple 1

On veux diviser un groupe de 20 élèves en trois sous-groupes. Si le groupe A doit compter cinq élèves, le groupe B huit et si le restant des élèves se retrouvent dans le groupe C, de combien de façons peut-on y arriver?

Solution

$$\underbrace{{}_{20}C_5}_{\text{groupe A}} \cdot \underbrace{{}_{15}C_8}_{\text{groupe B}} \cdot \underbrace{{}_{7}C_7}_{\text{groupe C}}$$

Exemple 2

Combien existe-t-il d'arrangements possibles si 12 personnes doivent s'asseoir autour de 2 tables rondes dans un restaurant? On trouve cinq chaises autour d'une table et sept autour de l'autre.

Solution

$$\underbrace{{}_{12}C_5}_{\text{choisir}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{placer}} \cdot \underbrace{{}_{7}C_7}_{\text{choisir}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{placer}}$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

2. Pour laquelle des expressions suivantes θ est-il défini?

   a) $\sin\theta = \dfrac{{}_nP_r}{{}_nC_r}$

   b) $\csc\theta = \dfrac{{}_nC_r}{{}_nP_r}$

   c) $\sec\theta = \dfrac{{}_nC_r}{{}_nP_r}$

   d) $\tan\theta = \dfrac{{}_nP_r}{{}_nC_r}$

2. Un comité comptant quatre garçons et trois filles doit être formé parmi six garçons et sept filles. Combien de comités sont possibles?

   a) $\dfrac{6!7!}{4!2!3!4!}$ b) $\dfrac{13!}{4!3!}$

   c) $\dfrac{13!}{7!6!}$ d) $\dfrac{13!}{4!2!3!4!}$

Problèmes

1. Quatre garçons et quatre filles ont décidé de sortir dîner dans un restaurant du coin. Il reste deux tables rondes de libres, l'une étant placée près de la fenêtre et l'autre au centre du restaurant. Chaque table compte quatre places.

   a) De combien de façons les huit personnes peuvent-elles être assises de façon aléatoire?

   b) De combien de façons peuvent-elles être assises si tous les garçons doivent s'asseoir à une table et toutes les filles à l'autre?

2. Un jeu ordinaire compte 52 cartes. Combien de mains de cinq cartes peuvent être formées si une main doit contenir deux paires de valeurs différentes? La cinquième carte doit être différente des deux paires.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de *n* objets différents pris *r* à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

• **utiliser des combinaisons et le principe du dénombrement fondamental pour résoudre des problèmes (suite)**

Exemple 3

Un comité de quatre personnes doit être formé parmi quatre filles et cinq garçons. De combien de façons la sélection peut-elle être effectuée si :

a) chaque comité doit compter au moins une fille?

b) chaque comité doit compter plus de filles que de garçons?

Solution

a) toutes les combinaisons possibles – aucune fille dans le comité

$$= {}_9C_4 - {}_5C_4 = \frac{9!}{5!4!} - \frac{5!}{4!1!} = 126 - 5 = 121$$

b) *Cas 1*, 4 filles

$${}_4C_4 = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

Cas 2, 3 filles et 1 garçon

$${}_4C_3 \cdot {}_5C_1 = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 4(5) = 20$$

On peut former 1 + 20 = 21 comités où les filles sont en majorité.

E-4 résoudre des problèmes en utilisant le théorème du binôme pour $(a + b)^n$, où *n* appartient à l'ensemble des nombres naturels

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

• **étudier les développements de binômes**

Demandez aux élèves de développer et de simplifier les binômes suivants :

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Amenez-les à tirer les conclusions suivantes sur les développements :

a) La somme des exposants est toujours égale à la puissance du binôme.

b) L'exposant du premier terme commence avec la même valeur que la puissance du binôme et décroî t de 1 dans chacun des termes suivants.

c) L'exposant du deuxième terme figure dans le deuxième terme du développement et augmente de 1 jusqu'à ce que la puissance du binôme soit atteinte.

d) Le développement comporte un terme de plus que la puissance du binôme.

e) Les coefficients sont des combinaisons de la puissance qui commence à C(*n*, 0) et qui se termine à C(*n*, *n*), et ils sont symétriques.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trouve les valeurs de a et de b si, dans le développement de $(ax + b)^5$, le coefficient du deuxième terme est 8 et celui du troisième terme est 1,5.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	**STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES**

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels

Communications — ✔ Liens — ✔ Estimation et Calcul Mental — Résolution — Raisonnement — Technologie — ✔ Visualisation

- **examiner les développements de binômes (suite)**

Exemple 1

Développe $(x + y)^7$ en utilisant le théorème du binôme.

