Unité B
Transformations

TRANSFORMATIONS

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- décrivent les effets des translations, des réflexions, des étirements et des compressions à la verticale et à l'horizontale, des inverses ainsi que des opérations valeur absolue sur le graphique et d'autres propriétés d'une fonction particulière ou générale;
- tracent le graphique de fonctions qui contiennent les divers éléments des transformations d'une fonction ou d'un graphique;
- décrivent, énoncent les propriétés et tracent le graphique des réciproques de fonctions;
- tracent le graphique et énoncent les propriétés de fonctions définies par morceaux;
- écrivent les fonctions sous forme de composition de fonctions simples puis tracent le graphique;
- utilisent des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes;
- étudient les fonctions biunivoques et les fonctions paires et impaires.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- d'utiliser la calculatrice à affichage graphique ou un outil informatique pour étudier les effets des éléments de transformation sur une fonction donnée;
- de faire le lien entre les propriétés algébriques des fonctions et leur graphique;
- d'écrire les équations de fonctions à partir de graphiques et vice-versa;
- de représenter des situations réelles à l'aide de la théorie des fonctions périodiques;
- d'effectuer des activités d'apprentissage appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'apprentissage différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l ' annexe B-1) :
- la notation fonctionnelle
- l'équation d'une droite
- les fractions complexes

Matériel

- calculatrice à affichage graphique et logiciel graphique
- papier quadrillé
- réflecteur Mira

Durée

- 16 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Exécuter, analyser et créer des transformations de fonctions et de relations définies par des équations ou des graphiques.

Résultats d'apprentissage spécifiques

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes B-2 à B-13, p. B-77 à B-88).

- **définir une translation de fonction ou de relation**

Une translation est une transformation d'une figure géométrique telle que chacun des points est déplacé dans le même sens. Les élèves devraient être familiers avec les translations liées aux fonctions de base telles que les suivantes :

$y = x$	$y = x^3$
$y = x^2$	$y = \cos x$
$y = \sqrt{x}$	$y = \sin x$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = a^x$
$y = \lvert x \rvert$	$y = \log_a x$

Vous pourrez intégrer ces fonctions dans diverses unités du cours de mathématiques pré-calcul secondaire 4.

- **utiliser le graphique d'une fonction parent pour représenter une translation**

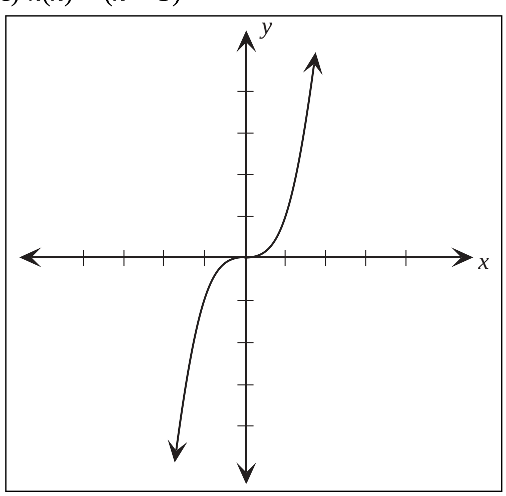
Exemple

Utilise le graphique de $f(x) = x^3$ pour représenter les fonctions suivantes :

a) $g(x) = x^3 - 2$

b) $h(x) = (x - 1)^3$

c) $k(x) = (x + 3)^3$



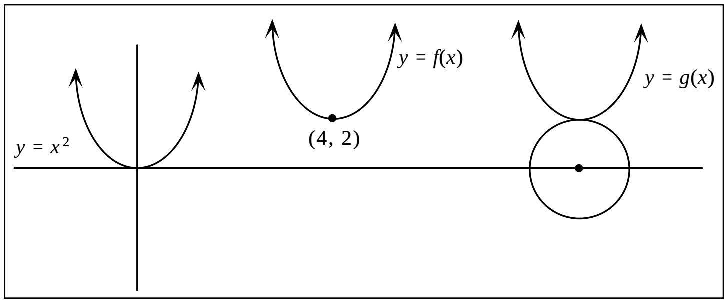
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit les graphiques suivants :



a) Construis l'équation de $f(x)$.

b) L'équation du cercle est $(x - 8)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

Construis l'équation de la parabole $g(x)$.

2. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ et
$g(x) = (x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 + 2(x + 2) + 2$;
explique le lien entre les graphiques de ces 2 fonctions.

3. a) Trace le graphique de $y = \sqrt{|x|}$.

b) Détermine le domaine et l'image.

c) Commente la symétrie.

Ressources imprimées :

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.
– Module 1, leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– *suite*

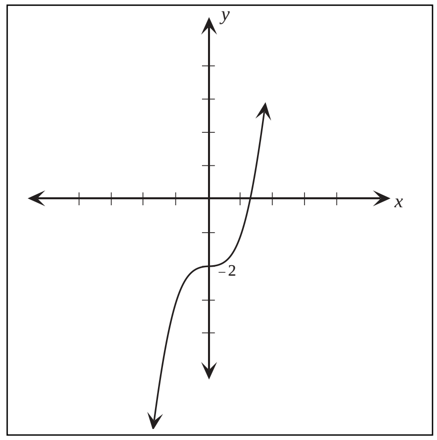
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser le graphique d'une fonction de base pour représenter une translation (suite)**

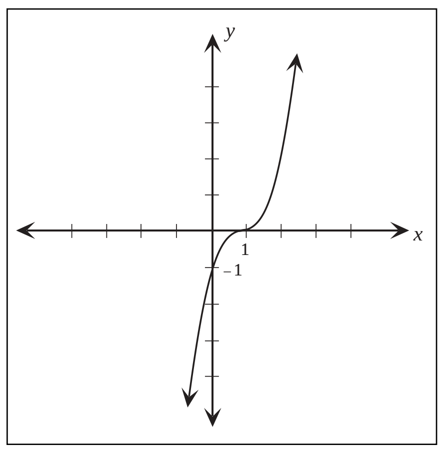
Exemple (suite)

Solution

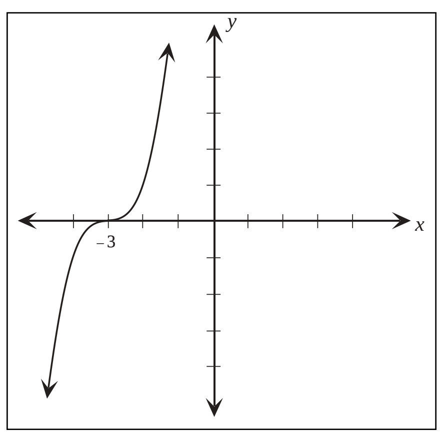
a)



b)



c)



✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

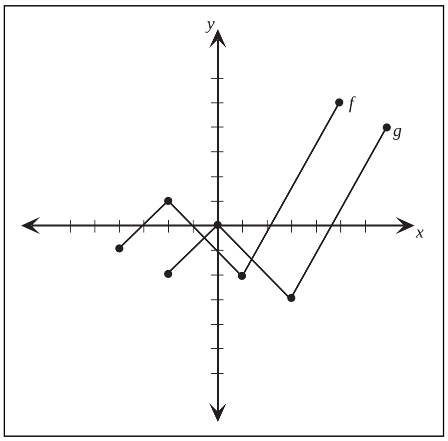
Calcul Mental

1. Si $f(x) = x^2$, trace le graphique de $f(x - 3) + 2$.
2. Le graphique de $g(x)$ a été produit en déplaçant le graphique de $f(x)$ de 4 unités vers la gauche. Si $f(x) = \sin(x + 2) - 5$, construis une équation en termes du sinus pour représenter $g(x)$.
3. Soit $f(x) = x^2 + 5$; construis l'équation qui représente la translation du graphique de $f(x)$, déplacé de 3 unités vers la gauche.

Choix multiples

L'équation du graphique de g est :

a) $f(x + 2) - 1$
b) $f(x + 2) + 1$
c) $f(x - 2) + 1$
d) $f(x - 2) - 1$



Problème

Si le graphique d'une fonction $y = f(x)$ est déplacé de deux unités vers la gauche et de quatre unités vers le bas, quelle sera l'équation du nouveau graphique?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de la translation d'une fonction *f*(*x*) quelconque et l'expliquer**

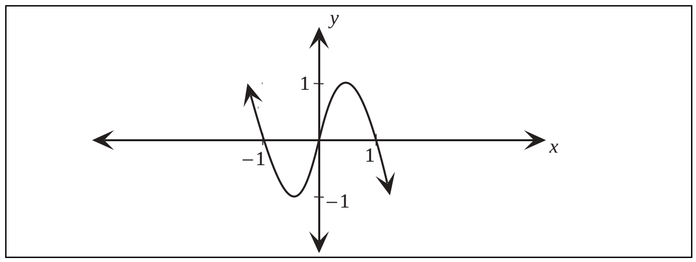
Exemple

Utilise le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous pour tracer le graphique des fonctions suivantes. Décris la transformation en tes propres mots.

a) $g(x) = f(x + 3)$

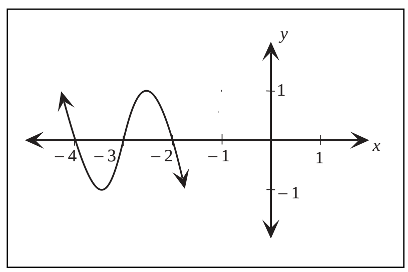
b) $m(x) = f(x) + 2$

c) $n(x) = f(x - 5)$



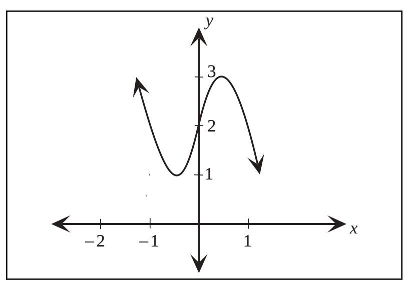
Solution

a)



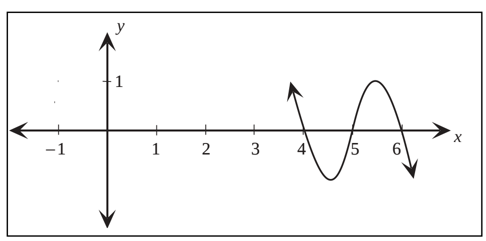
$g(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de trois unités vers la gauche

b)



$m(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de deux unités vers le haut

c)



$n(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de cinq unités vers la droite

– suite

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie** ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

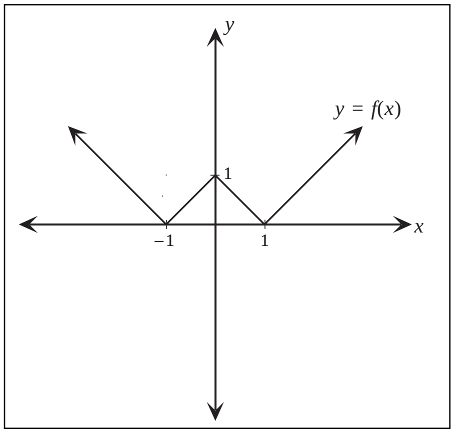
Problème

Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de :

a) $f(x + 3)$

b) $f(x) - 3$

c) $f(x + 3) - 3$



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– suite

✔ Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ Technologie
✔ Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de la translation de toute fonction *f*(*x*) et l'expliquer (suite)**

On aborde dans cette section des problèmes qui impliquent des translations du type $y = f(x - 1) + 2$. Les concepts de domaine, d'image et de coordonnées à l'origine doivent aussi être intégrés dans le courant de la leçon.

- **utiliser des outils technologiques pour étudier les translations**

L'enseignant devrait donner aux élèves l'occasion d'utiliser des outils graphiques tels qu'une calculatrice ou un logiciel à capacité graphique pour étudier les translations.

- **généraliser la transformation des graphiques de *f*(*x*) quand des translations sont effectuées**

Soit le graphique de la fonction $f(x)$; les effets des transformations sont les suivants :

Transformations	Effet sur le graphique
$f(x) + k$	Translation verticale : • vers le haut si $k > 0$ • vers le bas si $k < 0$
$f(x + k)$	Translation horizontale : • vers la gauche si $k > 0$ • vers la droite si $k < 0$

Exemple 1

Compare les graphiques de $y = x^2$ et de $y = x^2 - 2$.

Solution

Le nouveau graphique a été déplacé de deux unités au-dessous de l'original.

Exemple 2

Trace le graphique d'une fonction $f(x)$ quelconque. Sur le même système d'axes, trace le graphique des fonctions suivantes et compare-les au graphique de $f(x)$:

a) $f(x) - 2$

b) $f(x - 2)$

c) $f(x - 2) + 1$

Solution

a) $f(x) - 2 \rightarrow$ descend de deux unités

b) $f(x - 2) \rightarrow$ déplacé de deux unités vers la droite

c) $f(x - 2) + 1 \rightarrow$ déplacé de deux unités vers la droite et de une unité vers le haut

Remarque : Vous pouvez utiliser la technologie pour faire comprendre aux élèves les effets des translations de fonctions sur leurs graphiques.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les étirements et les compressions verticaux à l'aide d'une fonction de base**

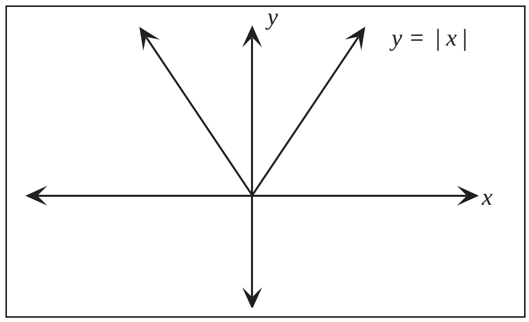
Exemple

a) Trace le graphique de $y = |x|$ et utilise ce graphique pour tracer le graphique de :

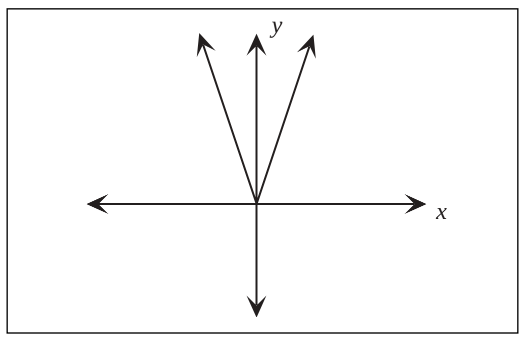
i) $y = 3|x|$

ii) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$

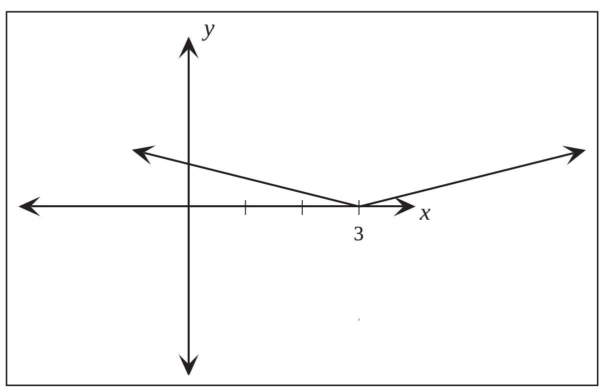
Solution



i)



ii)



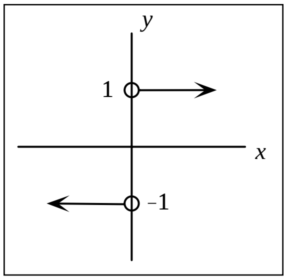
– suite

✔ Communications Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental **✔ Technologie**
✔ Visualisation

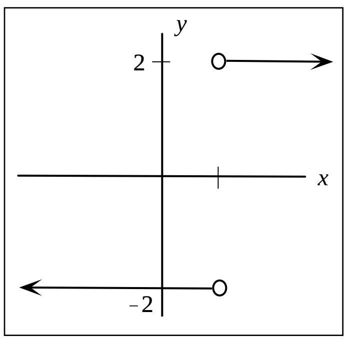
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Voici le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$:



Quelle est l'équation de la fonction définie par le graphique ci-dessous?

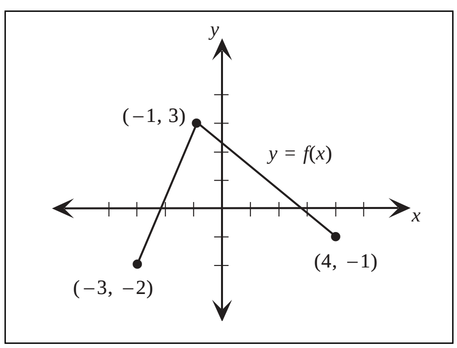


2. La figure illustre le graphique de $y = f(x)$. Trace les graphiques ci-dessous.

   a) $f(2x)$

   b) $2f(x)$

   c) $2f(x) + 1$



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.
– Module 1, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les étirements et les compressions verticaux à l'aide d'une fonction de base (suite)**

Exemple – suite

b) Explique le lien entre les deux graphiques et la fonction $y = |x|$.

Solution

Dans $y = 3|x|$, toutes les valeurs de y sont trois fois plus élevées que les valeurs correspondantes de $y = |x|$. Le graphique a été ***étiré verticalement*** par un facteur de 3.

Dans $y = \frac{1}{2}|x - 3|$, toutes les valeurs de y sont la moitié plus petites que les valeurs de y dans $y = |x - 3|$. Le graphique de $y = |x|$ a été ***comprimé verticalement*** par un facteur de $\frac{1}{2}$, pour produire le graphique de $y = \frac{1}{2}|x - 3|$. Le graphique a aussi été déplacé de trois unités vers la droite.

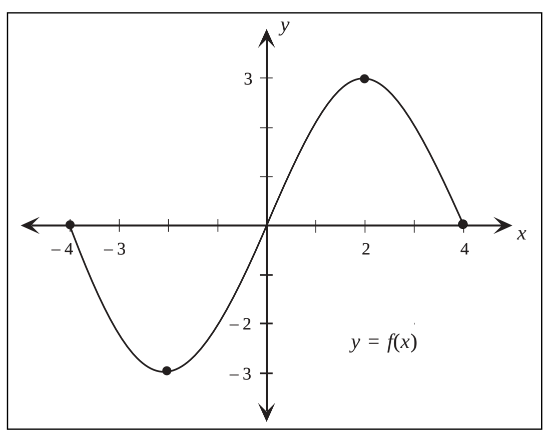
- **à partir du graphique d'une fonction *f*(*x*) quelconque, tracer le graphique des compressions ou des étirements verticaux**

Exemple

Utilise le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous pour tracer le graphique des fonctions suivantes :

a) $2\,f(x)$

b) $\frac{2}{3}f(x) + 2$



– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $y = x^2$ est le graphique de base, quel énoncé ci-dessous décrit le mieux la fonction $y = \frac{1}{4}x^2$:

a) un étirement horizontal par un facteur de 4?

b) un étirement horizontal par un facteur de $\frac{1}{4}$?

c) un étirement vertical par un facteur de 4?

d) un étirement vertical par un facteur de $\frac{1}{4}$?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

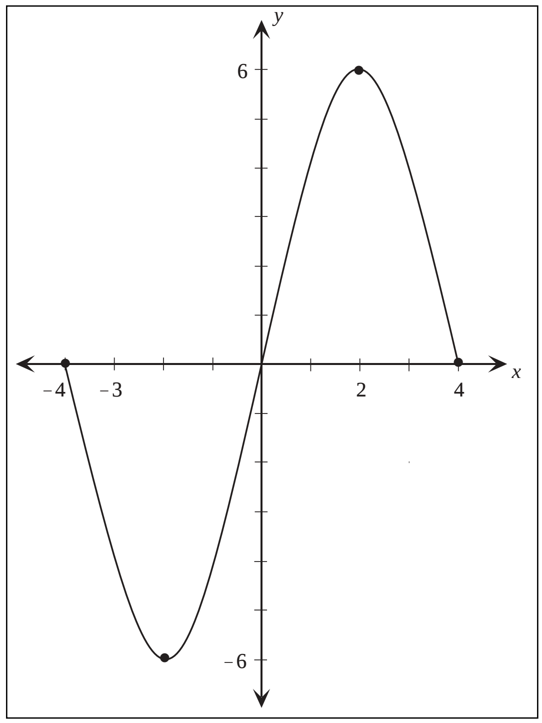
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **à partir du graphique d'une fonction $f(x)$ quelconque, tracer le graphique des compressions ou des étirements verticaux (suite)**

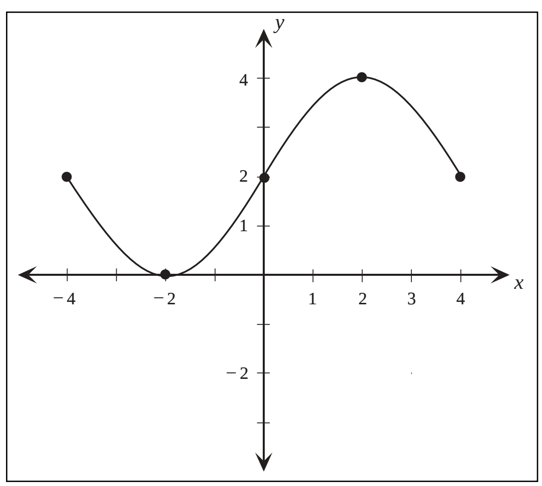
Exemple (suite)

Solution

a)



b)



✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

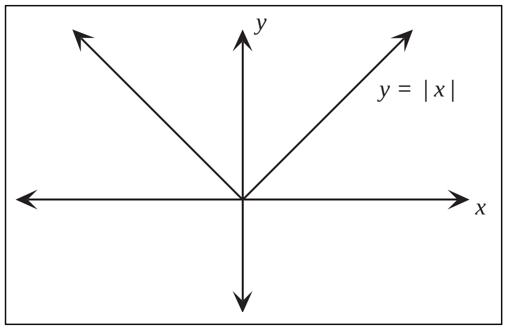
- **étirer et comprimer horizontalement le graphique d'une fonction donnée à partir d'une fonction parente**

Exemple

Trace le graphique de $y = |x|$ et utilise ce graphique pour tracer le graphique des fonctions suivantes :

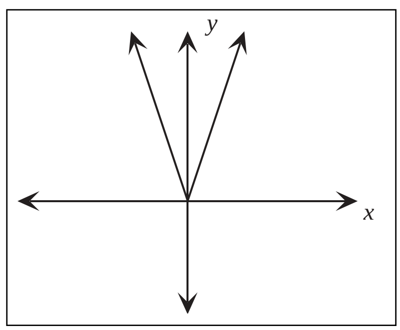
a) $y = |3x|$

b) $y = \left|\frac{1}{3}x\right|$



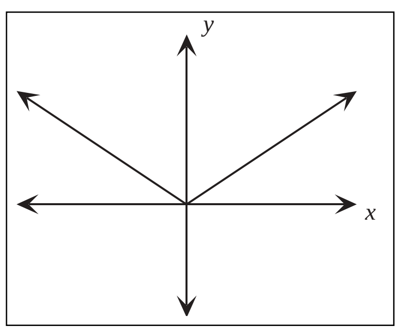
Solution

a)



Remarque : Il s'agit d'une ***compression horizontale*** de $y = |x|$ par un facteur de 3.

b)



Remarque : Il s'agit d'un ***étirement horizontal*** de $y = |x|$ par un facteur de 3.

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

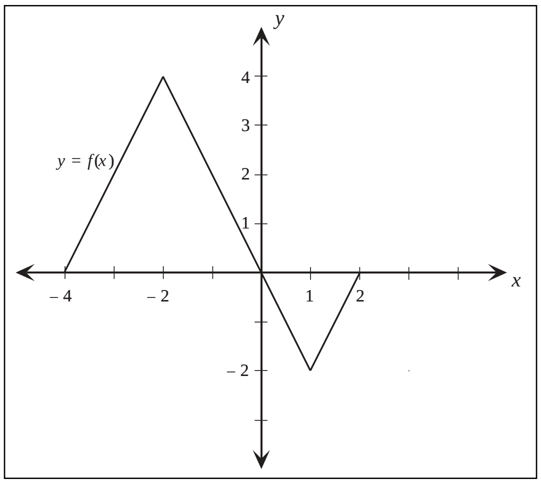
NOTES

Problème

Utilise le graphique ci-dessous pour tracer le graphique de :

a) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $2f(3x)$



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

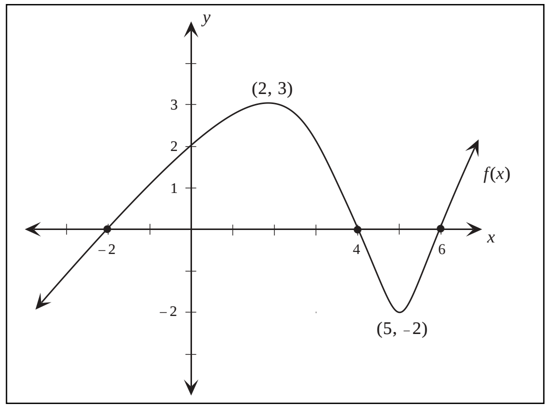
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

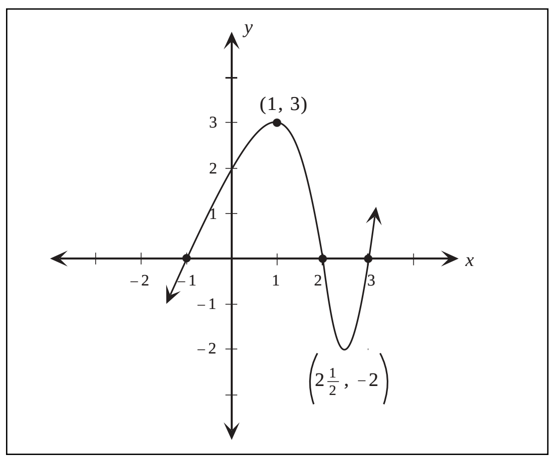
- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine**

Exemple 1

Soit $y = f(x)$ dans le diagramme ci-dessous; trouve $y = f(2x)$.



Solution



Remarque que les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ ont deux fois la valeur des abscisses à l'origine de la fonction $f(2x)$. Étant donné que les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont –2, 4 et 6, $y = f(x)$ sera égale à 0 quand x aura une valeur de –2, 4 ou 6. Ainsi, $y = f(2x)$ sera égale à 0 quand $2x$ aura les valeurs –2, 4 et 6. Pour que cela se produise, la valeur de x doit être –1, 2 ou 3.

Par conséquent, le graphique de $y = f(x)$ est une compression horizontale du graphique de $f(x)$, par un facteur de 2.

Selon le même raisonnement, le graphique de $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ est un étirement horizontal de $f(x)$, par un facteur de 2.

– suite

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont 6, 2 et –8. Quelles sont les abscisses à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(-3x)$

b) $f(2x - 4)$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

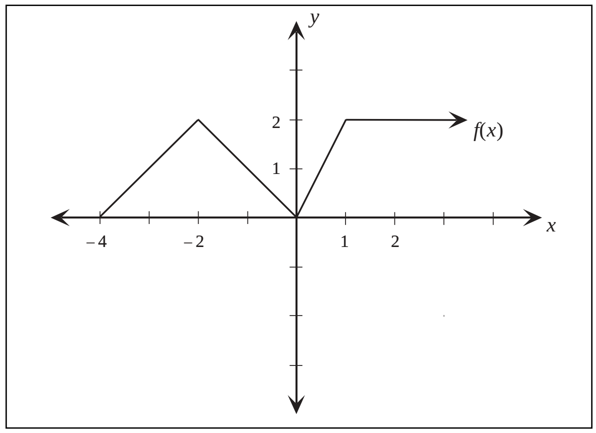
- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine (suite)**

Exemple 2

Utilise le graphique de $y = f(x)$, illustré ci-dessous, pour tracer les graphiques suivants :

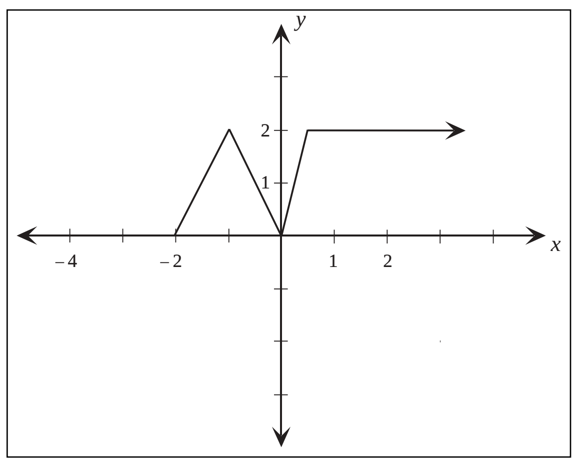
a) $y = f(2x)$

b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$



Solution

a)



– suite

✔ Communications Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental
✔ Technologie
✔ Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

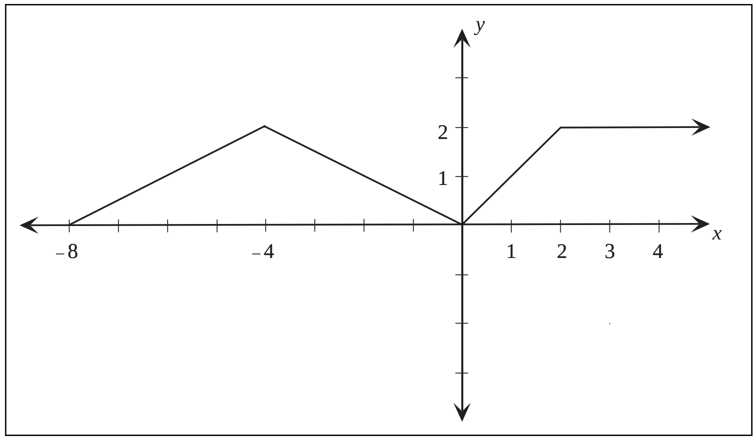
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine (suite)**

Exemple 2 (suite)

Solution (suite)

b)



Les élèves devraient être en mesure d'appliquer ce concept à sin x, cos x, csc x, sec x, tan x et cot x.

Il faut aussi trouver le domaine, l'image, les ordonnées à l'origine ainsi que les zéros de la fonction.

- **généraliser les transformations subies par les graphiques de $f(x)$ quand des compressions ou des étirements sont effectués**

Voici des exemples de compressions et d'étirements.

Transformation	Effet sur le graphique	Exemple
$y = af(x)$	$af(x)$ est un étirement vertical si $a > 1$	$y = 2f(x)$
$y = af(x)$	$af(x)$ est une compression verticale si $0 < a < 1$	$y = \frac{1}{2}f(x)$
$y = f(bx)$	$f(bx)$ est une compression horizontale si $b > 1$	$y = f(2x)$
$y = f(bx)$	$f(bx)$ est un étirement horizontal si $0 < b < 1$	$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Soit le graphique d'une fonction $y = f(x)$ quelconque; explique la transformation provoquée par les quatre constantes de l'équation suivante :

$$y = 3f\left[\frac{1}{2}(x - 4)\right] - 5$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

✔ **Communications** — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — Raisonnement — ✔ **Technologie** — ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

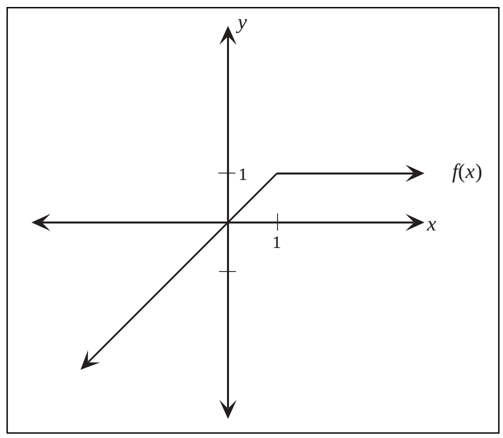
- **étudier le lien entre les valeurs de y dans $y = f(x)$ et celui de $y = -f(x)$ et tracer le graphique**

  Toutes les valeurs positives de y dans la première fonction prennent une valeur négative dans la deuxième fonction, et toutes les valeurs négatives de y dans la première fonction prennent une valeur positive dans la deuxième fonction.

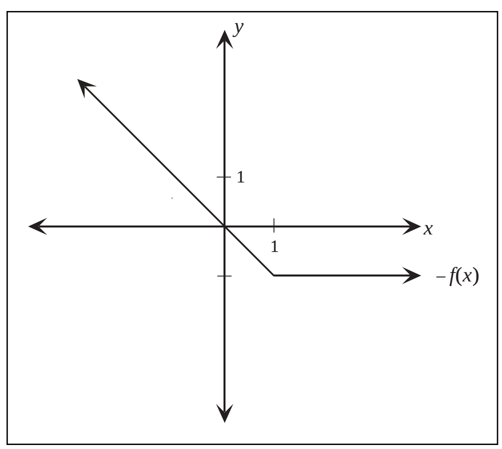
  Dans le plan géométrique, tous les points de la deuxième fonction sont le reflet de chacun des points de la première fonction par rapport à l'axe des x, et vice-versa.

  Exemple

  Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $-f(x)$.



Solution



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

Si le graphique de $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$ est réfléchi par rapport à l'origine, l'équation de la réflexion serait :

a) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$

b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 53$

c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 53$

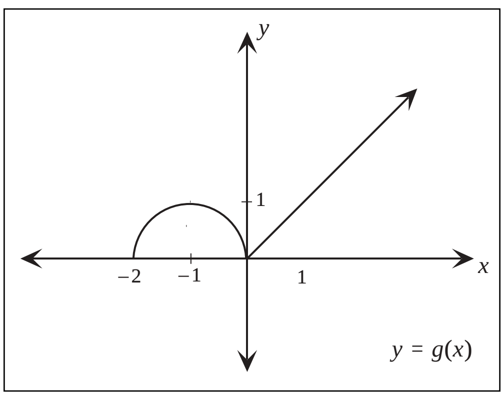
d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$

Inscription au journal

1. En quelques phrases, explique à un coéquipier pourquoi :
   a) $-f(x)$ est une réflexion de $f(x)$ par rapport à l'axe des x
   b) $f(-x)$ est une réflexion de $f(x)$ par rapport à l'axe des y

Problème

Utilise le graphique de $g(x)$ ci-dessous pour tracer le graphique de $-g(x) + 2$.



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

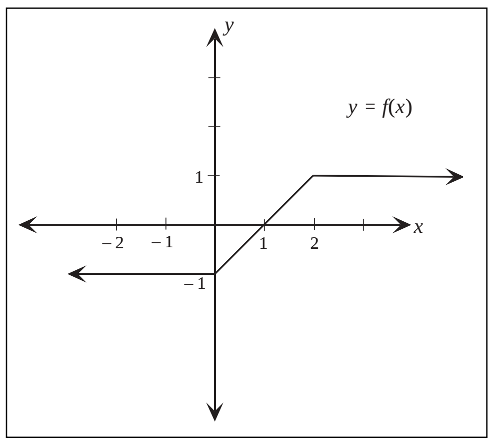
- **étudier le lien entre les graphiques de $y = f(x)$ et celui de $y = f(-x)$, et tracer le graphique (suite)**

Toutes les valeurs positives de x dans la première fonction deviennent négatives dans la deuxième fonction, et toutes les valeurs négatives de x dans la première fonction deviennent positives.

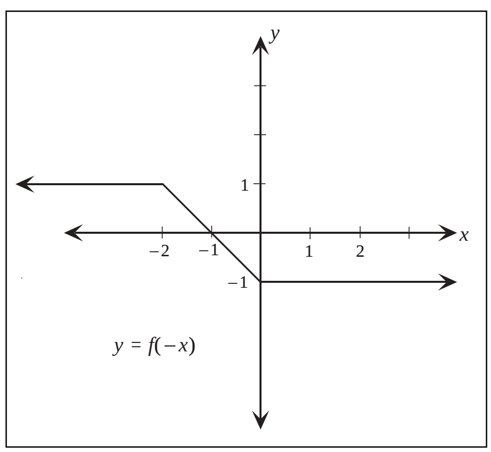
Dans le plan géométrique, tous les points de la deuxième fonction sont une réflexion de chacun des points de la première fonction par rapport à l'axe des y, et vice-versa.

Exemple

Utilise un graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $f(-x)$.



Solution



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

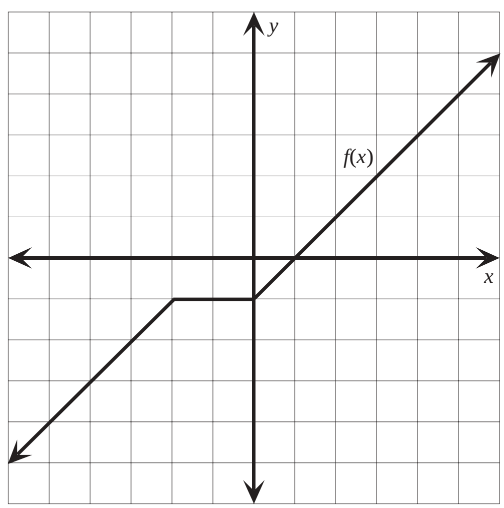
1. Écris une équation de la droite formée par la réflexion de $y = -3x + 4$ par rapport à l'axe des x.

2. Écris une équation de la droite formée par la réflexion de $y = 3x + 2$ par rapport à l'axe des y.

3. Soit le graphique de $f(x)$; trace le graphique des fonctions suivantes :

   a) $y = 2f(x - 1)$

   b) $y = f(-x) + 1$



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

✔ **Communications** · Résolution · Liens · Raisonnement · Estimation et Calcul Mental · ✔ **Technologie** · ✔ **Visualisation**

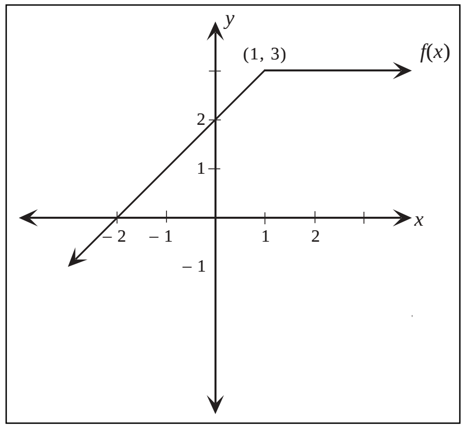
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir la relation entre $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$**

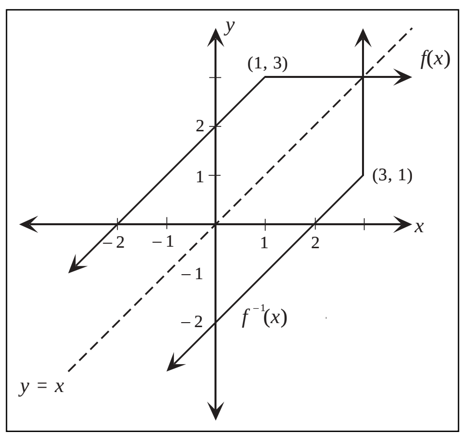
Dans le cours *Mathématiques pré-calcul secondaire 3*, les élèves ont abordé le concept des fonctions réciproques. $y = f^{-1}(x)$ est la réflexion de $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.

Exemple

Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $f^{-1}(x)$.



Solution



- **généraliser le graphique de la fonction $f(x)$ réfléchie par rapport à l'axe des x et à l'axe des y, ainsi que par rapport à la droite $y = x$**

Soit le graphique d'une fonction $f(x)$; voici les effets des transformations :

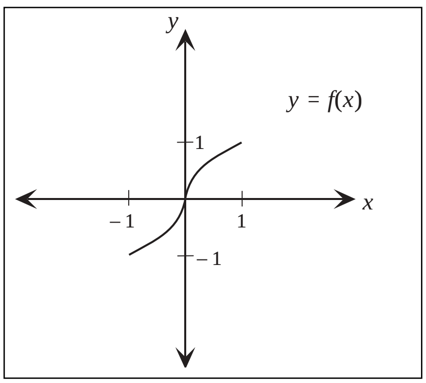
Transformations	Effet sur le graphique
$-f(x)$	réflexion par rapport à l'axe des x
$f(-x)$	réflexion par rapport à l'axe des y
$f^{-1}(x)$	réflexion par rapport à la droite $y = x$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

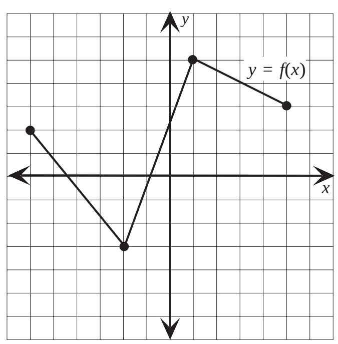
NOTES

Problèmes

1. a) Décris toutes les fonctions linéaires qui sont leur propre réciproque.
   b) Donne un exemple d'une fonction non linéaire qui est sa propre réciproque.
   c) Quelles sont les propriétés du graphique de $f(x)$ si $f(x) = f^{-1}(x)$?
2. Trouve la valeur de k de sorte que $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - k}$ devienne sa propre réciproque.
3. Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique des fonctions suivantes :
   a) $-f^{-1}(x)$
   b) $f^{-1}(-x)$



4. Soit le graphique de $y = f(x)$; trace le graphique des fonctions suivantes :
   a) $y = -f(x - 2)$
   b) $y = 2\,f(-x)$



5. Si (4, –3) est un point appartenant au graphique de $y = f(x)$, trouve un point qui appartient au graphique de $y = 3f(2x) + 4$.
6. Si les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont 3, –5 et 0, quelles seront les abscisses à l'origine des fonctions suivantes :
   a) $f(-x + 2)$?
   b) $-f(x) + 1$?
7. Si l'ordonnée à l'origine de $f(x)$ est 5, quelle est l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes :
   a) $-f(x)$ b) $f(-x)$
   c) $f(x - 3)$ d) $f(-x) + 1$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

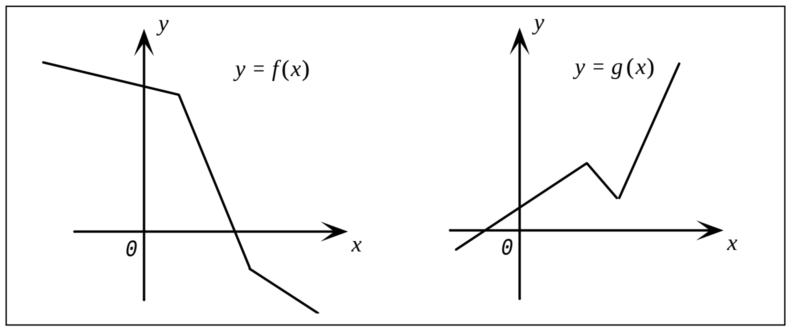
✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier une fonction biunivoque**

Une fonction $y = f(x)$ qui a une réciproque est appelée une fonction biunivoque parce que non seulement à chaque valeur de x correspond une valeur de y, mais à chaque valeur de y correspond exactement une valeur de x. Nous pouvons déterminer si une fonction est biunivoque en appliquant le test de la droite horizontale à son graphique.

Si le graphique de la fonction est tel qu'une droite horizontale ne peut croiser le graphique en plus d'un point, alors f est une fonction biunivoque et elle a une réciproque.



f est une fonction biunivoque et elle a une réciproque

g n'est pas une fonction biunivoque et n'a pas de réciproque

Faites des liens avec l'unité A (p. A-24) et les sections traitant des fonctions trigonométriques réciproques.

- **faire la différence entre les fonctions paires et les fonctions impaires**

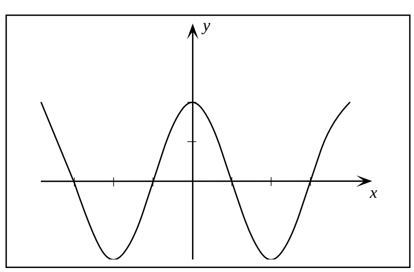
Une fonction $f(x)$ est paire si, quand on la déplace vers la gauche ou vers la droite sur une même distance à partir de 0, on obtient la même valeur (c.-à-d. $f(x)$ est paire si $f(-x) = f(x)$).

Les fonctions paires ont leur propre réflexion par rapport à l'axe des y. Elles sont dites symétriques par rapport à l'axe des y.

Exemple 1

Trace le graphique de $f(x) = \cos x$ et le graphique de $f(-x)$.

Solution



Le graphique est symétrique par rapport à l'axe des y et la fonction est paire.

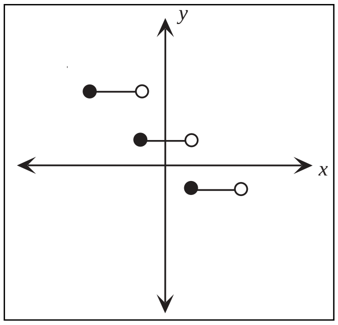
– suite

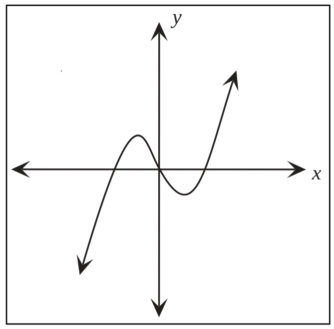
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

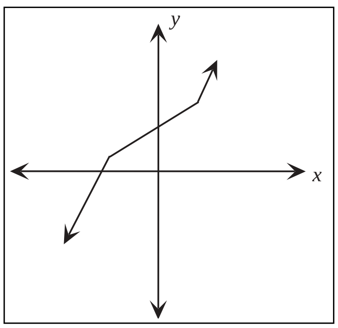
NOTES

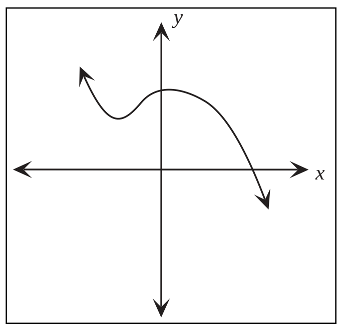
Calcul mental

1. Lequel des graphiques suivants représente une fonction biunivoque?

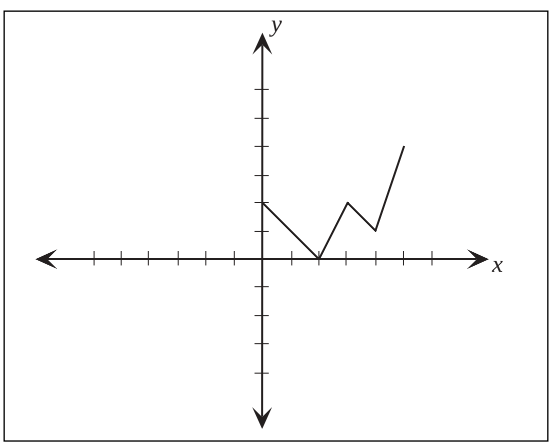
a) 

b) 

c) 

d) 

2. Voici une partie du graphique d'une fonction paire. Complète-le.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la différence entre les fonctions paires et les fonctions impaires (suite)**

Une fonction $f(x)$ est ***impaire*** si, quand on la déplace vers la gauche à partir de 0, la valeur de la fonction est opposée à celle obtenue si on déplaçait le graphique de la même distance vers la droite à partir de 0 ($f(x)$ est ***impaire*** si et seulement si $f(-x) = -f(x)$).

Les fonctions qui ont cette propriété sont dites symétriques par rapport à l'origine. Chacun des points de la courbe a une image réfléchie par rapport à l'origine.

La fonction sinus est impaire.

Exemple 2

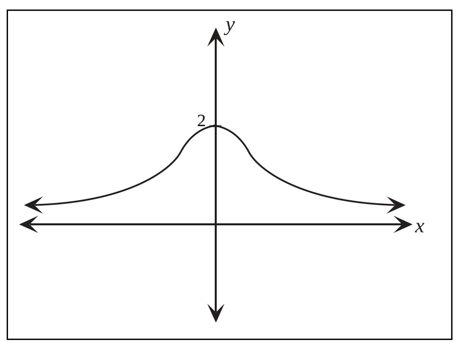
Détermine si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni l'une ni l'autre.

a) $f(x) = x^5 + x^3$

b) $f(x) = -4x^2 + 2x$

c) $f(x) = 3x^2$

d)



Solution

a) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3$
$= -x^5 - x^3$
$= -(x^5 + x^3)$
$= -f(x)$

Étant donné que $f(-x) = -f(x)$, la fonction est impaire.

b) $f(x) = -4x^2 + 2x$
$f(-x) = -4(-x)^2 + 2(-x)$
$= -4x^2 - 2x$
$= -(4x^2 + 2x)$

Étant donné que $f(-x)$ n'est pas égale à $f(x)$ ou $-f(x)$, la fonction n'est ni paire ni impaire.

c) $f(x) = 3x^2$
$f(-x) = 3(-x)^2$
$= 3x^2$

Étant donné que $f(-x) = f(x)$, la fonction est paire.

d) Étant donné que la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y, la fonction est paire.

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

L'un des points de la fonction g est (–2, 3). Si g est une fonction impaire, lequel parmi les points suivants est un autre point appartenant au graphique de $g(x)$?

a) (2, 3) b) (–2, –3)

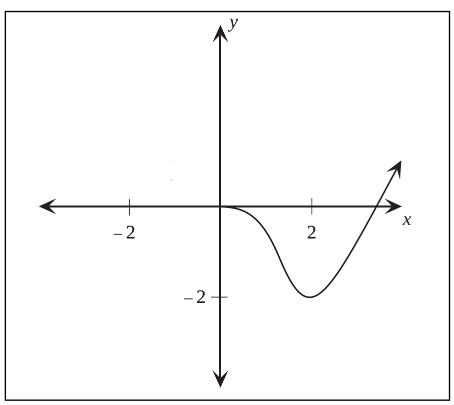
c) (2, –3) d) (3, –2)

Problèmes

1. Laquelle parmi les fonctions suivantes est paire?
   a) $f(\theta) = \sin \theta$
   b) $f(\theta) = \cos \theta$
   c) $f(\theta) = \tan \theta$

2. La fonction $f(x)$ est paire et la fonction $g(x)$ est impaire. Détermine, dans la mesure du possible, si chacune des combinaisons de fonctions suivantes est une fonction impaire, paire, ou ni l'une ni l'autre.
   a) $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $G(x) = f(x) + g(x)$
   e) $H(x) = f(x) \cdot g(x)$ d) $M(x) = f\,(g(x))$

3. Voici le graphique partiel d'une fonction $f(x)$. Complète-le en posant $f(x)$:
   a) une fonction impaire
   b) une fonction paire



4. Un jour, durant le cours de mathématiques de secondaire 4, Ann déclare ce qui suit :
   « Je crois que les fonctions impaires sont telles que $f(x) = -f(-x)$. »
   Jean, un autre élève de la classe, réplique que cette définition n'est pas exacte et que la fonction impaire devrait avoir la propriété $f(-x) = -f(x)$.
   Quelle définition de la fonction impaire est correcte? Explique pourquoi.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **décrire $y = \frac{1}{f(x)}$ et tracer le graphique à l'aide du graphique ou de l'équation de $f(x)$**

Les graphiques des expressions rationnelles ont été étudiés dans le cours Mathématiques pré-calcul de secondaire 3. Il serait peut-être bon de revoir les méthodes utilisées dans ce cours.

Pour les fonctions du type $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, tu peux utiliser la division pour exprimer $\frac{2x}{x-1}$ sous la forme $Q + \frac{R}{x-1}$, où Q est le quotient et $\frac{R}{x-1}$ est le reste.

Exemple 1

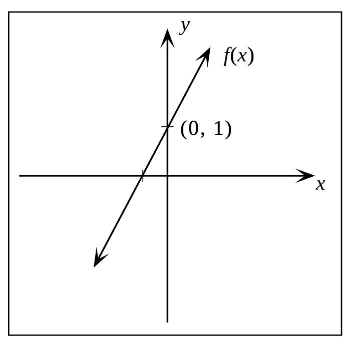
a) Soit $f(x) = 2x + 1$; trace le graphique de $f(x)$ et de $\frac{1}{f(x)}$.

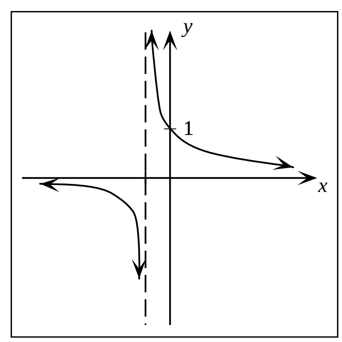
Qu'arrive-t-il aux abscisses à l'origine de $f(x)$?

b) La fonction $\frac{1}{f(x)}$ peut-elle avoir des zéros?

Solution

a)





Étant donné que 0 n'a pas de réciproque, une asymptote est créée aux abscisses à l'origine de $f(x)$.

c) Non. Si $\frac{1}{f(x)} = 0$, alors $1 = 0$. C'est impossible.

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

Quelle fonction parmi les suivantes a une asymptote verticale $x = \frac{\pi}{3}$, une asymptote horizontale $y = \frac{7}{3}$ et 2 comme ordonnée à l'origine :

a) $f(x) = \frac{7x - 2\pi}{3x - \pi}$

b) $f(x) = \frac{7x}{3x - \pi}$

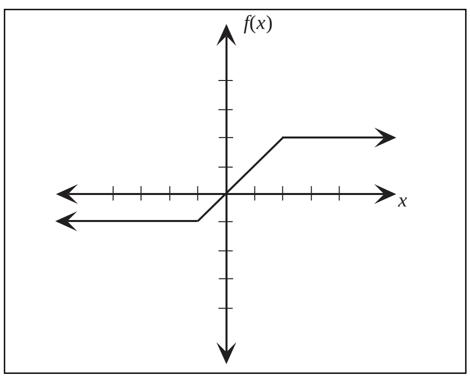
c) $f(x) = \frac{7x - 2\pi}{3x + \pi}$

d) $f(x) = \frac{7}{3x - \pi} + 2$

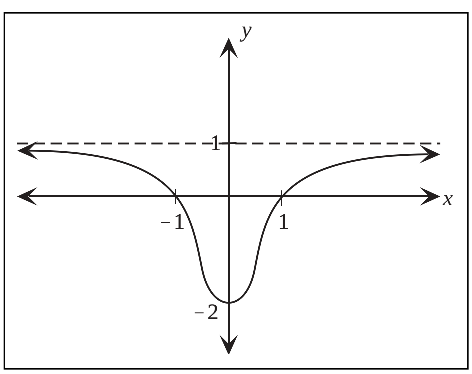
Problèmes

1. Trace le graphique de $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x)$ est définie par le graphique suivant :

a)



b)



2. Trace le graphique de $f(x) = \cos x$, puis trace le graphique de $\frac{1}{\cos x}$ sur le même système d'axes.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$

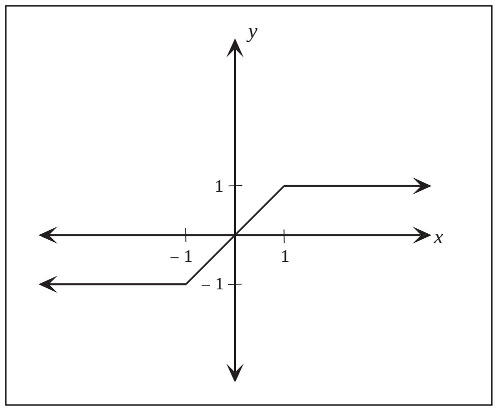
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

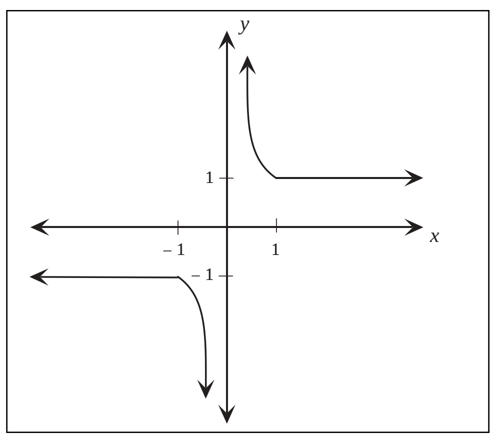
• **décrire $y = \frac{1}{f(x)}$ et tracer le graphique à l'aide du graphique ou de l'équation de $f(x)$**

Exemple 2

Utilise le graphique de $f(x)$ ci-dessous pour tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$.



Solution



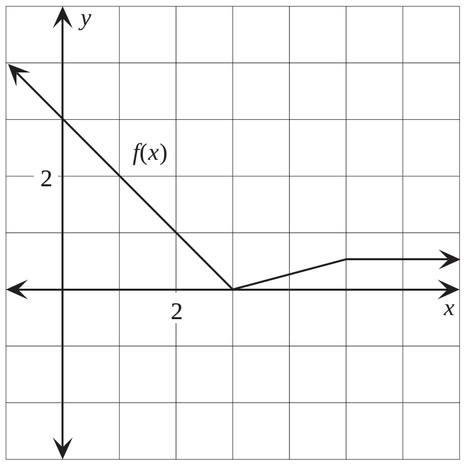
✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

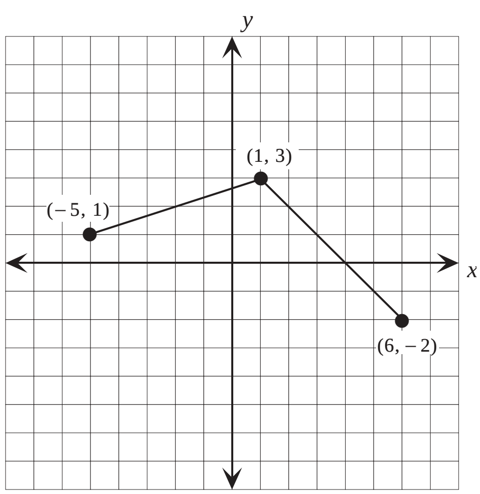
NOTES

Problèmes

1. Soit le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous; trace le graphique de $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.



2. Soit le graphique de $f(x)$ ci-dessous; trace le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$.



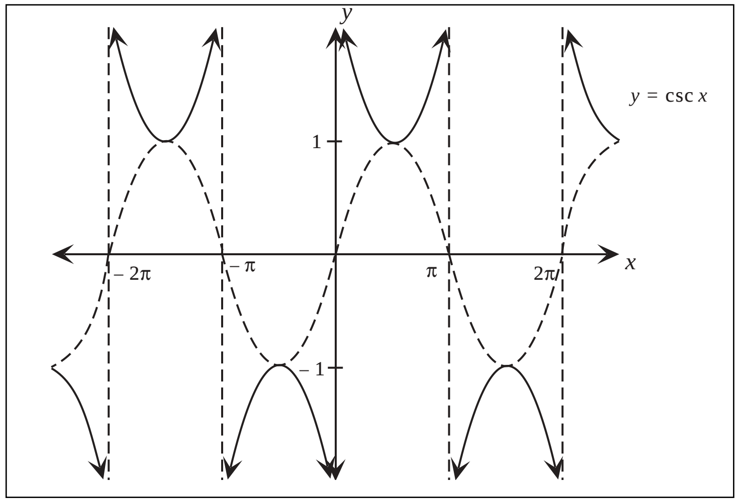
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

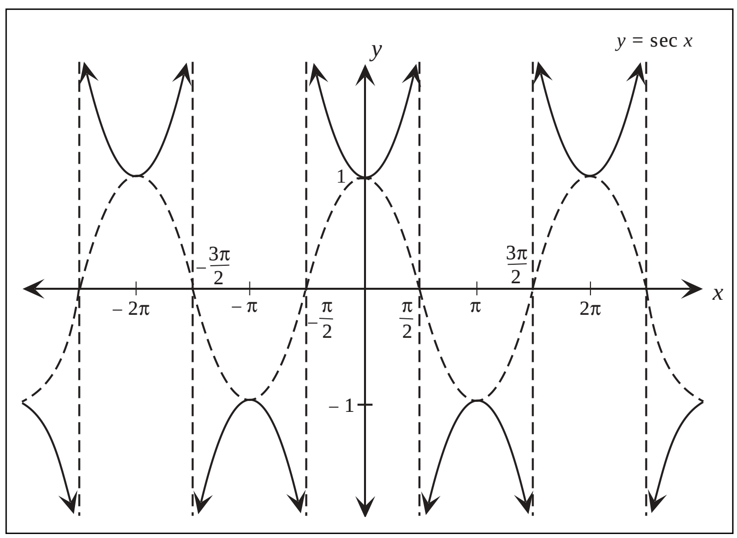
B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de base des fonctions inverses : $y = \sec x$, $y = \csc x$ et $y = \cot x$**





✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique et fais l'analyse des fonctions suivantes :
   a) $y = \sec x$
   b) $y = \csc x$
   c) $y = \cot x$

2. Compare le domaine, l'image et la période des fonctions suivantes :
   a) $f(x) = \csc x$
   b) $f(x) = \cot x$

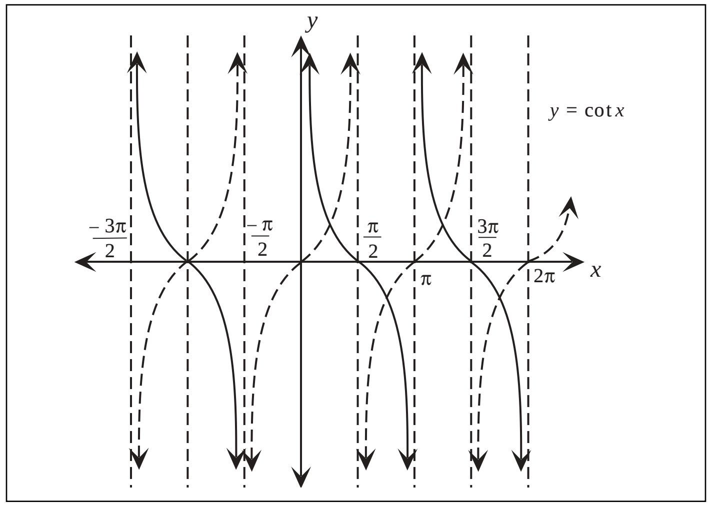
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **tracer le graphique de base des fonctions inverses : $y = \sec x$, $y = \csc x$ et $y = \cot x$ (suite)**



• **décrire les propriétés des fonctions inverses ci-dessus**

Le sommaire suivant peut servir de guide.

Fonction	Domaine	Image	Ordonnée à l'origine	Zéros
$\cot x$	$\{x \neq k\pi \mid k = \in Z\}$	R	aucune	$\left\{x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$
$\csc x$	$\{x \neq k\pi \mid k = \in Z\}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	aucune	aucun
$\sec x$	$\left\{x \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	1	aucun

Fonction	Asymptotes	Période	Symétrie	Signe du quadrant	Croissante ou décroissante
$\cot x$	$\{x = k\pi \mid k \in Z\}$	π	Impaire	+ dans I et III – dans II et IV	Toujours décroissante
$\csc x$	$\{x = k\pi \mid k \in Z\}$	2π	Impaire	+ dans I et II - dans III et IV	Croissante : II et III Décroissante : I et IV
$\sec x$	$\left\{x \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$	2π	Paire	+ dans I et IV – dans II et III	Croissante : I et II Décroissante : II et IV

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et ✔ **Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et ✔**Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **faire le lien entre le concept des fonctions définies par morceaux et la valeur absolue**

Pour les fonctions définies par morceaux, la formule change selon la partie du domaine considérée. La valeur absolue d'un nombre est tou j ours positive ou zéro.

La valeur absolue de x, exprimée par $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0 \end{cases}$$

La définition énonce que x conserve la même valeur tant qu'elle ne devient pas négative, et que son signe change si elle devient négative.

Exemple 1

Exprime la fonction $y = |x - 2|$ sous forme de fonction définie par morceaux.

Solution

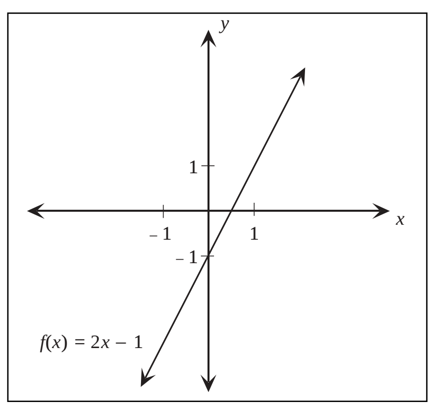
$$y = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

• **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction**

Le graphique d'une fonction valeur absolue est la réflexion d'une partie quelconque du graphique original qui se trouve au-dessous ou au-dessus de l'axe des x.

Exemple 1

a) Soit le graphique de $f(x) = 2x - 1$; trace le graphique de $y = |f(x)|$.



– suite

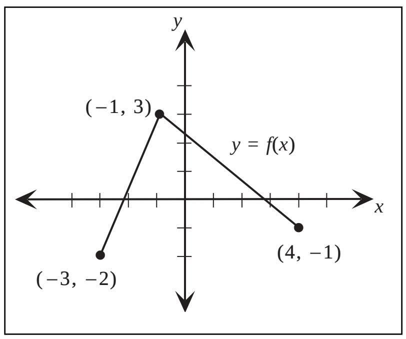
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Exprime la fonction $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ sous forme de fonction définie par morceaux.

2. Est-il possible qu'une fonction valeur absolue :
   a) n'ait aucune abscisse à l'origine?
   b) soit entièrement sous l'axe des x?
   c) soit partiellement sous l'axe des x?

3. Le graphique de $y = f(x)$ est illustré ci-dessous. Trace le graphique de :
   a) $|f(x)|$
   b) $|f(x-1)|$



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Manitoba, Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

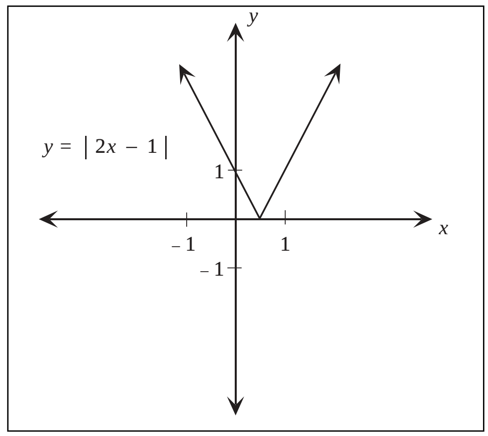
B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$ – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

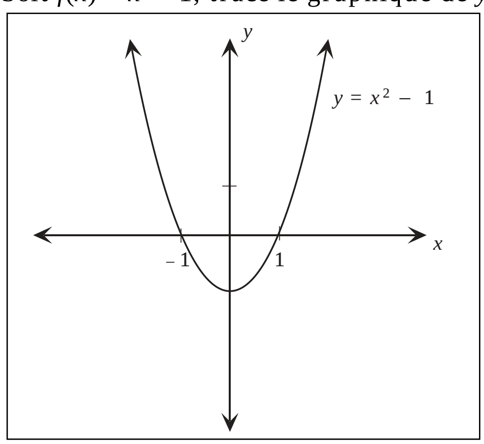
- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 1 (suite)

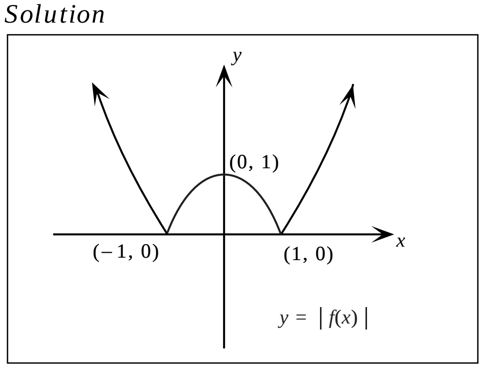
Solution



b) Soit $f(x) = x^2 - 1$; trace le graphique de $y = |f(x)|$.



Solution



– *suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

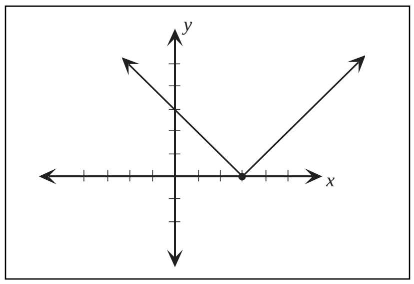
Si $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = |f(x)|$, quelle est l'ordonnée à l'origine de $g(x)$?

Choix multiples

Laquelle des équations suivantes décrit le mieux la fonction illustrée ci-dessous?

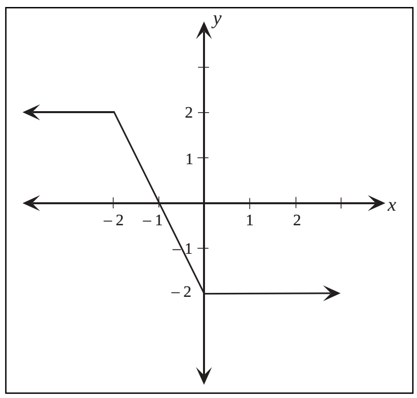
a) $y = 3\ |x|$ b) $y = |3x|$

c) $y = |x|$ d) $y = |x - 3|$



Problèmes

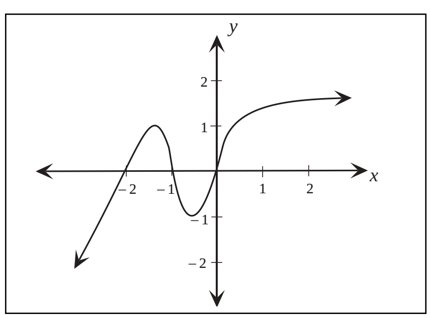
1. Utilise le graphique de la fonction $f(x)$, illustré à droite, pour tracer le graphique de $|f(x)|$.



2. Sur le graphique de $|f(x)|$, les points du graphique de $f(x)$ qui se trouvent au-dessus de l'axe des x ne sont pas déplacés. Cependant, les points qui se trouvent au-dessous de l'axe des x sont réfléchis par rapport à l'axe des x. Quelle formule permettrait d'obtenir la réflexion des points au-dessus de l'axe des x sans déplacer les points qui se trouvent au-dessous de l'axe des x?

3. Écris une formule telle que tous les points de $f(x)$ au-dessus de l'axe des x sont réfléchis au-dessous de l'axe des x, et vice-versa.

4. Utilise le graphique de $f(x)$, illustré à droite, pour tracer le graphique de $f(|x|)$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

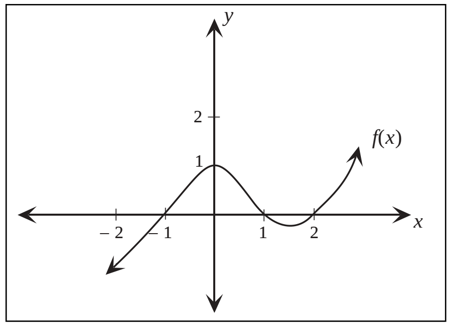
B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$ – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

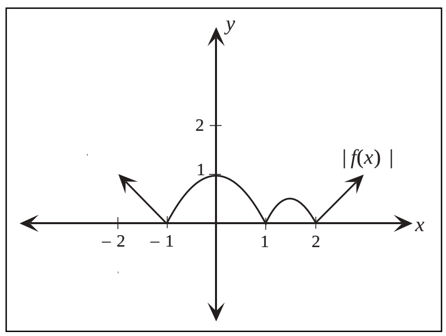
• **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 2

Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $|f(x)|$.



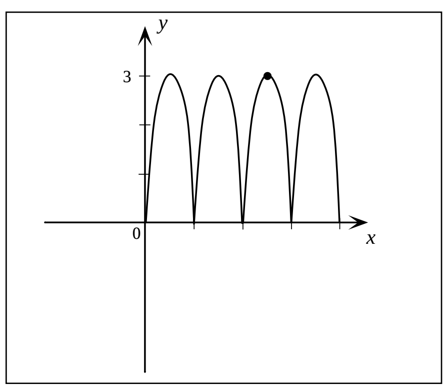
Solution



Exemple 3

Trace le graphique de $y = |\sin 2x|$. Quelle est la période de cette fonction?

Solution



Période $= \dfrac{\pi}{2}$

–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique de :
   a) $y = x + |x|$
   b) $y = |x| + |x - 1|$
   c) $|x| + |y| = 4$
   d) $y = |x^5 + 1|$

2. Trace le graphique de :
   a) $f(x) = |x^2 - 5| + 3$
   b) $f(x) = -|x^2| - 3$
   c) $f(x) = 2|\sin x| - 1$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$ *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

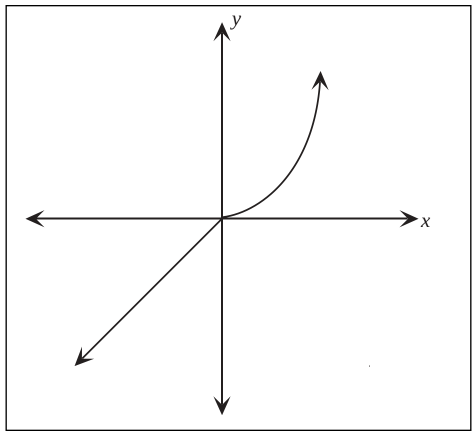
- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 4

Trace le graphique des fonctions définies par morceaux :

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

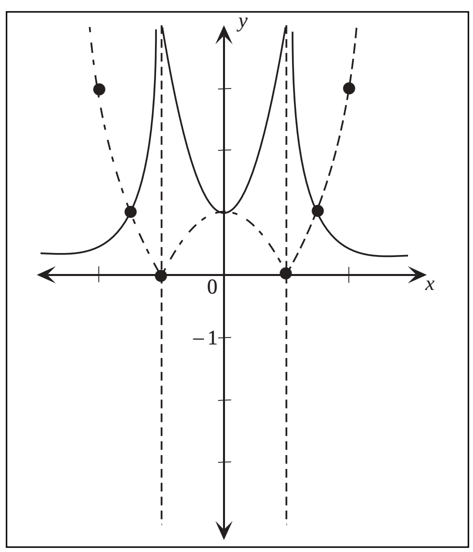
Solution



Exemple 5

Trace le graphique de $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$.

Solution



✔ **Communications** | Résolution
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trace le graphique de chacune des fonctions et indique le domaine, l'image ainsi que les coordonnées à l'origine :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

b) $m(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-6 décrire et effectuer des transformations singulières et des compositions de transformations sur des fonctions et des relations

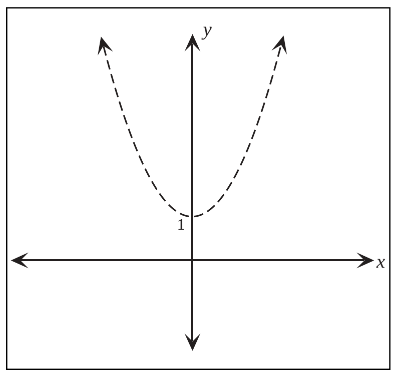
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

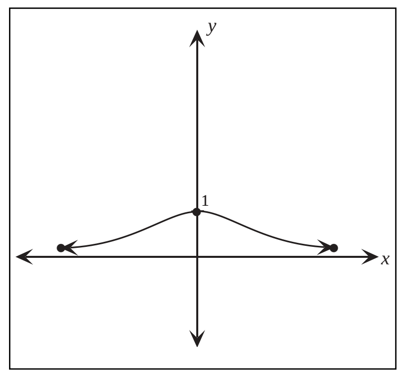
- **écrire une fonction sous forme de composition de fonctions singulières pour faciliter le traçage de son graphique**

On trouve une introduction à ce su j et dans le document *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 3 : Document de mise en œuvre.*

La composition de fonctions, un outil important qui aide à tracer le graphique des fonctions plus complexes, consiste à décomposer la fonction en une suite de fonctions plus simples.

Ainsi, la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ peut être exprimée sous la forme $g(h(x))$, où g et h sont définis par $h(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$; on peut ensuite tracer le graphique.





- **effectuer et décrire des transformations singulières et des combinaisons de transformations de fonctions**

Dans les fonctions telles que $y = af(x) + k$ et $y = f(a(x - b))$, l'ordre de la transformation est important.

Soit $y = af(x) + k$: effectue un étirement par un facteur de a, puis un déplacement vertical de k unités.

Soit $y = f(a(x - b))$: effectue un étirement par un facteur de $\dfrac{1}{a}$, puis un déplacement horizontal de b unités, soit une compression par un facteur de a puis un déplacement horizontal de b unités.

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscriptions au journal

Comment faut-il modifier la formule de $f(x)$ pour effectuer les transformations suivantes :

a) translation du graphique de 2 unités vers la droite?

b) compression horizontale du graphique par un facteur de 5?

c) étirement horizontal du graphique par un facteur de 2, puis translation de 3 unités vers le bas?

d) réflexion du graphique par rapport à l'axe des y, puis étirement vertical par un facteur de 3?

Problème

Trace le graphique de chaque fonction. Pour certaines, appuie-toi sur le concept de la composition des fonctions. Utilise un outil graphique pour vérifier ton graphique. Ensuite, indique le domaine, l'image, la valeur des coordonnées à l'origine ainsi que les équations des asymptotes, le cas échéant.

a) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x^2 - 1}\right|$

b) $f(x) = (x - 2)^3 - 1$

c) $h(x) = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-6 décrire et effectuer des transformations singulières et des compositions de transformations sur des fonctions et des relations *– suite*

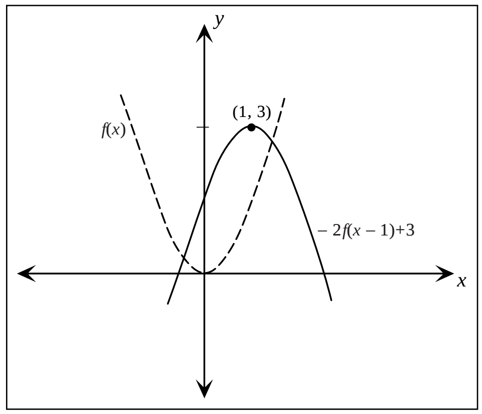
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **effectuer et décrire des transformations singulières et des combinaisons de transformations de fonctions (suite)**

Exemple 1

Soit $f(x) = x^2$; trace le graphique de $f(x)$ et celui de $y = -2f(x - 1) + 3$.

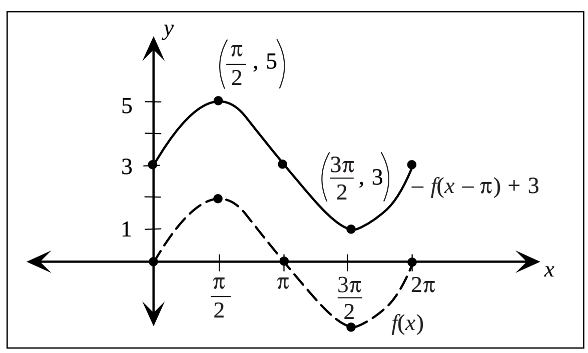
Solution



Exemple 2

Soit $f(x) = \sin x$; trace le graphique de $f(x)$ et celui de $y = -2f(x - \pi) + 3$.

Solution



Faites le lien entre les transformations et l'unité A.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques

Communications ✔ **Résolution**
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques**

La transformation des courbes des fonctions sinus et cosinus forment un ensemble de courbes que l'on a baptisées les ***sinusoïdes***.

Définition : Une fonction qui peut être exprimée sous la forme $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ ou $f(x) = a \cos(bx + c) + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels, est appelée une fonction ***sinusoïdale***.

Expliquez les caractéristiques ou les propriétés suivantes de ces courbes.

Propriété	**Généralisation de $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ ou $f(x) = a \cos(bx + c) + d$**
période	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$
amplitude	$\lvert a \rvert$
déphasage	$\frac{-c}{b}$
maximum	$d + \lvert a \rvert$
minimum	$d - \lvert a \rvert$
image	$\left[d - \lvert a \rvert, d + \lvert a \rvert \right]$

Exemple 1

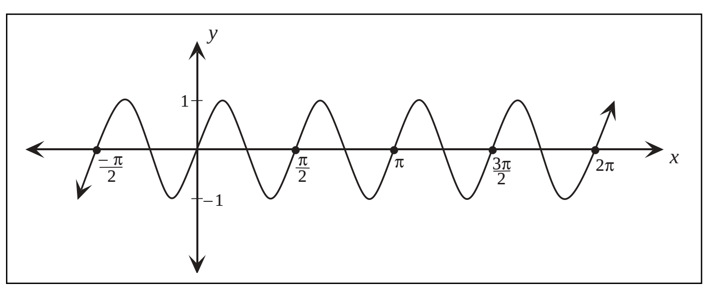
Trace le graphique et indique la période de :

a) $y = \sin 4x$

b) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

Solution

a)



–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Trouve la période, l'amplitude et le déphasage de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

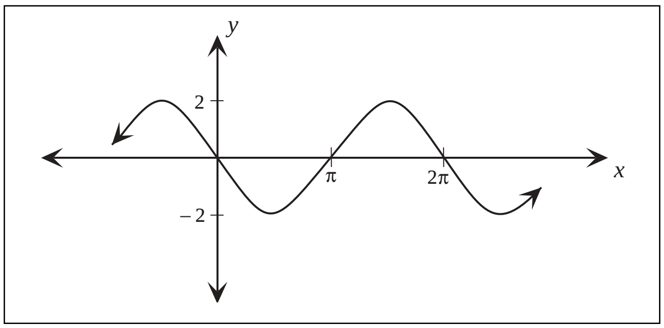
   a) $y = 2\sin(3x + \pi) - 1$

   b) $y = 5\cos(2x)$

   c) $y = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4$

   d) $y = \cos(x - \pi) + 3$

2. Dans le graphique suivant de $y = a\sin(bx + c)$, trouve les valeurs de a, b et c.



3. Trouve les abscisses à l'origine de chacune des fonctions circulaires suivantes :

   a) $y = \sin 3x$

   b) $y = \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçons 1 à 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 1 – suite

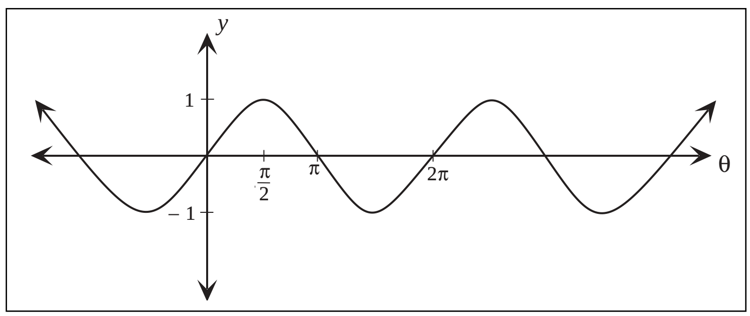
Solution – suite

La période est $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ parce que la courbe est comprimée par un facteur de 4.

Truc utile : Nombre d'élèves trouveront qu'il est plus facile de tracer les courbes de fonctions circulaires à partir de la période normale de la fonction pour déterminer où commence et où finit le cycle d'une courbe transformée. Par exemple, si la période d'une sinusoïde de base est 2π, trouver les points de début et de fin d'un cycle, comme suit :

Courbe	Début d'un cycle	Fin d'un cycle	Période
$y = \sin x$ de base	0	2π	2π
fonction transformée $y = \sin 4x$	Où $4x = 0$? Quand $x = 0$	Où $4x = \pi$? Quand $x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

b)



Pour illustrer comment appliquer ce truc, demandez aux élèves de trouver la valeur des points de début et de fin d'un cycle.

Début

$$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Fin

$$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

$$\theta = \frac{5\pi}{2}$$

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

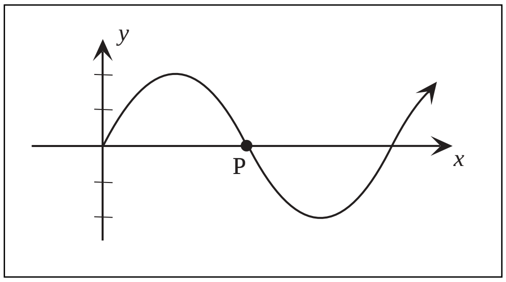
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

1. La figure ci-dessous illustre le graphique de $y = 2 \sin 4x$.
   Quelle est la valeur de x au point P?



a) 2π

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{8}$

Problèmes

1. Quelle est l'image du graphique de $y = -2 \sin 4\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$?

2. Trace le graphique de :

   a) $y = 2 \sin(3x + \pi) - 1$

   b) $y = 5 \cos(2x)$

   c) $y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4$

   d) $y = \cos(x - \pi) + 3$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

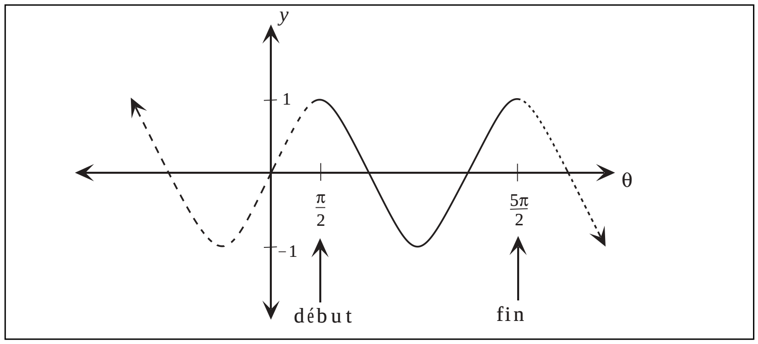
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

Commence par tracer le cycle de base de la courbe de la fonction cosinus à $\theta = \frac{\pi}{2}$, et termine le cycle à $\theta = \frac{5\pi}{2}$.



La période est toujours $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

Remarque : La période change seulement si le coefficient numérique avant x (ou θ) est modifié.

Exemple 2

Trace la courbe $y = 3\sin(2x - \pi) + 1$.

Solution

Voici une méthode qui permet de tracer ce graphique :

1. Trace l'axe sinusoïdal à $y = 1$.
2. Marque les bornes supérieures et inférieures à 3 unités au-dessus et au-dessous de l'axe sinusoïdal, étant donné que l'amplitude est 3.
3. Trouve les points de début et de fin du cycle, mais utilise les points de début et de fin de la sinusoïde de base :

$$2x - \pi = 0 \quad \text{et} \quad 2x - \pi = 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad 2x = 3\pi$$
$$x = \frac{3}{2}\pi$$

La période étant $\frac{2\pi}{2} = \pi$, le cycle se terminera à π unités sur l'axe des x.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Soit $f(h)$ = A cos B(θ – D) + C; trouve la lettre à la source :
   a) d'un glissement vertical
   b) d'un glissement horizontal
   c) d'une compression — d'un étirement vertical
   d) d'une compression — d'un étirement horizontal
   e) de l'amplitude
   f) de la période

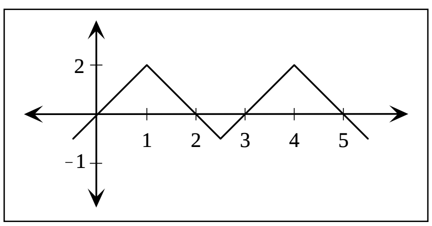
2. Trouve la période de $f(\theta) = \frac{1}{3}\sin(4\theta) + 2$.

3. Trouve l'amplitude de $f(x) = 4\cos\frac{2}{5}(\theta - \pi) - 1$.

4. Quelle est l'image de $f(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1$?

Problèmes

1. Voici un graphique de $f(x)$. La période de $f(x)$ est 3. Trace le graphique de $3f(2x)$ dans l'intervalle $[-3, 3]$.



2. Un générateur à courant alternatif a une tension de $V = 170\cos(120\pi t)$, où V représente la tension et t le temps en secondes. Un redresseur DC simple a une tension de sortie de $V = 170\,|\cos(120\pi t)|$. Trace les graphiques des tensions de sortie des deux appareils, puis décris les similarités et les différences.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

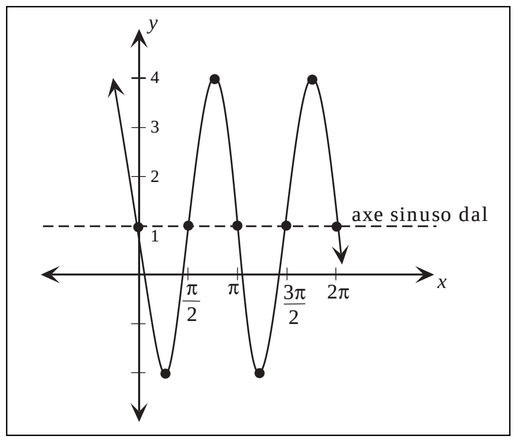
B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

• **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 2 — suite

Solution — suite

4. Étant donné qu'il s'agit du graphique d'une fonction sinus, il commence au point milieu et se dirige vers le haut, pour atteindre son point sommet au quart du cycle. À mi-chemin entre chacun des points supérieurs et inférieurs, le graphique croise l'axe sinuso ï dal.
5. Trace le graphique qui passe par les points critiques.



Soulignez les propriétés suivantes :

Propriété	**$y = 3\sin(2x - \pi) + 1$**
période	$\frac{2\pi}{2} = \pi$
amplitude	3
déphasage	$\frac{\pi}{2}$
maximum	4
minimum	2
image	[2, 4]

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 3

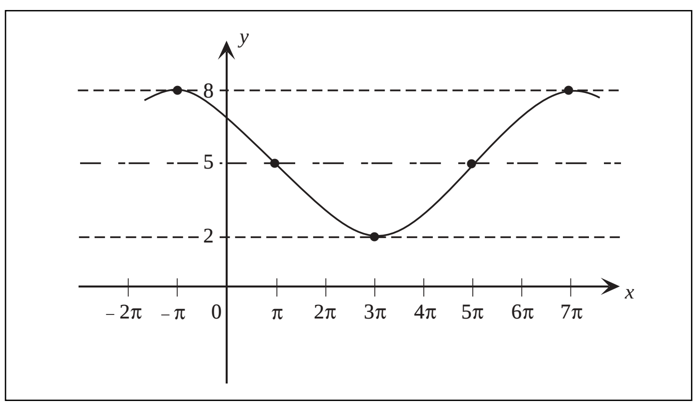
Trace le graphique de la fonction suivante :

$$y = 3\cos\frac{1}{4}(x + \pi) + 5$$

Solution

Voici une méthode étape par étape efficace pour tracer le graphique :

1. Trace l'axe sinusoïdal à $y = 5$.
2. Marque les limites supérieures et inférieures à 3 unités au-dessus et au-dessous de l'axe sinusoïdal, étant donné que l'amplitude est 3.
3. Trouve le point de début d'un cycle à $x = -\pi$ (déphasage). Le cycle du cosinus commence à un point supérieur.
4. La période est $\dfrac{2\pi}{\left(\frac{1}{4}\right)}$, ce qui équivaut à 8π. Ainsi, le cycle se termine à 8π unités à la droite de $-\pi$ sur l'axe des x, à $x = 7\pi$.
5. À mi-chemin entre ces deux points supérieurs se trouve un point inférieur. À mi-chemin entre chacun des points supérieurs et inférieurs, le graphique croise l'axe sinusoïdal.
6. Trace le graphique qui passe par ces points critiques.



Communications | ✔ **Résolution**
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une fonction sinusoïdale a son maximum à (3, 1) et son minimum à (15, –3). Trace le graphique de la fonction.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

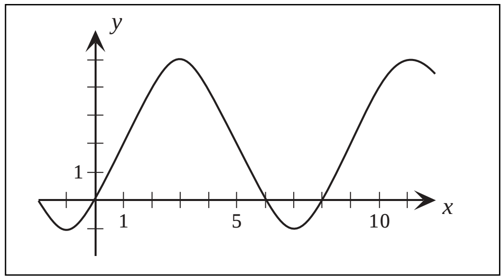
Communications | ✔ **Résolution**
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **écrire l'équation d'une fonction sinusoïdale dont on connaît le graphique**

Exemple 1

Trouve l'équation de la courbe sinusoïdale illustrée ci-dessous.



Solution

Le graphique indique une translation de y = A sin Bx ou (y = A cos Bx). Pour trouver les valeurs de A et B, suis le raisonnement suivant :

amplitude : $A = \dfrac{\text{Max} - \text{min}}{2} = \dfrac{5 - (-1)}{2} = 3$

période : p = la distance horizontale entre des maximums successifs

$= 11 - 3 = 8$

étant donné que $8 = \dfrac{2\pi}{B}$, $B = \dfrac{\pi}{4}$

La vague illustrée est une translation de $y = 3 \sin \dfrac{\pi}{4} x$ ou de $y = 3 \cos \dfrac{\pi}{4} x$.

Pour trouver les grandeurs de la translation, il faut tout d'abord trouver l'***axe de la sinusoïde***, soit la droite horizontale qui passe à mi-chemin entre les maximums et les minimums de la courbe.

axe sinusoïdal $y = \dfrac{\text{Max} + \text{min}}{2} = \dfrac{5 + (-1)}{2} = 2$

Si l'équation doit être exprimée en termes de cosinus, choisis le plus haut point de la courbe. Détermine les grandeurs de la translation entre le point (0, A) et le point le plus haut.

Si l'équation doit être exprimée en termes de sinus, choisis un point où la courbe croise son axe. Détermine la grandeur de la translation entre le point (0, 0) et le point d'intersection.

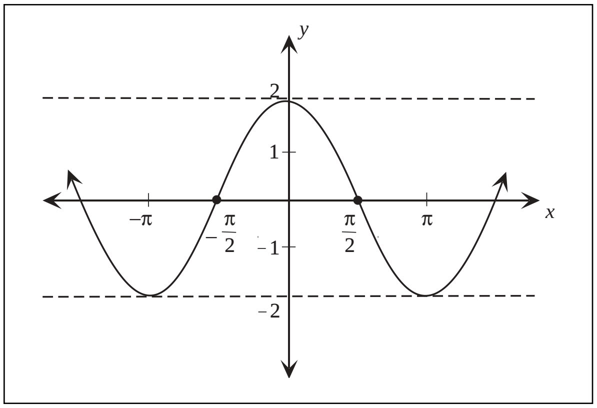
–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

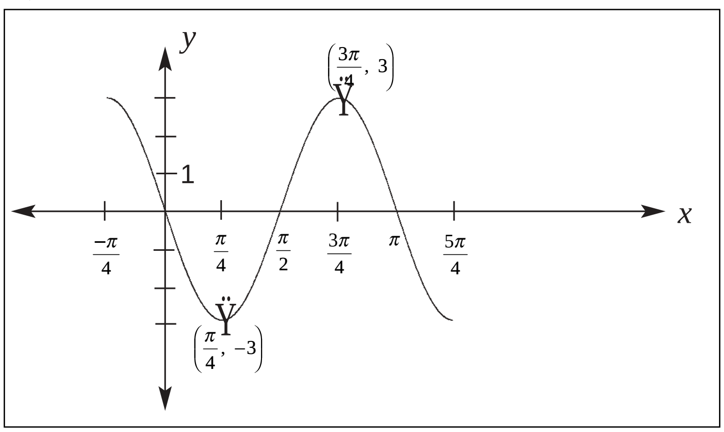
Calcul mental

Le graphique ci-dessous représente une fonction circulaire. Trouve son équation.



Problème

Écris l'équation du graphique illustré ci-dessous en termes de (cos *x*).



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

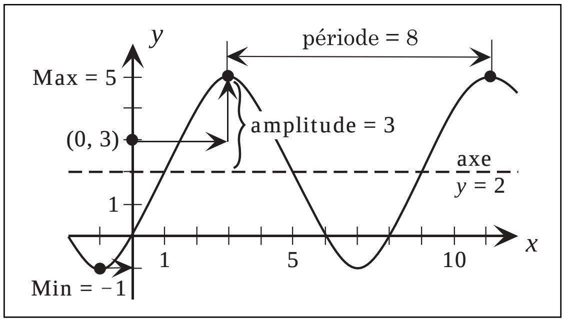
B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **écrire l'équation d'une fonction sinusoïdale dont on connaît le graphique (suite)**

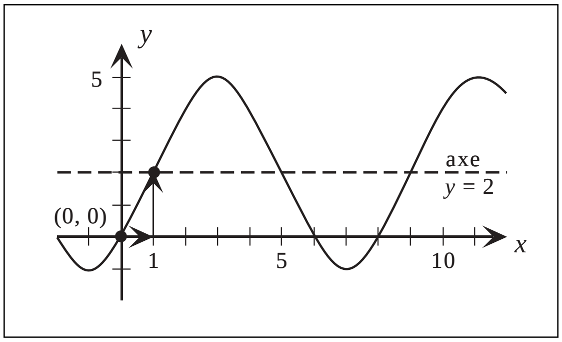
Exemple 1 – suite

Solution – suite



Le graphique de $y = 3 \cos \frac{\pi}{4} x$ subit un mouvement de translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.

$$y - 2 = 3 \cos \frac{\pi}{4}(x - 3)$$



Le graphique de $y = 3 \sin \frac{\pi}{4} x$ subit un mouvement de translation de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut.

$$y - 2 = 3 \sin \frac{\pi}{4} (x - 1)$$

Voici une équation qui définit le graphique illustré :

$$y - 2 = 3 \cos \frac{\pi}{4}(x - 3) \text{ ou } y - 2 = 3 \sin \frac{\pi}{4}(x - 1)$$

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

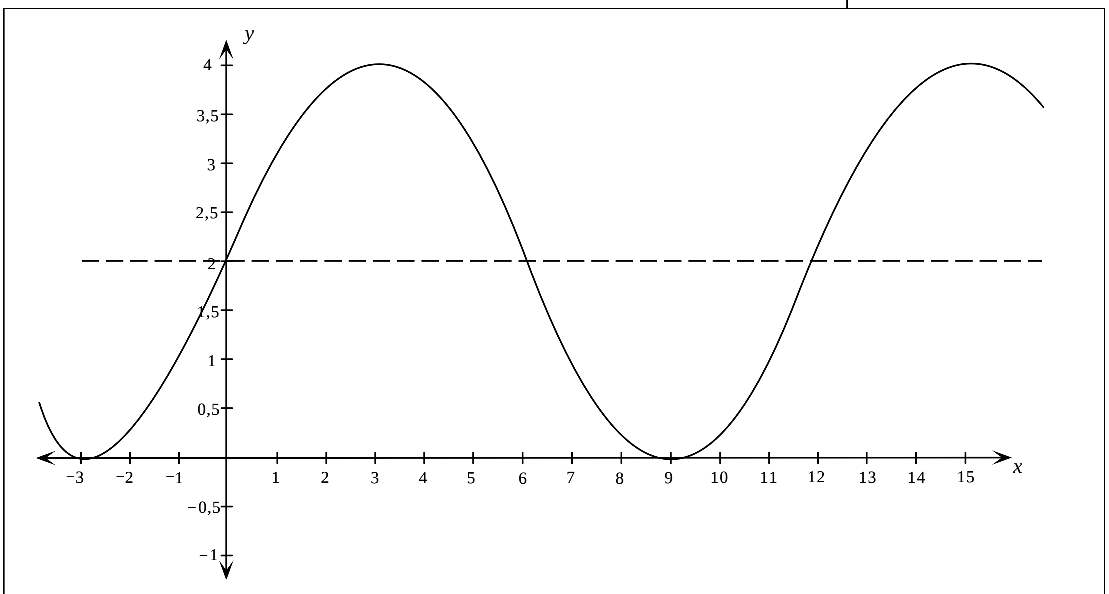
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une fonction sinusoïdale a un point maximal à $(x, y) = (2, 6)$. Le point minimal suivant est situé à (6, 2). Trace le graphique et trouve une équation du graphique.

2. a) Trouve l'amplitude, la période, les translations horizontales et verticales de la fonction sinus illustrée ci-dessous.
   b) Écris une équation pour décrire la fonction sinus.
   c) Écris une équation de la même courbe en termes de la fonction cosinus.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **utiliser des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes**

Les fonctions périodiques sont un outil précieux pour résoudre des problèmes. Voici deux exemples qui le démontrent :

Exemple 1

Dans une ville de la Saskatchewan, le lever du soleil le plus tardif se produit le 21 décembre, à 9 h 15. C'est le 21 juin qu'il se lève le plus tôt, à 3 h 15. L'heure du lever du soleil à d'autres moments de l'année est établie au moyen d'une équation sinusoïdale. Remarque : En Saskatchewan, l'heure n'est jamais avancée.

a) Quelle équation décrit l'heure des levers de soleil?

b) Détermine l'amplitude et la période de l'équation des levers du soleil.

c) Utilise cette équation pour prédire l'heure du lever du soleil le 9 avril.

d) Quelle est l'heure moyenne des levers de soleil durant l'année?

Solution

a) $f(x) = 3\cos \dfrac{2\pi}{365}(x + 10) + 6{,}25$

où x = le nombre de jours de l'année

b) l'amplitude est 3 et la période est 365

c) $f(99) = 5{,}35$ ou 5 h 21

d) 6,25 ou 6 h 15

Exemple 2

La profondeur de l'eau dans un port est définie par l'équation $p(t) = -4{,}5 \cos (0{,}16\pi t) + 13{,}7$, où $p(t)$ correspond à la profondeur en mètres et t au temps en heures, après la marée basse.

a) Trace la graphique de $p(t)$.

b) Quelle est la période de la marée, entre chacune des marées hautes?

c) Pour qu'un vraquier accoste en toute sécurité, l'eau doit avoir au moins 14,5 mètres de profondeur. Pendant combien d'heures, à l'intérieur d'un cycle, le vraquier peut-il accoster en toute sécurité?

– *suite*

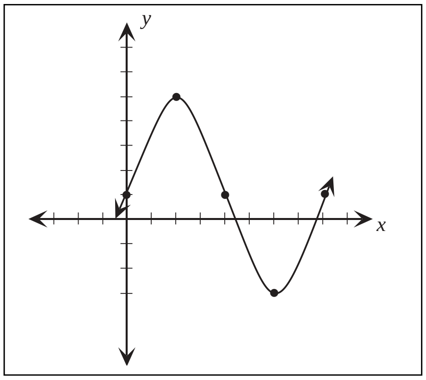
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

L'ordre des transformations et des réflexions influence-t-il le graphique obtenu? Justifie ta réponse.

Problème

1. 

Un professeur de mathématiques, M. Vermette, indique à sa classe que l'équation du graphique illustré ci-dessus est :

$$y = -4\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1.$$

Darcy, le petit futé de la classe, réplique aussitôt : Non ! L'équation devrait s'écrire :

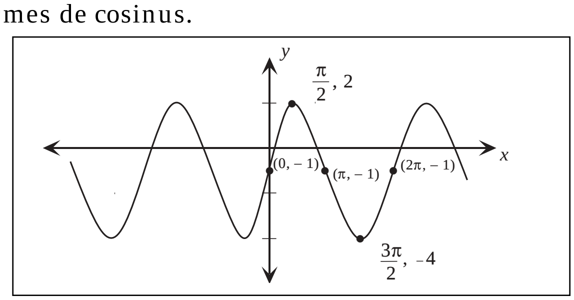
$$y = 4\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1.$$

Patrice n'est pas d'accord : Non, l'équation devrait être formulée ainsi :

$$y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

a) Qui a raison? Justifie ta réponse.
b) Lyne ajoute : « Je peux écrire une équation de ce graphique qui comprendrait la fonction sinus. » Écris cette équation.

2. Écris deux équations trigonométriques pour le graphique ci-dessous, la première en termes de sinus et l'autre en termes de cosinus.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

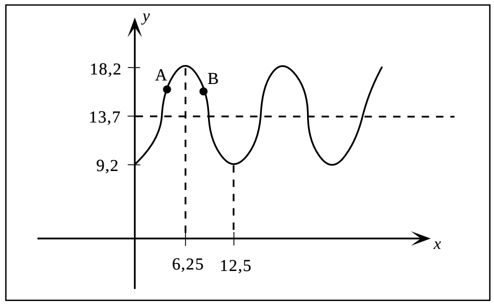
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **utiliser des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution

a)



b) 12,5 heures

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{0{,}16\pi}$$
$$= 12{,}5 \text{ heures}$$

c) Résous :
$$14{,}5 = -4{,}5 \cos(0{,}16\pi t) + 13{,}7$$
$$0{,}8 = -4{,}5 \cos(0{,}16\pi t)$$
$$\cos(0{,}16\pi t) = 1{,}777778$$
$$0{,}16\pi t = 1{,}7495$$
$$t = 3{,}48 \text{ heures}$$

Selon le graphique :
Le point A se trouve à $t = 3{,}48$.
Le point B se trouve à $t = 6{,}25 + (6{,}25 - 3{,}48) = 9{,}02$.
Le vraquier peut accoster en toute sécurité pendant $9{,}02 - 3{,}48 = 5{,}54$ heures.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

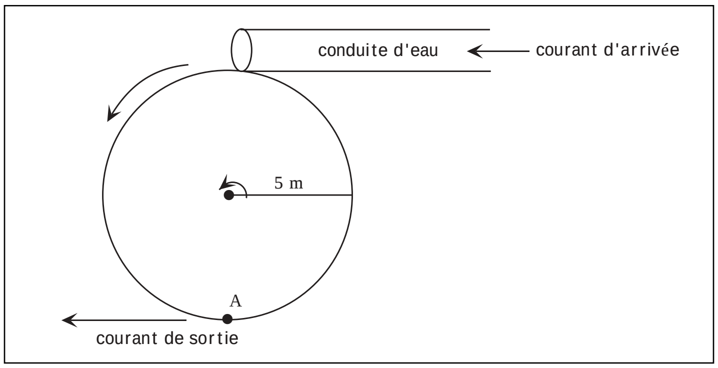
NOTES

Inscription au journal

Si $f(x) = p \cos [q(x + r)] + t$, explique l'effet des quatre constantes (p, q, r, et t) sur le graphique de la fonction.

Problèmes

1. La roue à eau illustrée dans la figure ci-dessous tourne à une vitesse de cinq révolutions toutes les quatre minutes. La partie inférieure touche la surface de l'eau (qui s'écoule).



   a) Le point A se trouve sur la roue. Trace un graphique exprimant la hauteur du point A par rapport à la surface du courant de sortie en fonction du temps à partir de $t = 0$ (temps en secondes).

   b) Écris une équation pour cette fonction.

2. La température maximale moyenne à Vancouver suit une courbe sinusoïdale; le point le plus élevé se trouve à 23,6 °C le 26 juillet, et le plus bas à 4,2 °C, le 26 janvier.

   a) Illustre cette variation à l'aide d'une équation en termes de sinus ou de cosinus.

   b) Quelle est la température maximale prévisible pour le 26 mai?

   c) Donne le nombre de jours où la température maximale prévisible sera 21,0 °C ou plus.

   d) Explique pourquoi diverses équations mènent aux mêmes réponses en b) et en c).

3. Beaucoup de populations prédateur-proie, notamment les hiboux-souris ou les oiseaux-insectes, croissent selon une courbe sinusoïdale. La population la moins nombreuse, P, de prédateurs à un moment t, en jours, est établie à 7 000 le 26 janvier, et la population la plus nombreuse est établie à 13 000 le 26 juillet. Écris deux équations sinusoïdales qui représentent la fonction P(t). L'une d'elles sera une fonction sinus et l'autre une fonction cosinus.