Solution

a) Exprime le modèle des variables :

$$\_\_x^7y^0 + \_\_x^6y^1 + \_\_x^5y^2 + \_\_x^4y^3 + \_\_x^3y^4 + \_\_x^2y^5 + \_\_x^1y^6 + \_\_x^0y^7$$

b) Intègre les coefficients :

$$_7C_0 + {_7C_1} + {_7C_2} + {_7C_3} + {_7C_4} + {_7C_5} + {_7C_6} + {_7C_7}$$

$$\downarrow$$

$$\_\_x^7y^0 + \_\_x^6y^1 + \_\_x^5y^2 + \_\_x^4y^3 + \_\_x^3y^4 + \_\_x^2y^5 + \_\_x^1y^6 + \_\_x^0y^7$$

$$\downarrow$$

$$1x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + 1y^7$$

- **présenter le théorème du binôme**

$(x + y)^n = {_nC_0}x^ny^0 + {_nC_1}x^{n-1}y^1 + {_nC_2}x^{n-2}y^1 + \ldots {_nC_n}x^1y^{n-1} + {_nC_n}x^0y^n$

où n est tout nombre entier positif.

ou

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Voici des observations supplémentaires très importantes :

a) L'exposant du deuxième terme du binôme, dans le développement, correspond au nombre d'objets choisis pour former une combinaison. Par exemple,

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$ Ces nombres sont toujours les mêmes.

b) L'exposant du deuxième terme du binôme développé est un de moins que la position du terme. Par exemple :

p^e terme du développement de $(x + y)^n$ est $\binom{n}{p-1}x^{n-p+1}y^{p-1}$

c) Il faut se rappeler que la somme des exposants de tous les termes du développement de $(x + y)^n$ est n. Par exemple,

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \qquad n - k + k = n$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calculs mentaux

1. Exprime le binôme suivant sous forme de développement complet : $(x + y)^3$.

2. Quel est l'avant-dernier terme du développement de $(x + y)^7$?

3. Écris une expression qui constituerait le septième terme de $(2x - 3y)^8$.

Problèmes

1. Trouve le terme du développement x^5 de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^7$ qui contient x^5 et simplifie.

2. Résous : ${}_nC_4 = 35$.

3. Trouve et simplifie le troisième terme à partir de la fin du développement de $(2a - b)^{15}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **présenter le théorème du binôme (suite)**

Exemple 1

Développe et simplifie $(2x - y)^4$.

Solution

$${}_4C_0(2x)^4(-y)^0 + {}_4C_1(2x)^3(-y)^1 + {}_4C_2(2x)^2(-y)^2 + {}_4C_3(2x)^1(-y)^3 + {}_4C_4(2x)^0(-y)^4$$
$$= 1 \cdot 16x^4 \cdot 1 + 4 \cdot 8x^3(-y) + 1 \cdot 4x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot 2x(-y)^3 + 1 \cdot 1 \cdot y^4$$
$$= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

Remarque : Les élèves doivent savoir que la symétrie des coefficients est annulée et que les signes alternent.

- **trouver et simplifier un terme quelconque du développement d'un binôme**

Exemple 1

Trouve le onzième terme du développement de $(x - 2)^{13}$.

Solution

$${}_{13}C_{10}x^{13-10}(-2)^{10} = {}_{13}C_{10}x^3(-2)^{10} = 29\ 2864x^3$$

Demandez aux élèves de trouver un terme précis dans une expression binomiale.

Exemple 2

Trouve le terme du développement de $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^5$ qui contient x^4.

Solution 1

Les élèves n'ont pas à tenir compte des coefficients au début parce qu'ils doivent tout d'abord trouver le modèle de la variable. Une fois qu'ils ont trouvé le terme correct, ils peuvent résoudre l'ensemble du terme.

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$$

$${}_5C_0(x^2)^5 \Rightarrow x^{10}$$

$${}_5C_1(x^2)^4\left(-\frac{2}{x}\right)^1 \Rightarrow x^7$$

$${}_5C_2(x^2)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2 \Rightarrow x^4$$

Modèle : les exposants de la variable diminuent de 3 dans chaque terme.

Communications	Résolution
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Le $n^{\text{ième}}$ terme dans $(a^3 - c^5)^7$ a un coefficient numérique équivalent à ${}_7C_3$. Quelle est la valeur de n?

Problèmes

1. Trouve le coefficient numérique du terme qui contient x^{51} dans le développement de $\left(\frac{x^6}{2} - \frac{2}{x}\right)^{12}$.

2. a) Quel terme du développement de $\left(x^5 - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ contient x^{15}?

   b) Simplifie le terme qui contient x^{15}.

3. Calcule le terme dans le développement de $\left(3x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ qui ne contient pas de variable x.

4. Trouve la forme simplifiée du cinquième terme du développement de $(3x^2 - y)^8$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver et simplifier un terme quelconque du développement du binôme (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution 1 – suite

Le troisième terme contient x^4.

$${}_5C_2(x^3)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 40x^4$$

Solution 2

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$$

si on ne tient pas compte des coefficients

$$(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = x^4$$

$$\frac{x^{10-2r}}{x^r} = x^4$$

$$10 - 3r = 4$$

$$r = 2$$

$$\therefore\ {}_5C_2(x^2)^3\left(\frac{-2}{x}\right)^2$$

- **utiliser le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients numériques**

Les coefficients numériques du développement binomial de $(x + y)^n$ peuvent être exprimés au moyen d'un tableau triangulaire. Ce tableau est appelé ***triangle de Pascal***, d'après le réputé mathématicien Blaise Pascal. Pour former ce triangle, arrange dans un tableau triangulaire les coefficients numériques des développements binomiaux de $(x + y)^n$ pour les valeurs croissantes de n.

n	$(x + y)^n$	Coefficients
0	$(x + y)^0$	1
1	$(x + y)^1$	1 1
2	$(x + y)^2$	1 2 1
3	$(x + y)^3$	1 3 3 1
4	$(x + y)^4$	1 4 6 4 1
5	$(x + y)^5$	1 5 10 10 5 1
6	$(x + y)^6$	1 6 15 20 15 6 1
7	$(x + y)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Écris une expression pour le quatrième terme de $(x + y)^8$. Ne la simplifie pas.

Inscription au journal

1. Pour toute paire de nombres adjacents dans le triangle de Pascal, que remarques-tu au sujet de la valeur qui figure entre les deux mêmes nombres dans la rangée suivante? De quelle façon cela peut-il t'aider à ajouter des rangées au triangle de Pascal?

2. Décris deux modèles que tu peux remarquer dans un triangle de Pascal écrit selon la notation ${}_nC_r$.

3. Décris le lien qui existe entre le théorème du binôme et le triangle de Pascal.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients numériques (suite)**

  Un modèle intéressant émerge.

  - La première et la dernière entrée sont toujours 1.
  - Les coefficients sont les mêmes dans toutes les rangées, qu'on les lise de gauche à droite ou de droite à gauche.
  - À partir de la deuxième rangée du triangle, la somme de toute paire d'entrées adjacentes correspond à l'entrée qui figure « entre ces deux entrées » dans la rangée suivante.

    Par exemple, le 4 et le 6 dans la 5^e^ rangée produisent le nombre 10 dans la 6^e^ rangée; le 1 et le 5 dans la 6^e^ rangée produisent le 6 dans la 7^e^ rangée. Cependant, pour trouver une rangée de nombres, tu dois connaître les entrées de la rangée précédente dans le triangle. Cette méthode demeure toutefois assez efficace pour les binômes de petit exposant.

  Exemple

  Utilise le triangle de Pascal pour développer $(a + b)^5$.

  Solution

  Les coefficients numériques sont : 1 5 10 10 5 1

  Si on intègre les modèles d'exposants de a et de b, on obtient :

  $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES