Mathématiques pré-calcul Secondaire 4

Programme d'études : document de mise en œuvre

Manitoba Education, Training and Youth
Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba

MATHÉMATIQUES PRÉ-CALCUL
SECONDAIRE 4

Programme d'études :
document de mise en œuvre

2001
Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba

Données de catalogage avant publication (Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba)

510.0712 Mathématiques pré-calcul, Secondaire 4 : Programme d'études, document de mise en œuvre

ISBN 0-7711-2665-4

1. Mathématiques -- Étude et enseignement (Secondaire) – Manitoba.
2. Programme d'études -- Manitoba. I. Manitoba. Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse.

Afin d'éviter la lourdeur qu'entraînerait la répétition systématique des termes masculins et féminins, le présent document a été rédigé en utilisant le masculin pour désigner les personnes. Les lectrices et les lecteurs sont invités à en tenir compte.

REMERCIEMENTS

Le Bureau de l'éducation française tient à remercier tous ceux et celles qui ont contribué à la réalisation de ce document. Entre outre, nous reconnaissons le travail de nos collègues anglophones dont le document *Senior 4 Pre-Calculus Mathematics (40S), A Foundation for Implementation,* a servi comme document de travail.

Nous remercions tout particulièrement les personnes suivantes qui ont travaillé à l'élaboration de ce document.

Comité d'élaboration

Lizanne Comeau	École communautaire Réal-Bérard Division scolaire franco-manitobaine nº 49
Abdou Daoudi	Bureau de l'éducation française Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba
Marcel Druwé	Bureau de l'éducation française Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba
Rénald Gagnon	Collège régional Gabrielle-Roy Division scolaire franco-manitobaine nº 49
David Jubinville	Institut collégial Miles Macdonell Division scolaire River East nº 9
Normand Lavack	École St-Joachim Division scolaire franco-manitobaine nº 49
Philippe Leclercq	Institut collégial Vincent Massey Division scolaire Fort Garry nº 5
Viviane Léonard	Collège Béliveau Division scolaire St-Boniface nº 4
David Milette	Collège Lorette Collegiate Division scolaire Rivière-Seine nº 14
Gilles Vermette	Collège Jeanne-Sauvé Division scolaire St-Vital nº 6

Mise en page et révision linguistique

Rénald Gagnon	Collège régional Gabrielle-Roy Division scolaire franco-manitobaine nº 49
Marie Strong	Bureau de l’éducation française Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba

Table des matières

Introduction

INTRODUCTION

Fondement

Notre monde change très rapidement. À l'orée du XXI^{e} siècle, la science et la technologie progressent à un rythme jamais vu. Les pays industrialisés sont le foyer de bouleversements sociaux et économiques si profonds que leurs fondements mêmes en sont affectés. Des économies qui étaient jadis essentiellement axées sur l'industrie changent de cap et se tournent résolument vers la technologie et l'information.

Pour relever tous les défis posés par cette nouvelle société, les diplômés du secondaire ont besoin d'une base très solide en mathématiques. Ils doivent comprendre jusqu'à quel point les concepts mathématiques imprègnent les activités quotidiennes, qu'elles soient liées au monde des affaires, à l'industrie, à l'environnement ou à la technologie. Ils doivent saisir en outre à quoi les mathématiques sont utiles et à quel point cette science est diversifiée. À cet égard, les élèves du secondaire doivent acquérir des aptitudes pour la réflexion créative, la résolution des problèmes et la gestion des données. Ils doivent aussi continuer à parfaire leurs qualités de collaboration, d'interaction et de communication.

Nature des mathématiques au secondaire

La réforme du programme de mathématiques du secondaire est inspirée du document du National Council of Teachers of Mathematics, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, publié en 1989. On y propose d'inscrire l'enseignement des mathématiques dans un contexte large, qui tient compte des attentes de notre société moderne. De nos jours, les employeurs et les établissements postsecondaires sont à la recherche de diplômés qui

- comprennent les composantes mathématiques sous-jacentes d'un problème;
- peuvent élaborer une stratégie de résolution du problème;
- ont recours à diverses techniques pour résoudre le problème;
- travaillent en collaboration avec d'autres pour résoudre le problème.

Selon la tendance, les diplômés changeront de carrière au moins quatre ou cinq fois au cours de leur vie. Cette réalité impose de former une main-d'œuvre capable de faire de nouveaux apprentissages tout au long de sa vie. C'est pourquoi les programmes de mathématiques du secondaire doivent favoriser une forme dynamique d'apprentissage et mettre l'accent sur des résultats d'apprentissage plus larges, accessibles à tous les élèves. À cet égard, il faut leur proposer des expériences pédagogiques qui leur permettront

- de perfectionner leur aptitude à résoudre des problèmes;
- de gagner de la confiance dans leur capacité d'apprendre les mathématiques;
- de réfléchir et de communiquer selon les règles propres aux mathématiques;
- d'acquérir des attitudes positives par rapport à l'utilisation et à la valeur des mathématiques dans la société.

La compétence des élèves dans ce domaine peut être renforcée par un programme de mathématiques qui met l'accent sur les points suivants :

- ***Faire* des mathématiques au lieu de tout simplement *connaître* les mathématiques**

  Les mathématiques, c'est plus que tout simplement maîtriser un ensemble d'aptitudes et de concepts. La recherche dans le domaine de l'éducation offre des preuves écrasantes que les élèves apprennent les mathématiques lorsqu'ils bâtissent leur propre compréhension mathématique. Pour comprendre ce qu'ils apprennent, les élèves doivent *examiner, représenter, transformer, résoudre et appliquer* (National Council of Teachers of Mathematics, 1989). Cela se produit plus facilement lorsque les élèves travaillent en groupes, entreprennent des discussions et font des exposés.

- **Avoir des applications à contenu vaste dans de nombreux domaines**

  Certains aspects des mathématiques ont changé au cours de la dernière décennie. Les techniques quantitatives ont pénétré presque toutes les disciplines intellectuelles. La capacité d'un ordinateur de traiter des nombres importants de données a rendu la quantification et l'analyse logique de l'information possible dans des domaines tels que les affaires, l'économie, la biologie, la médecine et la sociologie.

  Bien que les sujets traditionnels demeurent des parties importantes des programmes de mathématiques du deuxième cycle du secondaire, l'importance s'est déplacée. Un programme qui était à une époque dominé par la mémorisation de faits isolés et de procédure et par l'abondance de techniques crayon et papier, met maintenant l'accent sur la compréhension conceptuelle, les représentations multiples et les liens, la modélisation mathématique et la résolution de problèmes.

- **Utiliser la technologie et étendre les domaines auxquels les mathématiques s'appliquent**

  Cet accent a débouché sur la croissance et les changements dans la discipline même des mathématiques.

L'indice de la technologie sur les programmes de mathématiques peut se résumer comme suit :

— Certaines applications mathématiques sont devenues *plus importantes* parce que la technologie l'exigeait.

— Certaines applications mathématiques sont devenues *moins importantes* parce que la technologie les a remplacées.

— Certaines applications mathématiques sont devenues *possibles* parce que la technologie le permettait.

La technologie n'a pas tout simplement rendu les calculs et la représentation graphique plus faciles, elle a modifié la nature même des problèmes mathématiques et les méthodes utilisées pour les examiner. En utilisant la technologie pour la représentation graphique, les idées tirées de l'algèbre et de la géométrie peuvent être clairement intégrées. Par conséquent, il est important que les élèves aient accès à des calculatrices à affichage graphique et à des ordinateurs pour profiter de la modélisation et de la visualisation de problèmes mathématiques.

- **Des stratégies et contextes pédagogiques qui créent un climat reflétant le point de vue constructif et actif du processus d'apprentissage**

  Ce que les élèves apprennent est relié à la façon dont ils apprennent. L'apprentissage des mathématiques fait intervenir l'utilisation d'un ensemble d'outils intellectuels intégrés pour comprendre des situations mathématiques. Cela nécessite de nouvelles formes d'organisation de la salle de classe, de nouveaux modèles de communication et de nouvelles stratégies pédagogiques. L'enseignant n'est plus le seul prestateur de connaissances, il est un facilitateur. Cela signifie que l'apprentissage ne se produit tout simplement pas par absorption passive. Les élèves assimilent de façon active la nouvelle information et créent leur propre signification. Cela fait intervenir

  — la création d'un environnement de classe favorable à l'enseignant et à l'apprentissage des mathématiques;

  — l'établissement d'objectifs et la sélection ou la création de tâches mathématiques pour aider les élèves à atteindre ces objectifs;

  — la stimulation et la gestion du discours en salle de classe de sorte que l'enseignant et les élèves ont une idée précise de ce qui est enseigné et de ce qui est appris;

  — l'analyse et l'évaluation de l'apprentissage des élèves, les tâches mathématiques et l'environnement afin de prendre des décisions pédagogiques continues.

Cet accent nécessite une programmation variée des mathématiques :

— devoirs de groupe et individuels;

— discussion entre l'enseignant et les élèves;

— projets appropriés;

— pratique à l'égard des méthodes mathématiques;

— enseignement direct par l'enseignant.

Des contextes pédagogiques qui incluent des environnements d'apprentissage variés encouragent le développement de comportements coopératifs précis. Les élèves peuvent travailler ensemble à s'entraider et, en même temps, terminer des projets individuels. Les élèves développent des stratégies et des aptitudes en posant des questions, en écoutant, en démontrant et expliquant leur solution, en sachant ce que les autres pensent et en déterminant la façon de terminer un projet.

Les occasions pour les élèves d'apprendre les mathématiques sont une fonction du contexte, des sortes de tâches et du discours auxquels ils participent.

Résumé des changements dans les pratiques pédagogiques

Résumé des changements dans les pratiques pédagogiques

Attention diminuée	Attention accrue
L'enseignant et les manuels comme sources exclusives de connaissances	Participation active des étudiants à l'acquisition et à l'application des mathématiques
Apprentissage par cœur de faits et de procédures	Résolution de problèmes comme un moyen et un objectif de l'enseignement
Périodes prolongées où des personnes s'entraînent à des tâches courantes	Utilisation d'exercices cumulatifs et de tests
Enseignement fondé presque complètement sur l'enseignant	Utilisation quotidienne de calcul mental
Test du chapitre à l'unité	Utilisation d'un éventail de formats pédagogiques (petits groupes, explorations, enseignements par les paires, classe entière, projets)
Test pour la seule raison de donner des notes	Utilisation des ordinateurs et calculatrices comme outils pour apprendre et faire des mathématiques
	Communication d'idées mathématiques, de vive voix et par écrit, par les élèves
	Établissement et application des liens aux sujets mathématiques
	Le maintien systématique de l'apprentissage des étudiants avec une révision intégrée dans les nouveaux sujets et problèmes

Objectifs des élèves de Secondaire 4 - Mathématiques Pré-calcul

Les objectifs des élèves du *Secondaire 4 - Mathématiques pré-calcul* ont été influencés par le *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* mis au point par le National Council of Teachers of Mathematics. Ces objectifs suggèrent que les élèves soient exposés à des expériences variées, interreliées, qui les encouragent à comprendre et à apprécier le rôle des mathématiques dans la société. L'incorporation de ces objectifs vise l'acquisition du pouvoir mathématique, qui accroît la capacité de comprendre des problèmes dans une société technologique. Les objectifs de *Secondaire 4 - Mathématiques pré-calcul* sont les suivants :

- **Les élèves devraient apprendre à apprécier les mathématiques.** Ils devraient être en mesure de comprendre l'influence des mathématiques sur l'histoire et les nombreuses répercussions que cela a eu dans leur vie. En outre, ils devraient être en mesure de voir les liens entre les mathématiques et d'autres disciplines et l'impact de ces liens sur la société.
- **Les élèves devraient avoir confiance dans leurs aptitudes mathématiques.** Ils devraient apprendre à faire preuve de confiance et de compétence dans leur capacité de résoudre des problèmes et d'appliquer la modélisation mathématique à des problèmes réels courants.
- **Les élèves devraient devenir des solutionneurs de problèmes mathématiques.** Ils devraient être en mesure de résoudre un éventail de problèmes mathématiques courants et non courants. Ils devraient être en mesure de reconnaître et d'utiliser les représentations multiples à un problème, et d'identifier et d'utiliser les liens non seulement au sein des mathématiques, mais aussi entre les mathématiques et d'autres disciplines.
- **Les élèves devraient apprendre à communiquer de façon mathématique.** Ils devraient analyser et clarifier leur pensée mathématique, exprimer de vive voix et par écrit des idées et lire des mathématiques avec compréhension.
- **Les élèves devraient apprendre à raisonner de façon mathématique et à avoir un esprit critique.** Ils devraient être en mesure de démontrer des aptitudes de raisonnement logique qui comprennent l'émission et la vérification de conjectures, de juger la validité d'arguments et de construire des arguments simples valides.
- **Les élèves devraient acquérir des compétences dans les concepts et développer des habiletés de base.**

Fondements mathématiques

Secondaire 3 - Mathématiques pré-calcul, en s'alignant sur les résultats du *Du cadre commun des programmes d'études de mathématiques M-12* (1995), a été construit autour de plusieurs processus mathématiques. Ces processus devraient être évidents dans chaque groupe et aider à mettre l'accent sur la ***nature cumulative*** du présent programme.

1. Raisonnement mathématique

Le pouvoir de raisonner aide les élèves à comprendre les mathématiques, à avoir un esprit logique et à convaincre les autres.

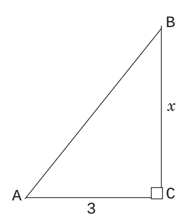
Le raisonnement inductif aide les élèves à explorer et à émettre des conjectures à partir d'activités qui permettent des généralisations à partir d'un modèle d'observation.

Le raisonnement déductif aide les élèves à vérifier les conjectures et à concevoir les arguments qui servent à valider le raisonnement. Le raisonnement déductif construit un ensemble structuré de connaissances.

Les élèves devraient en arriver à apprécier le rôle de chaque type de raisonnement en mathématique et dans des situations externes aux mathématiques. Il y a un potentiel considérable de transfert entre le raisonnement mathématique et la logique nécessaire pour résoudre des problèmes dans la vie de tous les jours. Le fait d'étendre l'utilité du raisonnement inductif et du raisonnement déductif au-delà de la géométrie et dans des domaines tels que l'algèbre et la gestion des données donne aux élèves l'occasion de développer davantage leurs aptitudes en raisonnement.

Exemples

- Vérifie l'identité : $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.
- Démontre que l'aire d'un secteur d'un cercle est définie par $A = \dfrac{1}{2}\theta r^2$, où r représente le rayon et θ l'angle au centre exprimé en radians.
- Soit le Δ ABC. Démontre que 3(sin2 A)(sec A) $= \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.



- Si logb $x = n^2$ et $\log_x b = \frac{4}{n}$, démontre que $n = \frac{1}{4}(b > 0,\ b \neq 1)$.
- Démontre que $\frac{n!r}{(n-r)!r!} = \frac{(n-r)!n}{(n-r)!(r-1)!}$.

2. Calcul mental et estimations

Le calcul mental est la pierre angulaire de l'estimation. Les élèves ont besoin de savoir quand et comment estimer. Le contexte d'un problème aide à déterminer quand il est nécessaire ou souhaitable d'avoir une réponse exacte ou une estimation de cette réponse. Quelques minutes par jour devraient être consacrées à la pratique du calcul mental. On s'attend à ce que les élèves du deuxième cycle du secondaire fassent rapidement du calcul mental. La pratique quotidienne aidera les élèves à développer la capacité d'effectuer automatiquement des habiletés telles les calculs numériques, les manipulations algébriques, les estimations et le rappel de faits.

Exemples

- Si le graphique d'une fonction impaire passe par le point (1, –3), peux-tu trouver un autre point?
- Considère les expressions suivantes :

  a) $\sin\frac{\pi}{3}$

  b) $\cos\frac{5\pi}{6}$

- À quelles valeurs de θ dans [0, 2ρ] tan $\theta = 1$ correspond-il?
- Trouve la forme exponentielle : $\log_8 64 = 2$.
- Nomme la section conique représentée par $25x^2 - 16y^2 - 50x - 375 = 0$.
- Évalue ${}_4P_2$.

3. Résolution de problèmes

La résolution de problème doit être le cœur des mathématiques à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques. Le développement de la capacité de chaque élève de résoudre des problèmes est essentiel. Avant de parvenir au deuxième cycle du secondaire, il peut être utile de faire la distinction entre des objectifs conceptuels, procéduraux et de résolution de problèmes pour les élèves. Une fois qu'un élève est au deuxième cycle du secondaire, ces distinctions commencent à devenir floues en tant que conséquence naturelle de la maturité mathématique. La résolution de problèmes mathématiques sert à répondre aux questions soulevées dans la vie de tous les jours, par les sciences physiques et sociales, les activités, le génie et les mathématiques elles-mêmes.

Dans *Secondaire 4 - Mathématiques pré-calcul*, on devrait utiliser des problèmes et des applications pour introduire de nouvelles idées, pour développer une compréhension de concepts et de procédures, pour mettre en application des habiletés et des processus acquis antérieurement et pour renforcer les liens entre des sujets au sein des mathématiques et dans d'autres domaines.

Exemples

- Pour connaître la profondeur de l'eau dans un port, il faut développer l'équation $d(t) = -4{,}5 \cos (0{,}16\pi) + 13{,}7$, où d correspond à la profondeur en mètres et t au temps en heures, après la marée basse. Pour qu'un vraquier accoste au quai en toute sécurité, l'eau doit avoir une profondeur d'au moins 14,5 mètres. Pendant combien d'heures par cycle le vraquier peut-il accoster en toute sécurité?
- Sam a inhalé des vapeurs toxiques. Après 24 heures, son échantillon de sang montre encore une concentration de poison de 3,69 microgrammes par centimètre cube. Après 34 heures, la concentration a diminué à 2,25 microgrammes par centimètre cube. Il pourrait subir de graves dommages physiques si la concentration du poison excède 12,83 microgrammes par centimètre cube. Est-ce que la concentration est supérieure à cette quantité? Explique pourquoi. (Considère que la décroissance est exponentielle.)

4. Liens

Dans le contexte de *Secondaire 4 - Mathématiques pré-calcul*, les élèves ont besoin d'expériences nombreuses et variées pour apprécier l'utilité des mathématiques. En même temps, les élèves ont besoin d'explorer les liens au sein des mathématiques tels ceux faits en travaillant avec des représentations multiples du même concept. Ces liens peuvent être faits à partir des mathématiques vers d'autres disciplines, que l'on peut considérer comme des applications, et à partir des mathématiques vers des expériences quotidiennes. En mathématique, les élèves ont besoin de voir les relations entre les différents sujets tels l'algèbre et la géométrie. Les élèves commencent à considérer les mathématiques comme un tout intégré lorsque des idées mathématiques sont reliées les unes aux autres par des représentations concrètes, graphiques et symboliques.

Exemples

- Évalue $16^{\cos\frac{2\pi}{3}}$.
- Trace le graphique des deux côtés de l'équation suivante :
  $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \tan x \sin x$. Que remarques-tu au sujet des graphiques? Vérifie algébriquement que l'équation ci-dessus est une identité.
- Soit un taux d'intérêt de 3,5 %. Supposons que tu as 10 000 $ à investir. Construis un tableau au moyen d'un tableur, où tu inscris l'année, le total des intérêts et le total du montant accumulé pendant 20 années, à taux d'intérêt simple. Trace le graphique des paires ordonnées (année, montant total). Construis un autre tableau pour illustrer les résultats si le même montant d'argent est investi au même taux d'intérêt composé, calculé une fois par année. Trace le graphique de ces nouvelles données sur le même système d'axes. Compare les deux graphiques et, dans un paragraphe, explique les similarités et les différences entre les deux.

5. Communication

Une participation active à des tâches mathématiques significatives facilite l'acquisition d'aptitudes en communication qui sont importantes à la compréhension conceptuelle des mathématiques. Les élèves ont besoin de participer à des activités qui leur donnent des occasions de discuter, d'écouter, de poser des questions et de résumer. C'est grâce à ces occasions que les élèves deviennent plus habiles à expliquer de quelle façon ils ont obtenu une réponse, les difficultés qu'ils ont rencontrées pour résoudre un problème, ou les étapes qu'ils estimaient nécessaires pour vérifier une généralisation qu'ils avaient découverte. Au deuxième cycle du secondaire, les élèves vont acquérir plus d'expérience dans l'utilisation d'un langage mathématique correct, qui fait partie intégrante de l'étude des mathématiques.

Exemples

- Compare les graphiques des équations $y = 2 \ln x$ et $y = \ln(x^2)$. Y a-t-il uniformité ou contradiction avec le théorème de la puissance des logarithmes? Explique ta réponse.
- Explique à un ami qui a manqué le cours pourquoi ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.
- L'équation $\log a + \log b - 2 \log c = 0$ est écrite au tableau. L'enseignant a posé la question suivante : « Peux-tu trouver les valeurs entières de a, b et c qui vérifient l'équation? ».

Daisy affirme que « a = 3, b = 12, et c = 6 sont des solutions ». Sans utiliser une calculatrice, démontre qu'elle dit vrai.

Marie dit : « J'ai découvert un autre ensemble de valeurs pour a, b, et c, où $a = 5$. » Trouve les valeurs de b et de c qu'elle pourrait utiliser. Trouve un autre ensemble de valeurs pour b et c qu'elle pourrait utiliser.

L'enseignant a demandé aux élèves de trouver un autre ensemble de valeurs pour a, b et c qui vérifient l'équation. Trouve cet ensemble de valeurs.

George dit : « Je crois que l'équation est vraie quand $a = b = c$. » Harry dit : « Dans certaines solutions, $a = b = c$, mais l'équation n'est pas vérifiée. » Trouve une de ces valeurs.

Décris l'ensemble de toutes les solutions de a, b et c.

6. Technologie

Au moment où la société passe au XXI^e^ siècle, les élèves ont de plus en plus accès à des calculatrices et à des ordinateurs en salle de classe. Ces technologies sont des outils qui simplifient, mais n'effectuent pas, la tâche à accomplir. Ils peuvent accroître le pouvoir mathématique des élèves en exposant un éventail de problèmes et de sujets non explorés auparavant. La nouvelle technologie a rendu les calculs et la représentation graphique plus simples, et a modifié la nature des problèmes que les élèves peuvent examiner, ainsi que les méthodes qu'ils peuvent mettre en application pour ces examens.

On peut utiliser les calculatrices et les ordinateurs pour

- développer des concepts;
- explorer et démontrer des motifs et des rapports mathématiques;
- organiser et afficher des données;
- aider à la résolution de problèmes et par le fait même promouvoir l'indépendance;
- encourager les élèves à poser des questions et à être créatifs;
- diminuer le temps consacré à des calculs fastidieux;
- créer des affichages de géométrie;
- simuler des situations.

Exemple

- Quel sera l'effet sur le graphique de $y = \sin bx$ si tu changes la valeur de b? Essaie six valeurs différentes de b et explique ce que tu observes sur les graphiques imprimés. Compare tes graphiques et tes explications avec ceux d'un coéquipier. Dans un paragraphe, explique ce que toi et ton coéquipier avez observé.

- Posons la série suivante :

  $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

  et les sommes partielles suivantes associées à la série :

  $$S_1=\frac{1}{2}$$

  $$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

  $$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

  $$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

  Construis une feuille de calcul qui affichera les 20 premiers termes de la série et les sommes partielles associées. Que remarques-tu? Répète le processus pour chacune des séries suivantes :

  a) 2 + 4 + 8 + 16 + ...

  b) 6, 3, 1.5, 0,75, ...

  c) $\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},\frac{16}{81},\ldots$

  d) $\frac{8}{27},\frac{4}{9},\frac{2}{3},1,\ldots$

  Quelles conclusions peux-tu tirer de tes explorations?

7. Visualisation

L'environnement mathématique est plein d'images. L'utilisation des images dans l'étude des mathématiques donne aux élèves l'occasion de comprendre des concepts mathématiques et de faire des liens entre eux.

La géométrie analytique décrit des figures de façon algébrique et constitue un outil pour la visualisation de relations algébriques. L'analyse et l'interprétation de données à l'aide d'un résumé visuel aident à comprendre les données et à faire des prévisions à partir d'elles. L'utilisation de calculatrices et de logiciels aide à la visualisation de concepts grâce aux capacités graphiques.

Exemples

- Utilise un outil graphique pour tracer le graphique de $y = \tan x$ et $y = \sin x \tan x$ dans $[0, 2\pi]$. Trouve les points d'intersection.

Résous algébriquement l'équation $y = \tan x - \sin x \tan x$, dans $[0, 2\pi]$. Que remarques-tu au sujet des points d'intersection et des solutions de l'équation? Explique ta réponse.

Évaluation

En évaluant les élèves du *Secondaire 4 - Mathématiques pré-calcul*, on incite les enseignants à utiliser un éventail de techniques et à fournir aux élèves un choix dans leur évaluation. Ces deux suggestions visent à donner aux élèves de la souplesse et la prise en charge de leur apprentissage.

L'un des scénarios d'évaluation possible comprend des devoirs, des travaux en classe, la création d'un dossier de présentation, des projets et des analyses, ainsi que des tests et des épreuves écrits.

1. Tests

Il est recommandé d'administrer les tests à des intervalles réguliers, par exemple toutes les deux semaines, et non pas nécessairement à la fin d'une matière ou d'une unité. Tous les tests devraient être cumulatifs et inclure des opérations mentales, des questions ouvertes et des applications qui exigent de faire appel à de nombreuses stratégies de résolution de problèmes.

2. Projets et recherches

On devrait demander aux élèves de faire des projets à différents moments. Il pourrait s'agir par exemple de faire une enquête et un rapport statistique, ou un rapport sur le travail de mathématicien. On pourrait aussi demander aux élèves de faire une recherche qui leur permettra d'étudier de nouveaux concepts de façon autonome.

3. Dossier de présentation de l'élève

Le dossier de présentation pourra comprendre divers exemples du travail des élèves, y compris des écritures de journal, des solutions à des problèmes, des diagrammes, des réponses à des questions ouvertes, des devoirs, des explications d'algorithmes. Les élèves devraient participer activement à la tenue de leur dossier de présentation, pour qu'ils sentent qu'ils acquièrent de plus en plus la maîtrise de leur apprentissage et de leurs progrès.

Description du document

Le cours de *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 4* est divisé en neuf unités. L'enseignant devra veiller à faire des liens entre chacune des unités, en appliquant des concepts étudiés dans une unité à des problèmes étudiés dans d'autres parties du cours. La dernière unité, qui porte sur les statistiques (unité I), est facultative.

Le temps d'enseignement prévu pour le cours *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 4* est de 110 heures, y compris la présentation de nouveau matériel, la révision et l'évaluation. Il n'est pas primordial de faire une révision explicite du matériel des années précédentes (elle n'est pas recommandée en début d'année).

Chaque unité comprend un sommaire des résultats d'apprentissage prescrits, accompagné de remarques et d'explications qui donnent des indications sur ce que les élèves devraient apprendre.

Voici les unités du cours *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 4*, ainsi que la durée estimée pour chacune, en heures :

Mathématiques pré-calcul - Secondaire 4

Unité A :	Fonctions circulaires	18 heures
Unité B :	Transformations	16 heures
Unité C :	Identités trigonométriques	12 heures
Unité D :	Exposants et logarithmes	16 heures
Unité E :	Permutations, combinaisons et théorème du binôme	15 heures
Unité F :	Coniques	11 heures
Unité G :	Calcul des probabilités	15 heures
Unité H :	Suites géométriques	7 heures
Unité I :	Statistique (facultative)	

Format du document

Certaines des expériences ou des problèmes présentés dans ce document mettent en cause le hasard ou des probabilités. Dans certaines familles et dans certaines communautés, le lien entre l'étude des probabilités et les paris peut poser des problèmes. Ainsi, certains parents ou tuteurs seront peu ouverts à l'utilisation de jeux de cartes, de dés ou de prix en argent dans les problèmes et les activités. Dans ces cas, l'enseignant pourra contourner la difficulté en faisant référence à des fiches numérotées, à des cubes numérotés ou à des points ou crédits.

Unité A
Fonctions circulaires

FONCTIONS CIRCULAIRES

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- feront la distinction entre la mesure des angles en radians et en degrés, et ils résoudront des problèmes liés;
- redéfiniront les rapports trigonométriques en tant que fonctions circulaires, en se reportant au cercle unitaire et à un angle en position normale;
- détermineront s'il faut trouver les valeurs exactes ou approximatives des rapports trigonométriques;
- résoudront algébriquement des équations trigonométriques du premier et du second degré dans un domaine donné ou un ensemble de nombres réels;
- résoudront des équations trigonométriques à l'aide d'outils graphiques;
- traceront le graphique de fonctions sinus, cosinus et tangente ainsi que leur inverse et feront l'analyse des asymptotes, de l'amplitude, de la période, du domaine, de l'image et des coordonnées à l'origine.

Méthodes pédagogiques
Les méthodes pédagogiques suivantes favoriseront l'apprentissage des élèves. Ainsi, l'enseignant devrait fournir aux élèves la possibilité :

- d'explorer divers types de mesure d'angles;
- d'établir le lien entre l'angle au centre, la longueur d'arc et un rayon de cercle;
- de faire les liens entre les rapports trigonométriques et les fonctions circulaires;
- de déterminer s'il faut trouver des valeurs trigonométriques exactes ou approximatives;
- de résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré à l'aide d'outils et de façon algébrique;
- de tracer et d'analyser le graphique de fonctions trigonométriques et de leur réciproque;
- d'utiliser les activités pédagogiques différenciées appropriées.

Étude et pratique de l'algèbre
À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe A-1) :

- la simplification d'expressions radicales;
- la décomposition en facteurs de trinômes, la différence des carrés et les facteurs communs;
- les fractions complexes.

Matériel

- outils graphiques
- assiettes en papier mince
- marqueurs de différentes couleurs
- papier cartographique
- papier quadrillé

Temps alloué

- 18 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultats d'apprentissage généraux

Résoudre des équations exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et des identités.

Représenter et analyser les fonctions trigonométriques à l'aide des outils les plus appropriés.

Résultats d'apprentissage spécifiques

A-1 distinguer les mesures en degrés et en radians, et utiliser les deux pour résoudre des problèmes

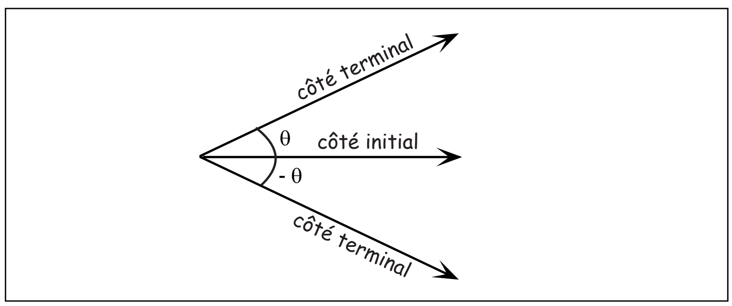
✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de l'unité des activités pédagogiques d'enseignement différencié (annexes A-2 à A-8, p. A-55 à A-61).

- **déterminer les différentes façons de mesurer un angle**

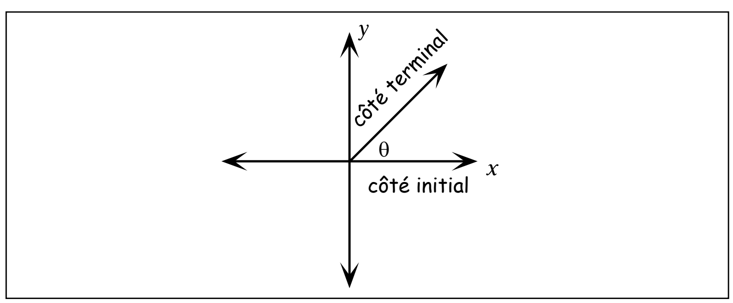
Un ***angle de rotation*** peut être mesuré en faisant pivoter un rayon autour de son point terminal, ou sommet. La position de départ du rayon est le côté initial de l'angle. La position d'arrivée, à la fin de la rotation, devient le côté terminal. Si la rotation est effectuée dans le sens des aiguilles d'une montre, la direction est dite négative. Si la rotation s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, la direction est dite positive.



Sur un plan cartésien, un angle est en position normale si :

a) son ***sommet*** se trouve à l'origine et

b) son ***côté initial*** se trouve du côté positif de l'axe des *x*.



La mesure de l'angle correspond au nombre de rotations effectué depuis le côté initial jusqu'au côté terminal.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4. Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-1 distinguer les mesures en degrés et en radians, et utiliser les deux pour résoudre des problèmes – *suite*

✔ **Communications**
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

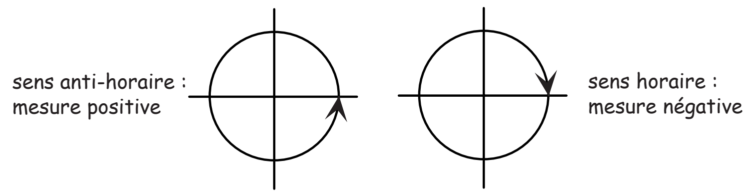
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **déterminer les différentes façons de mesurer un angle (suite)**

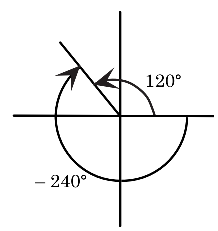
Étant donné qu'une rotation complète, ou révolution, couvre 360°, une mesure de 1 degré (1°) équivaut à $\frac{1}{360}$ d'une révolution.

On utilise les rotations les plus courantes $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$ on les traduit en mesures d'angle de 90°, 60°, 45°, et 30° respectivement.

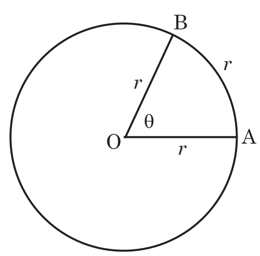
Les angles en position normale peuvent avoir une mesure positive et négative.



Les angles qui partagent le même côté terminal sont dits ***angles coterminaux*** (120° et –240°).



On peut aussi mesurer les angles au moyen des ***radians***. Quand l'arc d'un cercle a la même longueur qu'un rayon, l'angle qui a son sommet au centre et qui intercepte l'arc mesure ***1 radian***.



Cercle O
$\angle AOB = 1$ radian
ou
$\theta = 1$ radian

Étant donné que la circonférence d'un cercle est $2\pi r$, il s'ensuit que

$$1 \text{ révolution} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

et, étant donné que 1 révolution = 360°,
360° = 2π radians.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

1. Trouve un angle qui est coterminal à un angle de 60°.
2. Combien de degrés y a-t-il dans un radian?
3. Si tu as parcouru les trois quarts de la circonférence d'un cercle, combien de radians as-tu parcourus exactement?

Problèmes

1. a) Demandez aux élèves d'élaborer une formule pour mesurer l'aire d'un secteur en fonction de la longueur d'un rayon et de la mesure de l'angle au centre.

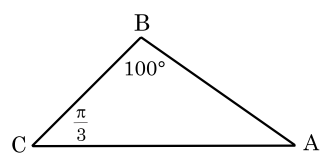
   i) en radians

   ii) en degrés

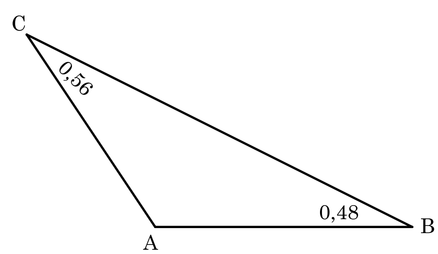
   b) Laquelle de ces formules est la plus facile à mémoriser?

2. Trouve la mesure de $\angle$A dans les deux figures suivantes :

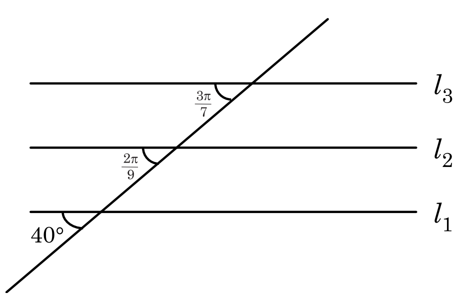
   a)



   b)



3. Quelles droites sont parallèles dans le diagramme ci-dessous?



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-1 distinguer les mesures en degrés et les mesures en radians, et utiliser les deux pour résoudre des problèmes
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **convertir des degrés en radians et vice-versa**

  Étant donné que $180^\circ = \pi$ radians, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ radians et 1 radian = $\left(\frac{180}{\pi}\right)$ degrés.

  Quand aucune unité de mesure d'angle n'est donnée, il faut inférer que l'unité de mesure est le radian (p. ex., $\theta = 3$ indique que θ correspond à 3 radians). Les angles complémentaires et supplémentaires peuvent être exprimés en radians :

  a) Deux angles positifs sont dits ***complémentaires*** si la somme de leur mesure est positifs $\frac{\pi}{2}$ radians (ou 90°).

  b) Deux angles positifs sont dits ***supplémentaires*** si la somme de leurs mesures est π radians (ou 180°).

  Il faut permettre aux élèves d'utiliser des valeurs exactes et approximatives, et de découvrir quand il est approprié d'utiliser une valeur plutôt que l'autre. Sauf mention contraire, encouragez les élèves à trouver la solution d'une fonction trigonométrique sans utiliser leur calculatrice. Si la mesure n'est pas une valeur spéciale ou un multiple, ils pourront utiliser une calculatrice.

  Proposez des problèmes comme les suivants :
  a) Trace un angle de 1 radian et explique comment le rayon et la longueur d'arc sont liés.
  b) Exprime les angles suivants en degrés : $\frac{2\pi}{3}$; 1,6 radians.
  c) Exprime les angles suivants en radians en fonction de π : 180°, 55°.

- **établir les liens entre l'angle au centre, la longueur d'arc et le rayon d'un cercle, et résoudre des problèmes liés**

  L'angle au centre équivaut au rapport entre la longueur de l'arc et le rayon. Si θ correspond à l'angle au centre, s à la longueur de l'arc et r au rayon, alors

  $\theta = \frac{s}{r}$ ou (Cette formule est applicable seulement si θ est exprimé en radians.)

  $s = \theta r$

  Exemple
  Si une roue dont le rayon est 0,5 mètre franchit 1,5 mètre, combien de radians a-t-elle franchis?
  Solution

  $$s = \theta r$$
  $$1{,}5 = \theta(0{,}5)$$
  $$3 \text{ rad} = \theta$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

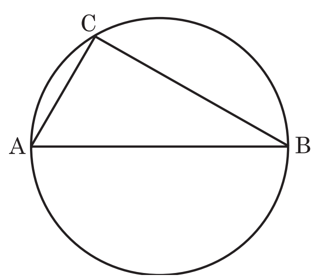
NOTES

Calcul Mental

1. Quel est le complément de $\frac{\pi}{3}$ radians?
2. Quel est le supplément de 30°?
3. Quel est le complément de x°?
4. Quel est le supplément de $(180 - x)$°?

Problèmes

1. Calcule le nombre de radians entre les aiguilles des minutes et des heures d'une horloge indiquant 4 h.
2. Une roue de bicyclette a un diamètre de 0,4 m. Un point à l'extérieur de la jante parcourt 2,6 m. Sur combien de radians la roue a-t-elle tourné?
3. Dans un cercle qui a un rayon de 6 cm, un secteur a un angle au centre de 30°. Quelle est l'aire de ce secteur en centimètres carrés?
4. Une roue tourne sur 140 cm, avec une rotation de 210°. Quelle est la circonférence de la roue?
5. Dans le diagramme ci-dessous, les mesures des angles A et B sont $\frac{\pi}{3}$ et 30° respectivement. Si AC = 6 cm et BC = 8 cm, trouve la circonférence de ce cercle.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

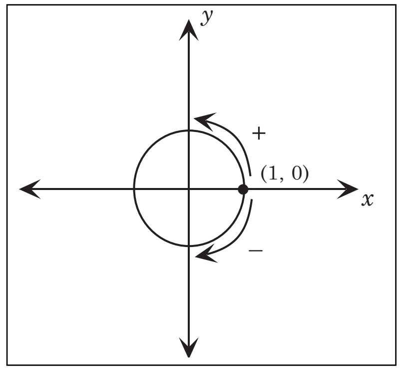
A-2 décrire les trois fonctions trigonométriques primaires ainsi que leurs inverses en tant que fonctions circulaires, en se reportant au cercle unitaire et à un angle en position normale

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **expliquer le concept du cercle unitaire**

  Un cercle unitaire a son centre à l'origine et un rayon de une unité. Son équation est $x^2 + y^2 = 1$.



  Mentionnez les éléments suivants :
  - la position normale de l'arc a son origine à (1,0);
  - l'angle est mesuré positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre;
  - l'angle est mesuré négativement dans le sens des aiguilles d'une montre;
  - on utilise la notation P(θ) pour indiquer le point terminal (à chaque longueur d'arc θ sur le cercle unitaire correspond un seul point P(θ) déterminé par cet arc);
  - P(θ) est redéfini au moyen de la paire ordonnée (x, y).

- **redéfinir les rapports trigonométriques en tant que fonctions circulaires**

  Ces opérations sont effectuées avec les fonctions trigonométriques primaires mais, étant donné que le rayon du cercle unitaire est 1, les définitions sont exprimées par rapport aux coordonnées P(θ).

  Si θ est un arc en position normale et si P(θ) = (x, y) est le point terminal du nombre réel θ, les définitions suivantes s'appliquent.

	Fonction circulaire	Définition
fonctions primaires	sinus θ (sin θ)	coordonnée en y
	cosinus θ (cos θ)	coordonnée en x
	tangente θ (tan θ)	$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
fonctions inverses	cosécante θ (csc θ)	$\frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$
	sécante θ (sec θ)	$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$
	cotangente θ (cot θ)	$\frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul Mental

1. Le point $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ se trouve-t-il sur le cercle unitaire?
2. Dans quel quadrant se trouve P(5)?
3. Indique dans quel(s) quadrant(s) $\csc\theta < 0$ et $\sec\theta > 0$.
4. Trouve un angle coterminal positif correspondant à $-\frac{\pi}{3}$.
5. Définis $\csc\theta$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçons 1, 2 et 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-2 décrire les trois fonctions trigonométriques primaires ainsi que leurs inverses en tant que fonctions circulaires, en se reportant au cercle unitaire et à un angle en position normale
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **redéfinir les rapports trigonométriques en tant que fonctions circulaires (suite)**

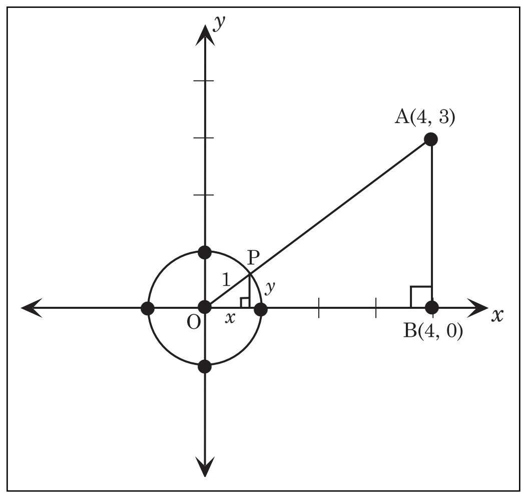
Exemple

Les sommets du triangle OAB sont : O(0, 0); B(4, 0) et A(4, 3). Le cercle unitaire, qui a son centre à (0, 0), croise la droite OA au point P.

a) Utilise des triangles semblables pour déterminer les coordonnées du point P.

b) Utilise des rapports trigonométriques pour trouver le sinus et le cosinus de l'angle AOB.

c) Compare les résultats obtenus en (b) avec les coordonnées du point P.



Solution

a) $4^2 + 3^2 = (OA)^2$

$16 + 9 = (OA)^2$

$5 = OA$

$\frac{y}{3} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

$\frac{x}{4} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

$P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

b) $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$

$\cos \angle AOB = \frac{4}{5}$

c) Les valeurs de sin ∠ AOB et cos ∠ OAB correspondent aux coordonnées en y et en x du point P.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

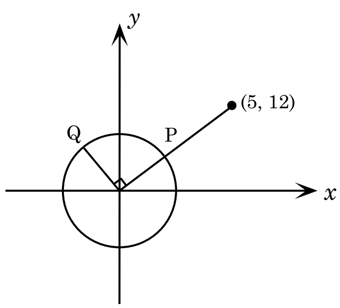
NOTES

Calcul Mental

À quel point le cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$ et les droites $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$ se croisent-ils?

Problème

Sur le cercle unitaire, trouve les coordonnées de P et de Q.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-2 décrire les trois fonctions trigonométriques primaires ainsi que leurs inverses en tant que fonctions circulaires, en se reportant au cercle unitaire et à un angle en position normale
– *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver les autres fonctions circulaires de θ quand une fonction est donnée**

  Dans l'exemple suivant, l'équation du cercle unitaire permet de trouver des fonctions circulaires manquantes.

Exemple 1

Si $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ et θ où $\frac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi$, trouve les autres fonctions circulaires.

Solution

$\sin\theta = y = \frac{-3}{5}$ et P(θ) se trouve dans le quadrant IV.

Utilise l'équation du cercle unitaire :

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = 1$$
$$x^2 + \frac{9}{25} = 1$$
$$x^2 = \frac{16}{25}$$
$$x = \pm\frac{4}{5}$$

mais θ se trouve dans le quadrant IV, $\therefore\ x = \frac{4}{5}$

$$\cos\theta = x = \frac{4}{5}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} \text{ ou } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-3}{4}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{-5}{3} \text{ ou } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{-5}{3}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{5}{4} \text{ ou } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{3} \text{ ou } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-4}{3}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

Si tan $\theta < 0$ et sec $\theta > 0$, quel est le signe de csc θ?

Inscription au journal

Suppose que le cosinus d'un angle est négatif et que tu as trouvé une solution entre 0 et 2π. Explique comment tu peux trouver la deuxième solution.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-2 décrire les trois fonctions trigonométriques primaires ainsi que leurs inverses en tant que fonctions circulaires, en se reportant au cercle unitaire et à un angle en position normale
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver les autres fonctions circulaires de θ quand une fonction est donnée (suite)**

Exemple 2

Si $\cot\theta = -\dfrac{12}{9}$ et $\sin\theta > 0$, trouve les autres fonctions circulaires.

Solution

Étant donné que $\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$, nous sommes dans le quadrant II.

Reporte-toi à l'exemple 1 de la page A-14. P est le point d'intersection du cercle unitaire et du segment entre le point d'origine, à 0, et le point A(–12, 5).

Par conséquent, OA = 13 et les coordonnées de P sont $\left(\dfrac{-12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$.

Donc :

$$\sin\theta = y = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = x = \frac{12}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} \text{ ou } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-5}{12}$$

$$\csc\theta = \frac{13}{5} \text{ ou } \frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{5}$$

$$\sec\theta = \frac{-13}{12} \text{ ou } \frac{1}{\cos\theta} = \frac{-13}{12}$$

$$\cot\theta = \frac{-12}{5} \text{ ou } \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-12}{5}$$

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

1. Si $\sin\theta = \frac{a}{b}$ et $\cos\theta = c$, trouve la valeur de $\tan\theta$.
2. Dans quel quadrant se trouve $P(\theta)$ quand $\theta = 5$?
3. Si $\tan\theta = -1$ et se trouve dans le quadrant II, trouve le produit de $(\sin\theta)(\cos\theta)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

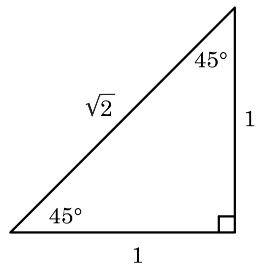
A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver les rapports trigonométriques exactes de 45°**

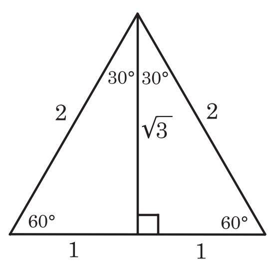
  En utilisant un triangle rectangle isocèle, tu découvres que les rapports trigonométriques d'un triangle dont les angles mesurent 45°, 45° et 90° sont $1 : 1 : \sqrt{2}$.



  Utilise les définitions trigonométriques pour déterminer les rapports trigonométriques.

- **trouver les rapports trigonométriques exacts pour des angles de 30°et de 60°**

  En utilisant un triangle équilatéral dont l'un des côtés mesure deux unités, tu découvres que les rapports trigonométriques d'un triangle dont les angles mesurent 30°, 60° et 90° sont $1 : \sqrt{3} : 2$.



  Utilise les définitions trigonométriques pour déterminer la valeur exacte du rapport trigonométrique.

  Demandez aux élèves de trouver les rapports trigonométriques dans les quadrants II à IV pour les rapports trigonométriques des angles dont les angles relatifs sont des multiples de 30°, 45° et 60°. Les élèves devraient être en mesure de trouver ces valeurs sans recourir à leur calculatrice.

  Remarque : Demandez aux élèves de trouver ces valeurs quand les angles sont exprimés en radians.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul Mental

1. a) Trouve les coordonnées de $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   b) Trouve les coordonnées de P(120°).

2. a) Trouve la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   b) Trouve la valeur exacte de sin 45°.

3. a) Trouve la valeur exacte de $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

   c) Trouve la valeur exacte de cos (–60°).

Choix multiples

1. Trouve toutes les valeurs de θ dans [0, 2π], où sin $\theta < 0$ et cos $\theta \geq 0$:

   a) $\left]\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right[$ b) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

   c) $\left]\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$ d) $\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right[$

2. Le point T sur le cercle unitaire est déplacé à partir de (0,–1), sur une distance de $\frac{5\pi}{6}$ en direction positive. Les coordonnées du point terminal sont :

   a) $\left(\frac{-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

   c) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçons 1, 2, 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver les rapports trigonométriques exacts pour des angles de 30° et de 60° (suite)**

  Demandez aux élèves de remplir un tableau semblable à celui qui apparaît ci-dessous.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin θ									
cos θ									
tan θ									
csc θ									
sec θ									
cot θ									

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
sin θ									
cos θ									
tan θ									
csc θ									
sec θ									
cot θ									

  Remarque : Un tableau similaire devrait être rempli pour des angles exprimés en radians.

- **utiliser les fonctions circulaires pour trouver les valeurs exactes des rapports trigonométriques**

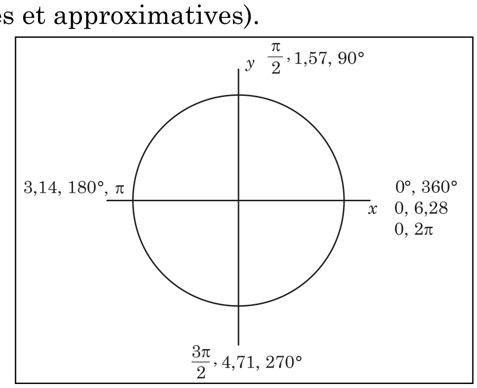
  Cette notion sera présentée au moyen de l'activité « Les assiettes trigonométriques ».

  Les assiettes trigonométriques

  Matériel : • assiettes en carton mince (une par élève)
  • crayons et marqueurs de diverses couleurs

  Méthode

  1. Plie l'assiette le long d'un diamètre, puis le long d'une perpendiculaire afin de marquer l'axe des *x* et l'axe des *y*. Marque les plis au crayon et étiquette les axes. Inscris la mesure des angles en degrés, puis en radians (valeurs exactes et approximatives).



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

Trouve la valeur de θ si $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. (Refais la même opération en considérant l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi$.)

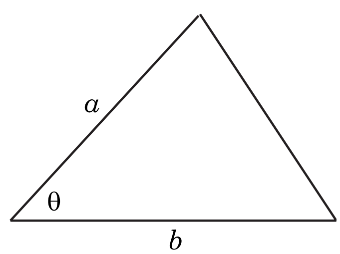
a) $\sin\theta = -1$

b) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan\theta$ n'est pas définie

Problèmes

1. a) Soit un triangle quelconque; avec les données fournies, trouve l'aire du triangle.



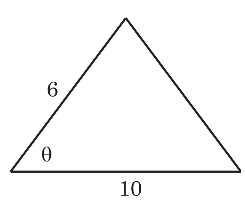
b) Détermine l'aire des triangles donnés si $\theta = 30^\circ, 60^\circ, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$.

c) Démontre que l'aire d'un triangle équilatéral est donnée par :

$$A = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$$

où c est la longueur d'un côté du triangle.

2. Trouve la valeur de θ si l'aire est de 21 unités carrés.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
– suite

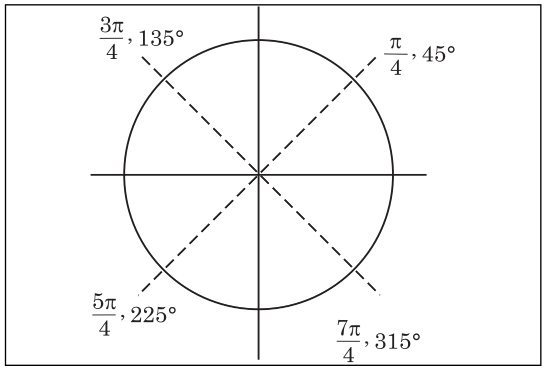
Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

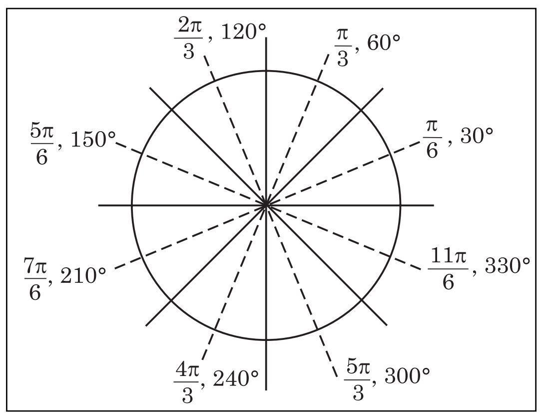
- **utiliser les fonctions circulaires pour trouver les valeurs exactes des rapports trigonométriques (suite)**

  Les assiettes trigonométriques – suite

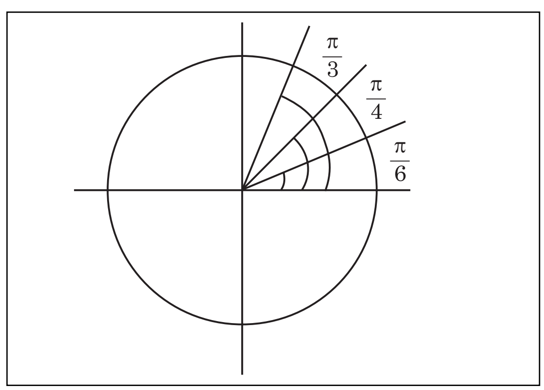
  2. Plie des angles de 45° et répète l'étape 1 en utilisant un crayon de couleur différente.



  3. Plie des angles de 30° en suivant les étapes suivantes : plie l'assiette en quatre quarts puis en trois sections égales; inscris les multiples de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{6}$.



  4. Trace les arcs des angles dans le quadrant I.



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

Si tu parcours les trois quarts de la circonférence d'un poteau de téléphone, quelle sera la mesure de l'angle au centre qui a été formé?

Problème

Trouve la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

a) $\cos 45^\circ \sin 45^\circ - \sin 60^\circ$

b) $\dfrac{\tan 60^\circ}{\sin 60^\circ} - \cos^2 135^\circ$

c) $\cos^2 150^\circ - \sin^2 150^\circ + \cos 300^\circ$

d) $\tan\dfrac{2\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) + \sin\dfrac{3\pi}{2}\tan\dfrac{5\pi}{6}$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

f) $\sec\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{6} - \cot\dfrac{\pi}{4}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser les fonctions circulaires pour trouver les valeurs exactes des rapports trigonométriques (suite)**

Les assiettes trigonométriques – suite

5. Les élèves pourront garder leur assiette à titre de référence.

Une fois l'activité d'apprentissage terminée, les élèves devraient observer que la longueur de l'arc est la même que celle de l'angle au centre mesuré en radians.

À l'aide de triangles et de symétrie donnés, on peut trouver les coordonnées d'un point sur la circonférence du cercle unitaire :

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ces valeurs permettront de déterminer les rapports trigonométriques. Mettez l'accent sur leur importance.

- **trouver $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ et $\tan^{-1} x$**

Définition : La réciproque de la fonction sinus est exprimée par

$\sin^{-1} x = y$

si et seulement si $x = \sin y$ et $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, (ou $-90° \leq y \leq 90°$).

Soulignez les éléments suivants :

a) $\text{Sin}^{-1} x$ étant la réciproque de la fonction sinus principale, son image est restreinte aux quadrants I et IV dans le cercle unitaire.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

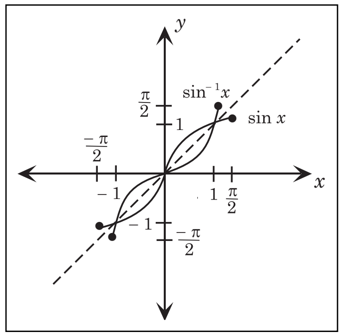
A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

– suite

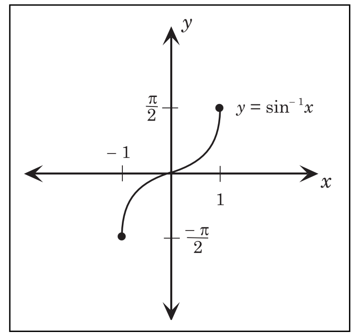
Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **trouver $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ et $\tan^{-1} x$ (suite)**



⇒



b) Certains auteurs ont donné le nom arc sin x à la fonction $\sin^{-1} x$, pour souligner le fait que la solution est une longueur d'arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x.

c) La calculatrice utilise cette fonction pour trouver l'arc (ou l'angle) correspondant à une valeur sinus donnée. Par conséquent, si $y = \sin^{-1} x$, alors :

signe de x	signe de y	quadrant où se trouve y
+	+	I
–	–	IV

Tu peux trouver les valeurs des réciproques au moyen du graphique du sinus restreint, d'un triangle rectangle ou du cercle unitaire.

La plupart des élèves trouvent plus facile d'utiliser le triangle rectangle ou le cercle unitaire.

De même, la tangente principale est restreinte aux quadrants I et IV, alors que le cosinus principal est restreint aux quadrants I et II. (***Remarque :*** Le cosinus est positif dans les quadrants I et IV.)

Définition

a) $y = \tan^{-1} x$ si et seulement si $\tan y = x$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
(ou $-90° < y < 90°$)

b) $y = \cos^{-1} x$ si et seulement si $\cos y = x$ et $0 \le y \le \pi$
(ou $0° \le y \le 180°$)

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouve les valeurs suivantes. Si la solution est un arc ou un angle, donne la réponse sous forme d'angle et exprime-le en degrés.

   a) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   b) arc sin (–0,76604)

   c) $\tan^{-1} 10$

   d) arc cos (–0,30902)

2. Trouve chacune des valeurs exactes suivantes. Si la solution est un arc ou un angle, exprime ta réponse sous forme de longueur d'arc.

   a) arc sin $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   b) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{5\pi}{4}\right)$

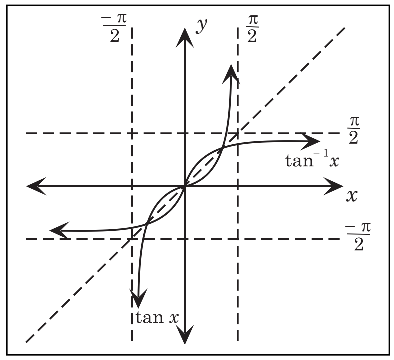
   c) cos (arc tan (–2))

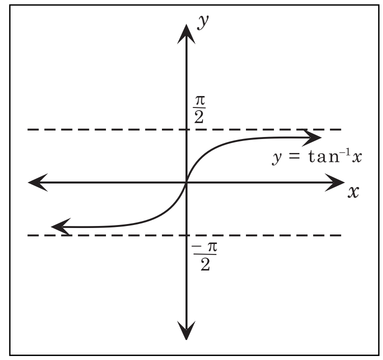
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

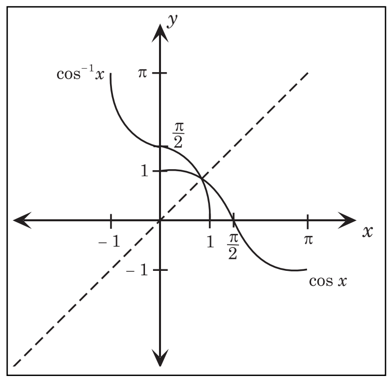
A-3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques pour tous les multiples de 0°, 30°, 45°, 60° et 90°, de même que pour 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
– *suite*

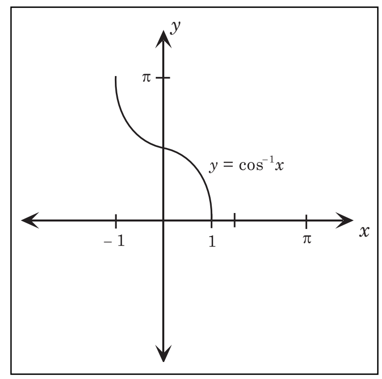
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **trouver $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ et $\tan^{-1} x$ (suite)**









Enseignez des méthodes permettant de trouver les valeurs exactes et approximatives en degrés ou en longueur d'arc.

Si la mesure d'un angle n'est pas le multiple d'une valeur donnée, il faut utiliser une calculatrice, en mode radians pour les arcs et les angles exprimés en radians, en mode degrés pour les angles exprimés en degrés.

Remarque : À la fin de ce résultat d'apprentissage, l'enseignant peut choisir de passer au résultat A-6 tout de suite.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

1. Soit $\sin \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; trouve une valeur possible de θ.

   a) $\dfrac{4\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$

   c) $\dfrac{7\pi}{6}$ d) $\dfrac{11\pi}{6}$

2. Soit $\csc \theta = 1{,}4$; trouve une valeur possible de θ en radians.

   a) 0,714 b) 0,775

   c) 0,796 d) 1,01

Problèmes

1. Trouve la (les) valeur(s) exacte(s) de θ où $0 \le \theta \le 2\pi$ qui vérifient $\cos \theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Trouve la (les) valeur(s) de θ, à deux décimales près, où $\sin \theta = -0{,}57$ et $0 \le \theta \le 2\pi$. Trouve les valeurs si le domaine est $0 \le \theta \le 360^\circ$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-4 résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré dans un domaine donné

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

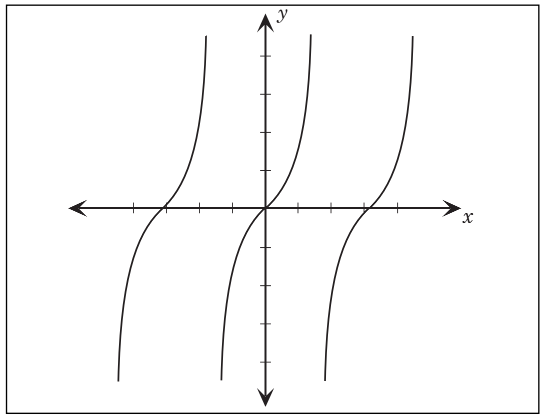
- **résoudre des équations à l'aide d'outils technologiques**

On aborde ce sujet dans le document *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 3 : Document de mise en œuvre.*

Exemple 1

Trace le graphique de $y = \tan x$ dans le domaine $-2\pi \le x \le 2\pi$.

Solution



Demandez aux élèves de trouver la solution graphique des équations trigonométriques.

À l'aide du graphique, résous $\tan x = 2$ dans l'intervalle $-2\pi \le x \le 2\pi$.

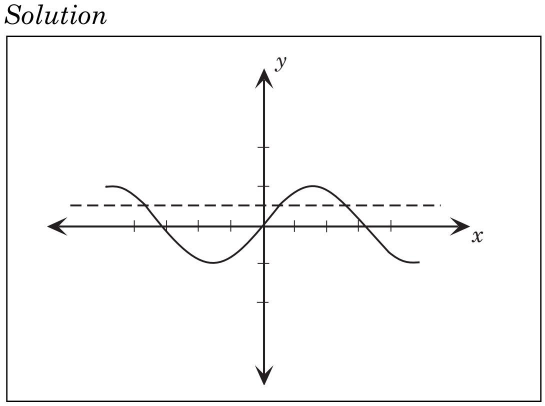
Solution

$x = 1{,}107;\ 4{,}249;\ -2{,}034;\ -5{,}176$

Exemple 2

Quel lien peut-on établir entre les graphiques de $y = \sin x$ et $y = \frac{1}{2}$ et les racines de l'équation $2 \sin x - 1 = 0$?

Solution



–suite

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Soit l'équation $\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$, $0 \leq \theta < \pi$. Résous les problèmes suivants :

a) Résous graphiquement l'équation pour trouver des solutions approximatives.

b) Résous algébriquement l'équation pour trouver des solutions exactes.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 - Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-4 résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré dans un domaine donné – suite

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations à l'aide d'outils technologiques (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

Les racines de l'équation 2 sin x – 1 = 0 sont

$\sin x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

Il s'agit des points d'intersection (solution).

Exemple 3

Résous graphiquement cos $\theta = 1$ dans le domaine $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solution

Méthodes possibles :

a) Trace les graphique de $y = \cos \theta$ et de $y = 1$ et trouve le point d'intersection.

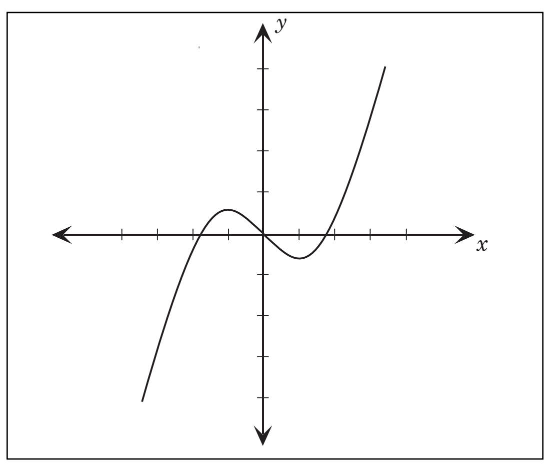
b) Exprime l'équation sous la forme $\cos \theta - 1 = 0$ et trace le graphique de $y = \cos \theta - 1$. Trouve les zéros.

$\theta = 0, 2\pi$

Exemple 4

Utilise des outils technologiques pour tracer le graphique de $y = x - 2 \sin x$ et utilise le graphique pour trouver toutes les solutions de l'équation 2sin $x = x$. Donne des réponses précises à trois décimales près.

Solution



Réponses : $x = 0$, $x = 1{,}895$, $x = -1{,}895$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-4 résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré dans un domaine donné – suite

Communications ✔ **Résolution**
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations à l'aide d'outils technologiques (suite)**

Exemple 4 – suite

Solution – suite

Remarque : Rappelez aux élèves que sur la calculatrice TI-83, la fonction suivante permet de trouver les zéros :

1. $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ pour faire les calculs.
2. Choisis 2 : zéro et suis les indications données par la calculatrice.

- **résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré**

Exemple 1

Trouve les valeurs de θ :

$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $0 \le \theta < 2\pi$

Exprime les solutions en valeurs exactes.

Solution

$\theta = \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

Exemple 2

Trouve les valeurs de x :
$1 + 2\cos x = 5$; $0 \le x < 2\pi$. Exprime les solutions à deux décimales près.

Solution

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos x &= 5\cos x; \\ 1 &= 3\cos x \\ \cos x &= \frac{1}{3} \\ x &= 1{,}23;\ 5{,}05 \end{aligned}$$

Exemple 3

Trouve les valeurs de x :

$\sin^2 x - \sin x = 0$; $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$

Exprime les solutions en valeurs exactes.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Dans chaque équation, trouve la valeur de x où $0° \leq x \leq 360°$.

   a) $2 \sin^2 x = \sin x$

   b) $2 \tan^2 x - 1 = \tan x$

2. Résous dans $[0, 2\pi]$:
   $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-4 résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré dans un domaine donné
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré (suite)**

Exemple 3 – suite

Solution

$\sin x(\sin x - 1) = 0$

$\sin x = 0 \qquad \sin x = 1$

$x = 0, \pi, 2\pi \qquad x = \frac{\pi}{2}$

Étant donné que le domaine est restreint

$x = \frac{\pi}{2}, \pi$

Exemple 4

Trouve les valeurs de θ :

$\tan^2 \theta - 5 \tan \theta + 4 = 0$; $0 \le \theta < 2\pi$. Exprime les solutions en valeurs exactes quand c'est possible. Sinon, donne des valeurs approximatives.

Solution :

$\tan^2 \theta - 5 \tan \theta + 4 = 0$

$(\tan \theta - 1)(\tan \theta - 4) = 0$

$\tan \theta = 1 \qquad \tan \theta = 4$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \qquad \theta = 1{,}326;\ 4{,}467$

Exemple 5

Trouve les valeurs de x :

$\cos 3x = \frac{1}{2}$; $0 \le x \le 2\pi$

Solution

Soit $3x = \theta$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Soit un nouveau domaine (3 révolutions) :

$3x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Décris deux méthodes qui permettraient de résoudre l'équation $\tan^3 \theta + 2 \tan^2 \theta + \tan \theta = 0$.

Problème

Trouve la valeur de θ dans l'intervalle $0 \le \theta \le 2\pi$. Exprime les réponses en radians (soit des réponses correctes à trois décimales près, soit des valeurs exactes).

a) $5 \tan^2 \theta + 2 \tan \theta - 7 = 0$

b) $(2 \sin \theta - 1)(3 \cos \theta + 1)(\cos \theta + 2) = 0$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-5 trouver les solutions générales d'équations trigonométriques dont le domaine est l'ensemble des nombres réels

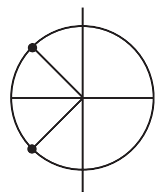
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations trigonométriques dont le domaine est l'ensemble des nombres réels**

Exemple 1

Résous l'équation $\cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, où $x \in R$.

Solution



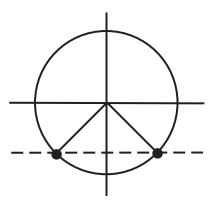
$$x = \frac{3\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

Remarque : On ajoute $2k\pi$ afin d'inclure toutes les solutions possibles dans l'ensemble des nombres réels.

Exemple 2

Résous l'équation $\sin \theta = \dfrac{-3}{4}$, où $\theta \in R$.

Solution



θ_R ou Réf $\theta = 0{,}85$

$\theta + 3{,}14 = 3{,}99$

$6{,}28 - \theta = 5{,}43$

$\therefore \theta = 3{,}99 + 2k\pi,\ 5{,}43 + 2k\pi,\ k \in Z.$

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Trouve la solution générale :
   a) $\cos^2\theta + \cos\theta = 0$
   b) $2\sin^2\theta = \sin\theta$
   c) $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

2. Trouve la valeur de x dans l'équation $\sin 3x = \frac{1}{2}$, puis écris la solution générale.

3. Trouve la valeur de x dans $-\pi < x < \pi$ et $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,5$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 - Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-6 tracer (en utilisant divers outils technologiques), dessiner et analyser les graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente, ainsi que leur réciproque, en mettant en évidence :
- le domaine et l'image
- l'amplitude, le cas échéant
- la période, le cas échéant
- les asymptotes, le cas échéant
- les coordonnées à l'origine

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer les graphiques de y = sin x et y = cos x**

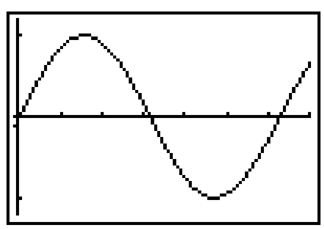
Ce sujet est abordé dans le document Mathématiques pré-calcul – Secondaire 3 : Document de mise en œuvre.

Demandez aux élèves de tracer le graphique de y = sin x et de y = cos x à l'aide d'une table des valeurs. La table devrait comprendre les coordonnées à l'origine et au moins deux points dans chaque quadrant. Ensuite, demandez-leur de comparer leur graphique de y = sin x avec un graphique obtenu au moyen d'un outil graphique.

Étapes à suivre avec la calculatrice à affichage graphique :

1. Assure-toi que la calculatrice est en mode radians.
2. Règle la fenêtre d'affichage comme suit :
   Xmin = –0,1
   Xmax = 7
   Xscl = 1
   Ymin = –1,2
   Ymax = 1,2
   Yscl = 1
3. Appuie sur Y = et inscris sin(X) pour Y1.
4. Appuie sur ENTER.

Tu obtiens le graphique suivant :



Si tu effectues un zoom sur 7:ZTrig, tu verras que la courbe commence à θ = –6,152285... et qu'elle se termine à θ = 6,152285. La courbe passe par « deux cycles ».

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 - Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 2, Leçons 5 et 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-6 tracer (en utilisant divers outils technologiques), dessiner et analyser les graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente, ainsi que leur réciproque, en mettant en évidence :
- le domaine et l'image
- l'amplitude, le cas échéant
- la période, le cas échéant
- les asymptotes, le cas échéant
- les coordonnées à l'origine

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **analyser les similarités et les différences entre les deux graphiques**

Exemple

Au moyen d'un outil graphique, trace le graphique de $y = \sin x$ et de $y = \cos x$ sur le même système d'axes.

a) Quelle relation semble exister entre les deux graphiques?

b) Quelle est l'amplitude et la période de chaque graphique?

Solutions

a) Similarités
   – même amplitude, même période, même image et même domaine
   – les deux courbes sont sinusoïdales
   – les courbes sont continues, sans asymptote

   Différences
   – zéros et ordonnées à l'origine

b) $y = \sin x$; $y = \cos x$

   amplitude de 1 pour les deux

   périodes de 2π

- **décrire les propriétés de $y = \sin x$**

a) Le domaine est l'ensemble des nombres réels.

b) L'image est $[-1, 1]$.

c) L'ordonnée à l'origine est 0.

d) Les zéros de la fonction sont des multiples entiers de π, exprimés comme suit : $\{k\pi \mid k \in Z\}$.

e) La période est 2π.

   Définition

   Une fonction $f(x)$ est dite périodique s'il existe un nombre $p > 0$ et que, pour tous les x dans le domaine de f, $f(x + p) = f(x)$. Le plus petit de ces nombres p est appelé la **période** de f (la fonction passe par des cycles et elle se répète toujours). La période est la plus petite distance parcourue sur l'axe des x avant que la fonction amorce un autre cycle).

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

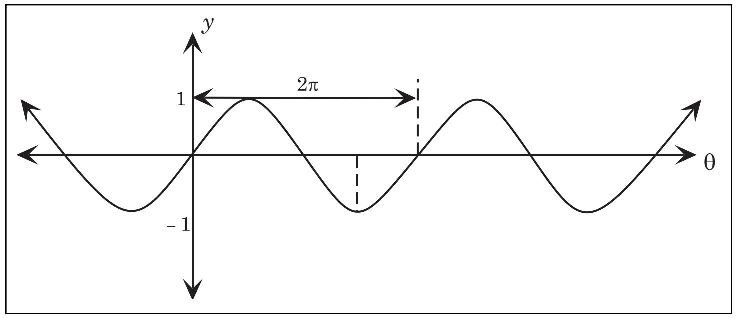
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-6 tracer (en utilisant divers outils technologiques), dessiner et analyser les graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente, ainsi que leur réciproque, en mettant en évidence :
- le domaine et l'image
- l'amplitude, le cas échéant
- la période, le cas échéant
- les asymptotes, le cas échéant
- les coordonnées à l'origine

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

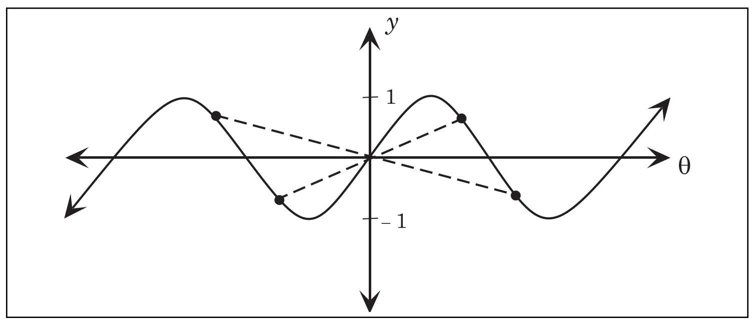
- **décrire les propriétés de *y* = sin *x* (suite)**

e)



f) Étant donné que la fonction est symétrique par rapport à l'origine, elle est impaire (p. ex., sin (–*x*) = –sin *x*).

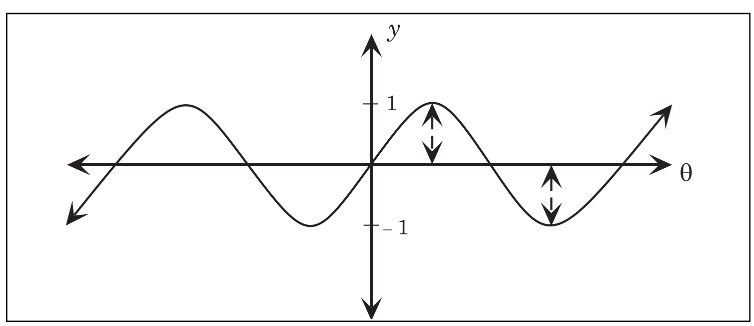
(***Remarque :*** On explique les fonctions impaires dans l'unité B, page B-34.)



g) L'amplitude de la courbe du sinus est 1.

Définition

Quand la courbe est en forme de vague, telle que la courbe du sinus, on peut tracer une droite à mi-chemin entre les points supérieurs et inférieurs de la courbe. Cette droite est appelée l'axe de la courbe. La distance entre l'axe et la valeur maximale ou minimale de la courbe est appelée l'amplitude de la courbe.



– suite

Communications	Résolution
✔ **Liens**	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

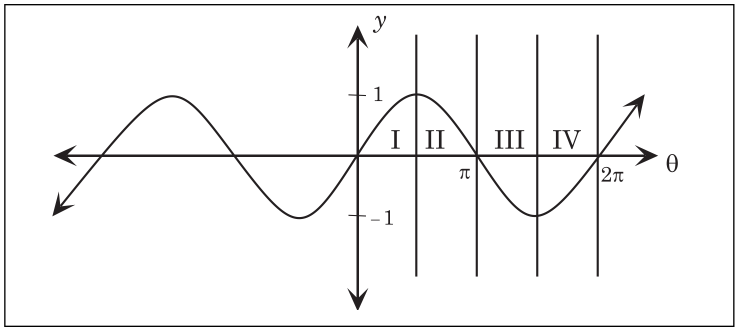
A-6 tracer (en utilisant divers outils technologiques), dessiner et analyser les graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente, ainsi que leur réciproque, en mettant en évidence :
- le domaine et l'image
- l'amplitude, le cas échéant
- la période, le cas échéant
- les asymptotes, le cas échéant
- les coordonnées à l'origine

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **décrire les propriétés de *y* = sin *x* (suite)**

h) Étant donné que la courbe se trouve au-dessus de l'axe dans les quadrants I et II, sin $\theta > 0$ dans ces deux quadrants. De même, sin $\theta < 0$ dans les quadrants III et IV.



i) La courbe est croissante de gauche à droite (elle va vers le haut) dans les quadrants I et IV et elle est décroissante dans les quadrants II et III.

- **décrire les propriétés de *y* = cos *x***

a) Le domaine est l'ensemble des nombres réels.

b) L'image est [–1, 1].

c) L'ordonnée à l'origine est 1.

d) Les zéros de la fonction sont les multiples entiers impairs de $\frac{\pi}{2}$, exprimés comme suit : $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$.

e) La période est 2π.

f) Étant donné que la fonction est symétrique par rapport à l'axe des *y*, la fonction est paire (p.ex., cos (–*x*) = cos *x*).

(***Remarque :*** On trouve une explication des fonctions paires dans l'unité B, page B-32.)

g) L'amplitude de la courbe du cosinus est 1.

h) Étant donné que la courbe du cosinus se trouve au-dessus de l'axe dans les quadrants I et IV, cos $x > 0$ dans ces deux quadrants. De même, cos $x < 0$ dans les quadrants II et III.

i) La courbe du cosinus est décroissante de gauche à droite dans les quadrants I et II et elle est croissante dans les quadrants III et IV.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

A-6 tracer (en utilisant divers outils technologiques), dessiner et analyser les graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente, ainsi que leur réciproque, en mettant en évidence :
- le domaine et l'image
- l'amplitude, le cas échéant
- la période, le cas échéant
- les asymptotes, le cas échéant
- les coordonnées à l'origine

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **décrire les propriétés de $y = \tan x$**

a) Le domaine est $\left\{ x \,\middle|\, x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$.

b) L'image est l'ensemble des nombres réels.

c) L'ordonnée à l'origine est 0.

d) Les zéros sont $\{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\}$.

e) La période est π.

f) La fonction est impaire (p. ex., $\tan(-x) = -\tan x$).

(***Remarque :*** On trouve une explication des fonctions impaires dans l'unité B, page B-34.)

g) La fonction est positive dans les quadrants I et III, et elle est négative dans les quadrants II et IV.

h) La fonction est croissante dans les quatre quadrants.

i) L'équation des asymptotes est $\left\{ x \,\middle|\, x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trace le graphique de la transformation suivante : $y = \tan x - 1$.

Annexe A-1

Exercice d'algèbre

- **décomposer des trinômes en facteurs**

Les trinômes décomposés en facteurs devraient être exprimés sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$ ou a est un nombre premier inférieur à 10. La valeur c devrait avoir un nombre minimal de facteurs.

Exemple

Décompose en facteurs :

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 9x - 10$

c) $2x^2 - 5x + 3$

d) $x^2 - 4x - 12$

e) $2 \cos^2 x + \cos x - 1$

f) $5 \tan^2 x - 12 \tan x + 7$

Solutions

a) $(x + 3)(x + 2)$

b) $(x + 10)(x - 1)$

c) $(2x - 3)(x - 1)$

d) $(x - 6)(x + 2)$

e) $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

f) $(5 \tan x - 7)(\tan x - 1)$

- **trouver des valeurs de *a*, *b* ou *c* quand deux des trois valeurs sont données**

Exemple

Soit $ax^2 + bx + c$; trouve les valeurs possibles de b si :

a) $a = 1$, $c = 6$

b) $a = 2$, $c = -5$

Solutions

a) $x^2 + bx + 6$ pourrait être décomposée en facteurs :

$$(x + 6)(x + 1) \Rightarrow b = 7$$
$$(x - 6)(x - 1) \Rightarrow b = -7$$
$$(x + 2)(x + 3) \Rightarrow b = 5$$
$$(x - 2)(x - 3) \Rightarrow b = -5$$

$\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 5, ± 7

b) $2x^2 + bx - 5$ pourrait être décomposée en facteurs : $(2x + 5)(x - 1) \Rightarrow b = 3$

$$(2x - 5)(x + 1) \Rightarrow b = -3$$
$$(2x + 1)(x - 5) \Rightarrow b = -9$$
$$(2x - 1)(x + 5) \Rightarrow b = 9$$

$\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 3, ± 9

- **décomposer en facteurs la différence de carrés**

  Exemple

  Décompose complètement en facteurs chacune des expressions suivantes :

  a) $x^2 - 4$
  b) $x^2y^2 - 1$
  c) $\cos^2 x - \sin^2 x$
  d) $x^2 - 49$
  e) $x^4 - 16$

  Solutions

  a) $(x - 2)(x + 2)$
  b) $(xy - 1)(xy + 1)$
  c) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
  d) $(x - 7)(x + 7)$
  e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

- **décomposer en facteurs communs**

  Exemple

  Décompose complètement en facteurs chacune des expressions suivantes :

  a) $9x^2 + 18$
  b) $2x^2 + 6x + 4$
  c) $\sin x - \sin x \cos x$
  d) $8x^2 - 32$

  Solutions

  a) $9(x^2 + 2)$
  b) $2(x + 2)(x + 1)$
  c) $\sin x(1 - \cos x)$
  d) $8(x - 2)(x + 2)$

- **résoudre des questions qui font appel à la décomposition en facteurs**

  Les élèves devraient être en mesure de résoudre des équations simples sans démontrer les étapes de la décomposition en facteurs.

  Exemple

  Trouve la valeur de x dans chacune des équations suivantes :

  a) $x^2 - 4 = 0$
  b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
  c) $4x^2 + x = 0$

  Solutions

  a) $x = 2, -2$
  b) $x = -2, x = -1$
  c) $x = 0, x = -\dfrac{1}{4}$

- **simplifier des fractions complexes**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

  Dans le cours de calcul universitaire, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

  Exemple

  Simplifie :

  a) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

  b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

  c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$

  d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

  Solutions

  a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

  b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

  c) $\sqrt{3}$

  d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs**

  Exemple

  Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

  a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}\,;\,\dfrac{x}{x-2}$

  b) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}\,;\,\dfrac{x^2}{x^2-9}$

  c) $\dfrac{\sin x}{\cos x}\,;\,\dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

  Solutions

  a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

  b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

  c) $\cos x \sin x$

- **simplifier des radicaux**

  Exemple 1

  Simplifie :

  a) $\sqrt{20}$

  b) $\sqrt{98}$

  c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

  Solutions

  a) $2\sqrt{5}$

  b) $7\sqrt{2}$

  c) $\sqrt{3}$

- **simplifier des radicaux (suite)**

Exemple 2

Rationalise les numérateurs :

a) $\dfrac{\sqrt{x-h}-\sqrt{x}}{h}$

b) $\dfrac{\sqrt{5x-5h-1}-\sqrt{5x-1}}{h}$

Solutions

a) $\dfrac{-h}{h(\sqrt{x-h})+\sqrt{x}}$ ou $\dfrac{-1}{\sqrt{x-h}+\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{-5h}{h\left(\sqrt{5x-5h-1}+\sqrt{5x-1}\right)}$ ou $\dfrac{-5}{\sqrt{5x-5h-1}+\sqrt{5x-1}}$

Annexe A-2

Cadre des correspondances

Règles de conversion

Radians à degrés

Multiplie les radians par 180/π pour convertir en degrés

Exemples

1. Convertis $\frac{\pi}{6}$ en degrés

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)$$
$$= \frac{180}{6}$$
$$= 30^\circ$$

2. Convertis $\frac{2\pi}{6}$ en degrés

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)$$
$$= \frac{360}{3}$$

Degrés à radians

Multiplie les degrés par π/180 pour convertir en radians

Exemples

1. Convertis 45° en radians

$$= 45^\circ\left(\frac{\pi}{180}\right)$$
$$= \frac{45\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

2. Convertis 720° en radians

$$= 720^\circ\left(\frac{\pi}{180}\right)$$
$$= \frac{720\pi}{180}$$
$$= 4\pi$$

Annexe A-3

Cadre des concepts

Concept

Longueur d'arc

Exemples

$s = \theta r$

$s = \frac{2\pi}{3}(27)$

$s = \frac{54\pi}{3}$

$s = 18\pi$ cm

$s = 56{,}549$ cm

Caractéristiques

— pour trouver la longueur d'un arc sous-tendu dans un cercle
— se rapporte à des angles
— se trouve toujours dans un cercle
— l'angle doit toujours être exprimé en ***radians*** pour qu'on puisse résoudre le problème

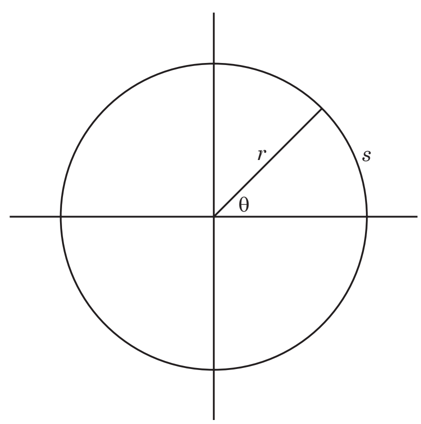
À quoi ça ressemble?

— c'est comme trouver un point sur le cercle

À quoi ça ne ressemble pas?

— c'est différent des angles de référence

Peux-tu l'illustrer?



Définition

Pour tout arc sous-tendu par un angle au centre de θ radians dans un cercle dont le rayon a «r» unités, la longueur $s = \theta r$.

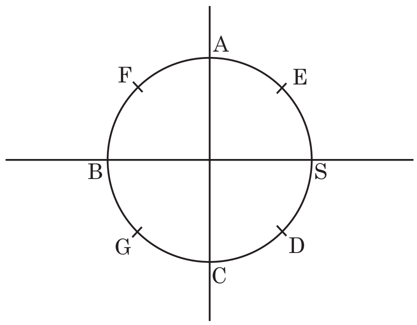
Cadre des concepts : Reproduit avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Annexe A-4

Inscription au journal

Inscription au journal n°4

$P(\theta)$ est la fonction d'enroulement pour l'angle (s) de θ. Étant donné le cercle,

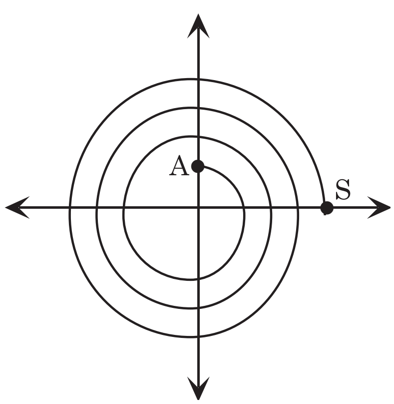


explique à quelle lettre on aboutirait si on enroulait un angle de

$\frac{13\pi}{2}$,c'est-à-dire, $P\left(\frac{13\pi}{2}\right)$.

1. $\frac{13\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{13\pi}{4\pi} = \frac{13}{4}$ revs

2.



1. Pour trouver le nombre de révolutions à $\frac{13\pi}{2}$, j'ai divisé par 2π (ou j'ai multiplié par l'inverse $\left(\frac{1}{2\pi}\right)$. J'ai obtenu $3\frac{1}{4}$ révolutions $\left(\frac{13}{4}\right)$.
2. Ensuite, j'ai fait 3 enroulements complets ($2\pi \times 3$), puis un autre quart d'un tour jusqu'à la lettre A.

Annexe A-5

Fais tes LAPS

Nom ____________________________

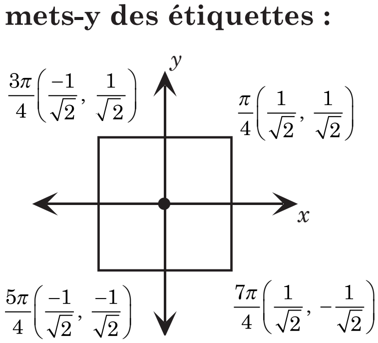
Pendant que tu écoutes un conférencier ou que tu regardes une bande vidéo, une présentation ou une démonstration, fais toujours tes LAPS

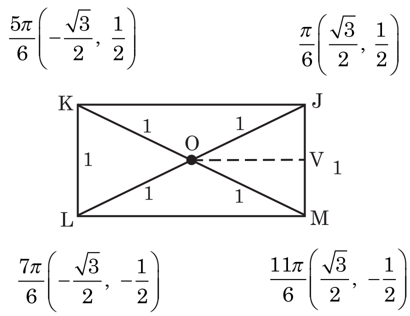
Pendant que tu écoutes :

Poses-toi des questions et inscris-les ici.

Je comprends tout quand vous inscrivez des explications au tableau mais, aussitôt que je me retrouve seul, je ne sais vraiment pas par où commencer ni comment expliquer ce que nous avons fait.

Représente ce que tu as entendu. Fais des dessins et mets-y des étiquettes :





rectangle JKLM intersecte à l'origine JM = KL = 1

JM = OM = OJ

Δ équilatéral, chaque angle = 60°

$(OV)^2 = (OJ)^2 - (JV)^2$

$= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$OV = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Résume tes idées dans un paragraphe.

Pour trouver les coordonnées des points d'un cercle unitaire, il faut dessiner un carré ou un rectangle. On trouve ensuite le point milieu du côté droit et on place le carré ou le rectangle sur le cercle unitaire pour trouver les coordonnées de chaque coin. Si tous les côtés du triangle dans le rectangle sont égaux, on peut utiliser le théorème de Pythagore ou le lien avec un triangle pour trouver les coordonnées en *x* et en *y*. Avec les coordonnées d'un coin, il est facile de trouver les coordonnées des autres coins en remplaçant les signes négatifs ou positifs.

Annexe A-6

Fais tes LAPS

Nom ______________________________

Pendant que tu écoutes un conférencier ou que tu regardes une bande vidéo, une présentation ou une démonstration, fais toujours tes LAPS.

Pendant que tu écoutes :

Poses-toi des questions et inscris-les ici.

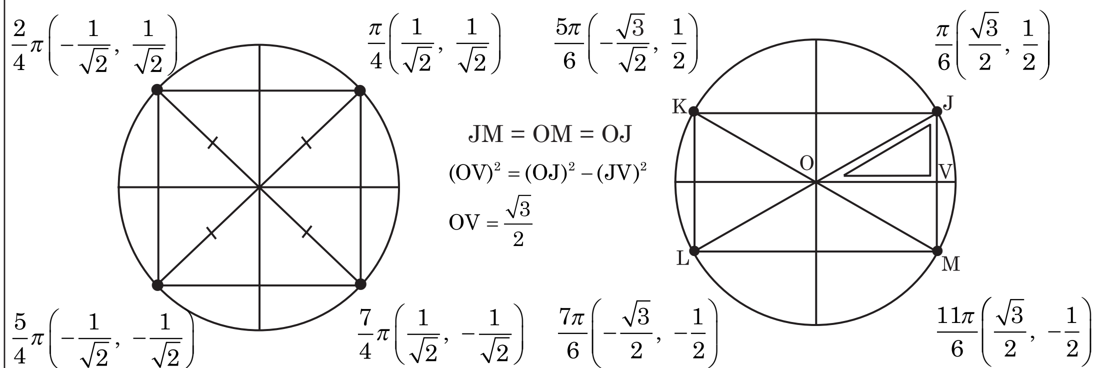
Quelles sont les valeurs des coins du carré?

Quelles sont ces valeurs si on utilise les unités π?

Comment trouver les unités dans le quadrant?

Résume tes idées dans un paragraphe?

Représente ce que tu as entendu. Fais des dessins et mets-y des étiquettes.



Résume tes idées dans un paragraphe.

Nous avons trouvé le point milieu d'un demi-côté et nous avons transposé la mesure sur le cercle.

Nous avons trouvé les coordonnées des radians en plaçant le cercle dont les coins se trouvent à $\pi/4$ dans le cercle. Nous avons trouvé 4 points à 45°, 135°, 225° et 315°, ou nous avions déjà les coordonnées (voir le talbeau).

Nous avons trouvé l'un des côtés inconnus du carré en utilisant le théorème de Pythagore.

Fais tes LAPS : Reproduit avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley, n° 27.

Annexe A-7

Cadre de notes/Fiches étapes-solutions

Concept
Équations trigonométriques

Identité trigonométrique

$\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ est une identité étant donnée qu'elle est vérifiée pour toutes les valeurs de t

Équation conditionnelle

$\cos t = \sin t$ est conditionnelle étant donnée qu'elle n'est pas vérifiée pour certaines valeurs de t.

Équations simples

Résous les fonctions mathématiques élémentaires suivantes, puis utilise des angles particuliers de la fonction circulaire

$$P\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad P\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad P\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

Exemple de question

1. $\cos x \cot x = -\cos x$
2. $\cos x \cot x + \cos x = 0$
3. $\cos x(\cot x + 1) = 0$
4. $\cos x = 0$
5. $\cos x = -1$
6. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,$
   $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k$

Étapes de la solution

1. Écrire l'équation
2. Placer tous les termes d'un côté
3. Trouver le facteur commun
4. Ramener (cos x) au facteur 0
5. Ramener (cot x + 1) au facteur 0
6. Résoudre à l'aide d'angles donnés de la fonction circulaire.

Équations quadratiques

Résous de la même façon, mais utilise la racine des deux côtés pour supprimer les carrés.

Exemple de question

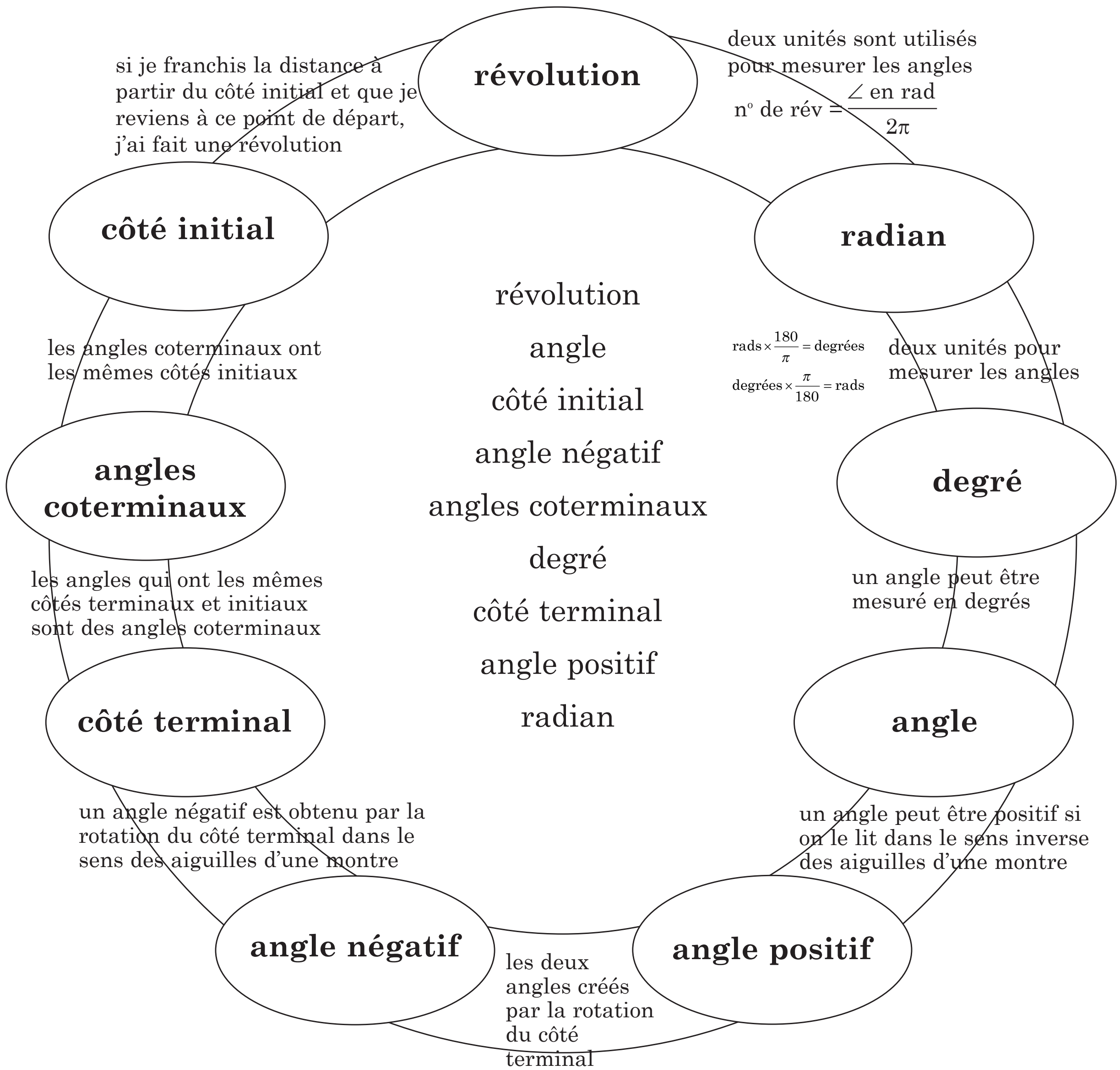
1. $\cos^2 t = \dfrac{4}{3}$
2. $x^2 = \dfrac{3}{4}$
3. $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $t = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$

Étapes de la solution

1. Écrire l'équation
2. Poser $\cos t = x$
3. Prendre la racine des deux côtés
4. Exprimer la variable x par rapport à cos
5. Résoudre l'équation

Annexe A-8

Cycles des mots



Consignes :

Lis la liste des mots qui apparaît dans le cercle ci-dessus. Choisis un mot et place-le dans l'un des ovales. Dans l'ovale, place un autre mot lié au premier. Ils pourraient être des synonymes, des antonymes, des étapes d'un processus, des exemples, etc. Il s'agit de compléter l'énoncé : « Le mot A est lié au mot B parce que ... ». Écris une note sur la bande se trouvant entre les mots pour te rappeler de cette relation. Continue le processus jusqu'à ce que tu aies réussi à placer tous les mots. Planifie d'avance : les derniers mots seront difficiles à placer.

Unité B
Transformations

TRANSFORMATIONS

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- décrivent les effets des translations, des réflexions, des étirements et des compressions à la verticale et à l'horizontale, des inverses ainsi que des opérations valeur absolue sur le graphique et d'autres propriétés d'une fonction particulière ou générale;
- tracent le graphique de fonctions qui contiennent les divers éléments des transformations d'une fonction ou d'un graphique;
- décrivent, énoncent les propriétés et tracent le graphique des réciproques de fonctions;
- tracent le graphique et énoncent les propriétés de fonctions définies par morceaux;
- écrivent les fonctions sous forme de composition de fonctions simples puis tracent le graphique;
- utilisent des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes;
- étudient les fonctions biunivoques et les fonctions paires et impaires.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'utiliser la calculatrice à affichage graphique ou un outil informatique pour étudier les effets des éléments de transformation sur une fonction donnée;
- de faire le lien entre les propriétés algébriques des fonctions et leur graphique;
- d'écrire les équations de fonctions à partir de graphiques et vice-versa;
- de représenter des situations réelles à l'aide de la théorie des fonctions périodiques;
- d'effectuer des activités d'apprentissage appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'apprentissage différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe B-1) :

- la notation fonctionnelle
- l'équation d'une droite
- les fractions complexes

Matériel

· calculatrice à affichage graphique et logiciel graphique
· papier quadrillé
· réflecteur Mira

Durée

- 16 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Exécuter, analyser et créer des transformations de fonctions et de relations définies par des équations ou des graphiques.

Résultats d'apprentissage spécifiques

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes B-2 à B-13, p. B-77 à B-88).

- **définir une translation de fonction ou de relation**

  Une translation est une transformation d'une figure géométrique telle que chacun des points est déplacé dans le même sens. Les élèves devraient être familiers avec les translations liées aux fonctions de base telles que les suivantes :

$y = x$	$y = x^3$
$y = x^2$	$y = \cos x$
$y = \sqrt{x}$	$y = \sin x$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = a^x$
$y = \lvert x \rvert$	$y = \log_a x$

  Vous pourrez intégrer ces fonctions dans diverses unités du cours de mathématiques pré-calcul secondaire 4.

- **utiliser le graphique d'une fonction parent pour représenter une translation**

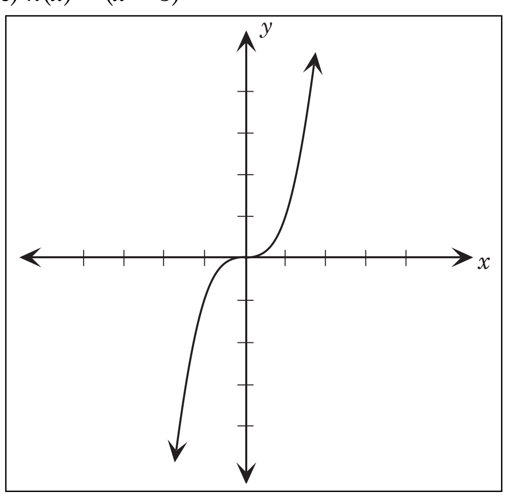
  Exemple

  Utilise le graphique de $f(x) = x^3$ pour représenter les fonctions suivantes :

  a) $g(x) = x^3 - 2$

  b) $h(x) = (x - 1)^3$

  c) $k(x) = (x + 3)^3$

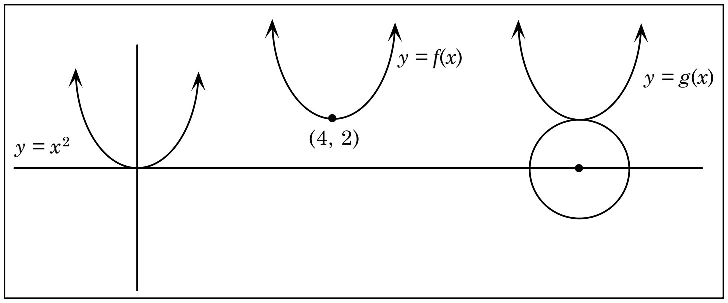


– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Soit les graphiques suivants :



   a) Construis l'équation de $f(x)$.

   b) L'équation du cercle est $(x - 8)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

   Construis l'équation de la parabole $g(x)$.

2. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ et
   $g(x) = (x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 + 2(x + 2) + 2$;
   explique le lien entre les graphiques de ces 2 fonctions.

3. a) Trace le graphique de $y = \sqrt{|x|}$.

   b) Détermine le domaine et l'image.

   c) Commente la symétrie.

NOTES

Ressources imprimées :

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 – Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.
– Module 1, leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– *suite*

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et ✔ **Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

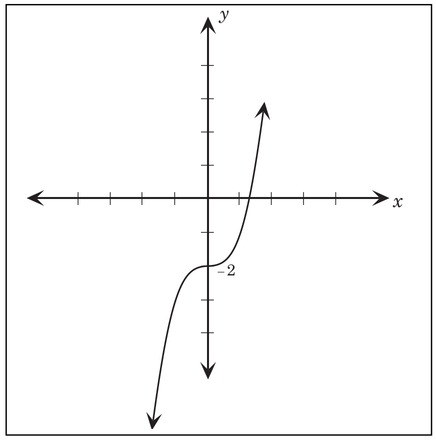
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser le graphique d'une fonction de base pour représenter une translation (suite)**

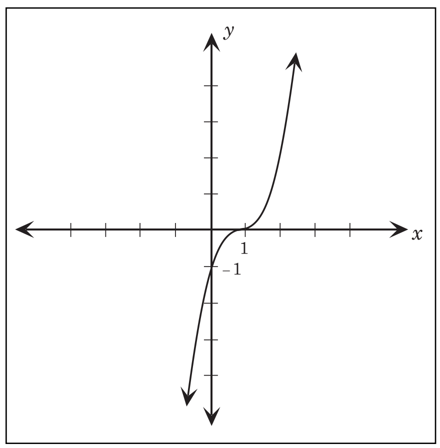
Exemple (suite)

Solution

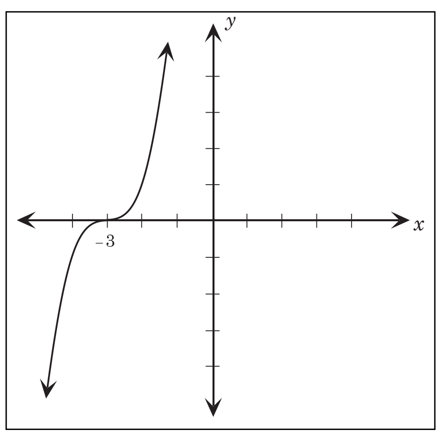
a)



b)



c)



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

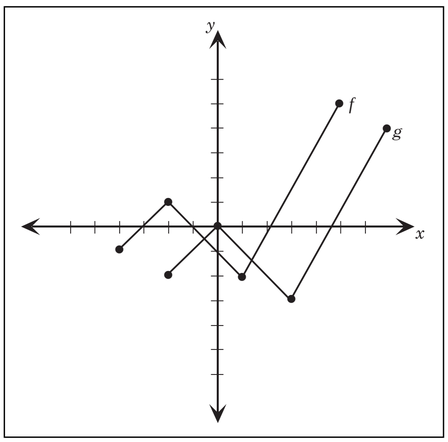
Calcul Mental

1. Si $f(x) = x^2$, trace le graphique de $f(x - 3) + 2$.
2. Le graphique de $g(x)$ a été produit en déplaçant le graphique de $f(x)$ de 4 unités vers la gauche. Si $f(x) = \sin(x + 2) - 5$, construis une équation en termes du sinus pour représenter $g(x)$.
3. Soit $f(x) = x^2 + 5$; construis l'équation qui représente la translation du graphique de $f(x)$, déplacé de 3 unités vers la gauche.

Choix multiples

L'équation du graphique de g est :

a) $f(x + 2) - 1$
b) $f(x + 2) + 1$
c) $f(x - 2) + 1$
d) $f(x - 2) - 1$



Problème

Si le graphique d'une fonction $y = f(x)$ est déplacé de deux unités vers la gauche et de quatre unités vers le bas, quelle sera l'équation du nouveau graphique?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– suite

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de la translation d'une fonction $f(x)$ quelconque et l'expliquer**

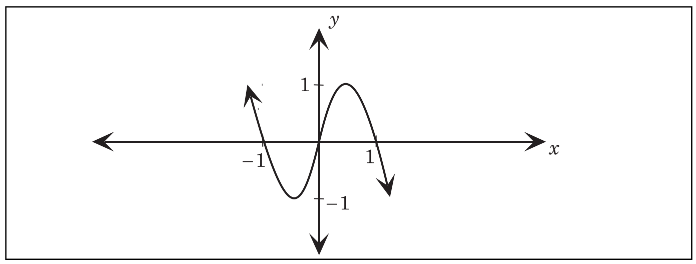
Exemple

Utilise le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous pour tracer le graphique des fonctions suivantes. Décris la transformation en tes propres mots.

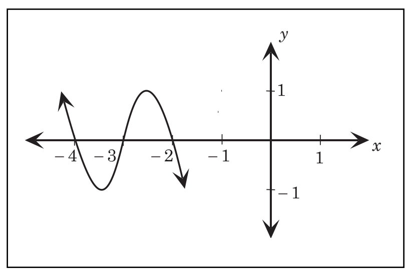
a) $g(x) = f(x + 3)$

b) $m(x) = f(x) + 2$

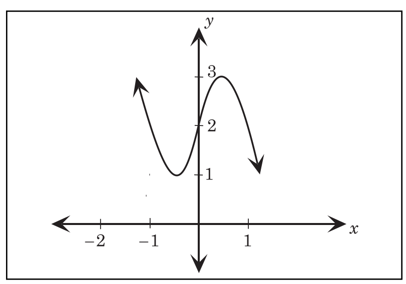
c) $n(x) = f(x - 5)$



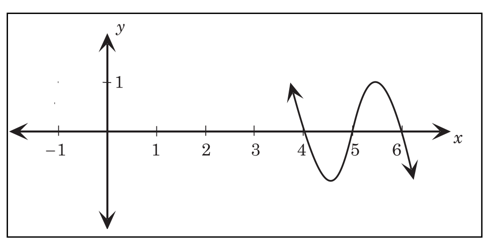
Solution

a)


$g(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de trois unités vers la gauche

b)


$m(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de deux unités vers le haut

c)


$n(x)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée de cinq unités vers la droite

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

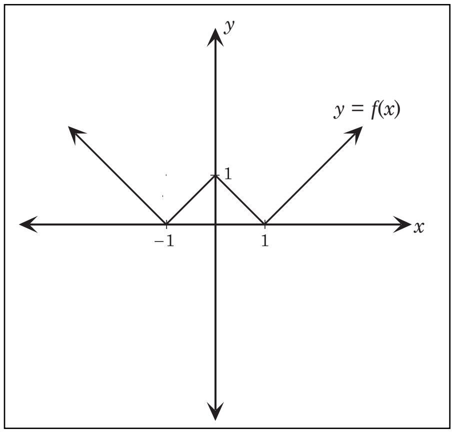
Problème

Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de :

a) $f(x + 3)$

b) $f(x) - 3$

c) $f(x + 3) - 3$



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-1 décrire comment diverses translations affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(x - h)$
- $y - k = f(x)$ ou
- $y = f(x) + k$

– suite

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de la translation de toute fonction *f*(*x*) et l'expliquer (suite)**

  On aborde dans cette section des problèmes qui impliquent des translations du type $y = f(x - 1) + 2$. Les concepts de domaine, d'image et de coordonnées à l'origine doivent aussi être intégrés dans le courant de la leçon.

- **utiliser des outils technologiques pour étudier les translations**

  L'enseignant devrait donner aux élèves l'occasion d'utiliser des outils graphiques tels qu'une calculatrice ou un logiciel à capacité graphique pour étudier les translations.

- **généraliser la transformation des graphiques de *f*(*x*) quand des translations sont effectuées**

  Soit le graphique de la fonction $f(x)$; les effets des transformations sont les suivants :

Transformations	Effet sur le graphique
$f(x) + k$	Translation verticale : • vers le haut si $k > 0$ • vers le bas si $k < 0$
$f(x + k)$	Translation horizontale : • vers la gauche si $k > 0$ • vers la droite si $k < 0$

Exemple 1

Compare les graphiques de $y = x^2$ et de $y = x^2 - 2$.

Solution

Le nouveau graphique a été déplacé de deux unités au-dessous de l'original.

Exemple 2

Trace le graphique d'une fonction $f(x)$ quelconque. Sur le même système d'axes, trace le graphique des fonctions suivantes et compare-les au graphique de $f(x)$:

a) $f(x) - 2$

b) $f(x - 2)$

c) $f(x - 2) + 1$

Solution

a) $f(x) - 2 \rightarrow$ descend de deux unités

b) $f(x - 2) \rightarrow$ déplacé de deux unités vers la droite

c) $f(x - 2) + 1 \rightarrow$ déplacé de deux unités vers la droite et de une unité vers le haut

Remarque : Vous pouvez utiliser la technologie pour faire comprendre aux élèves les effets des translations de fonctions sur leurs graphiques.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les étirements et les compressions verticaux à l'aide d'une fonction de base**

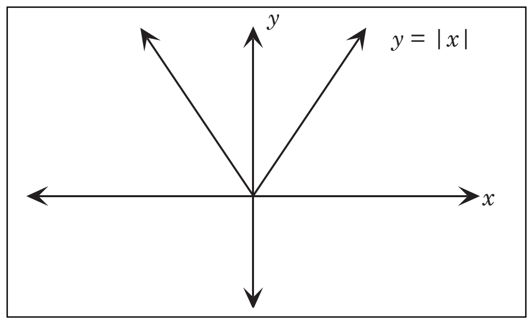
Exemple

a) Trace le graphique de $y = |x|$ et utilise ce graphique pour tracer le graphique de :

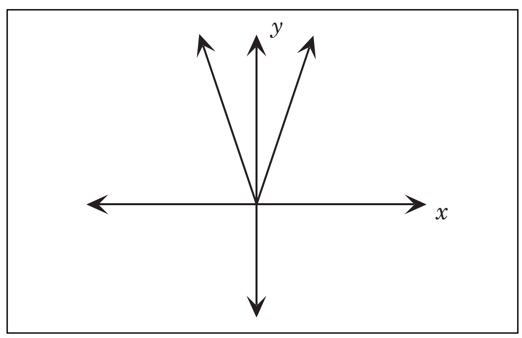
i) $y = 3|x|$

ii) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$

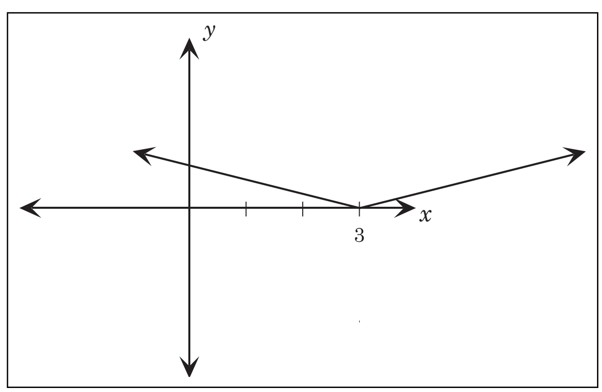
Solution



i)



ii)



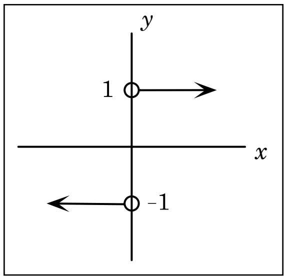
✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

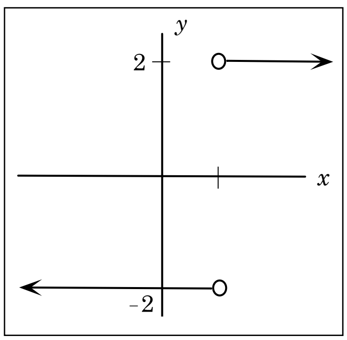
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Voici le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$:



Quelle est l'équation de la fonction définie par le graphique ci-dessous?

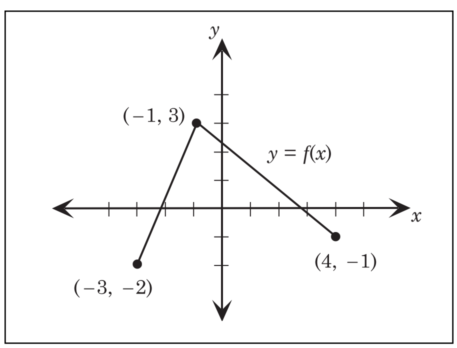


2. La figure illustre le graphique de $y = f(x)$. Trace les graphiques ci-dessous.

   a) $f(2x)$

   b) $2f(x)$

   c) $2f(x) + 1$



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.
– Module 1, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les étirements et les compressions verticaux à l'aide d'une fonction de base (suite)**

Exemple – suite

b) Explique le lien entre les deux graphiques et la fonction $y = |x|$.

Solution

Dans $y = 3|x|$, toutes les valeurs de y sont trois fois plus élevées que les valeurs correspondantes de $y = |x|$. Le graphique a été ***étiré verticalement*** par un facteur de 3.

Dans $y = \frac{1}{2}|x - 3|$, toutes les valeurs de y sont la moitié plus petites que les valeurs de y dans $y = |x - 3|$. Le graphique de $y = |x|$ a été ***comprimé verticalement*** par un facteur de $\frac{1}{2}$, pour produire le graphique de $y = \frac{1}{2}|x - 3|$. Le graphique a aussi été déplacé de trois unités vers la droite.

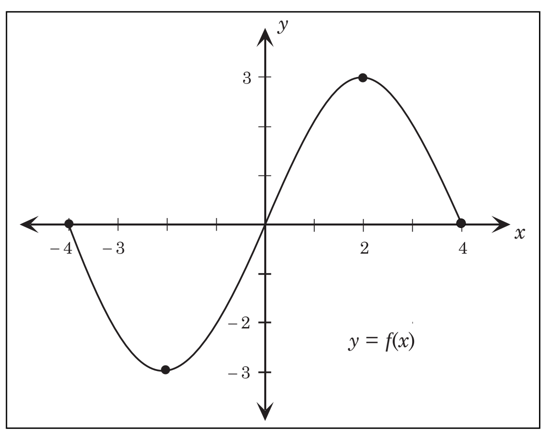
- **à partir du graphique d'une fonction *f*(*x*) quelconque, tracer le graphique des compressions ou des étirements verticaux**

Exemple

Utilise le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous pour tracer le graphique des fonctions suivantes :

a) $2\,f(x)$

b) $\frac{2}{3}f(x) + 2$



– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $y = x^2$ est le graphique de base, quel énoncé ci-dessous décrit le mieux la fonction $y = \frac{1}{4}x^2$:

a) un étirement horizontal par un facteur de 4?

b) un étirement horizontal par un facteur de $\frac{1}{4}$?

c) un étirement vertical par un facteur de 4?

d) un étirement vertical par un facteur de $\frac{1}{4}$?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

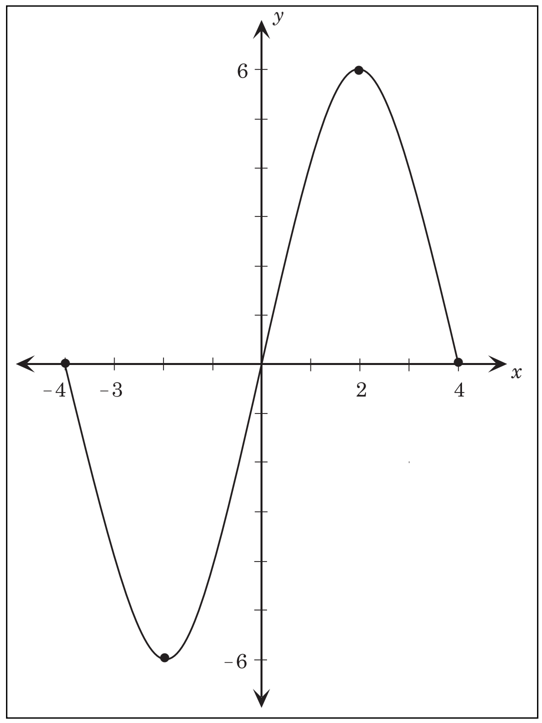
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **à partir du graphique d'une fonction *f*(*x*) quelconque, tracer le graphique des compressions ou des étirements verticaux (suite)**

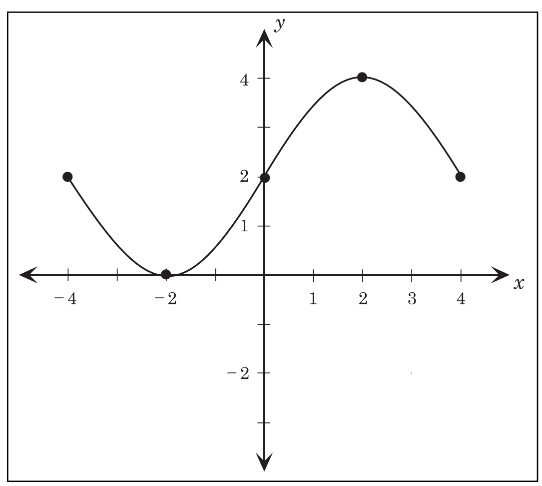
Exemple (suite)

Solution

a)



b)



✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

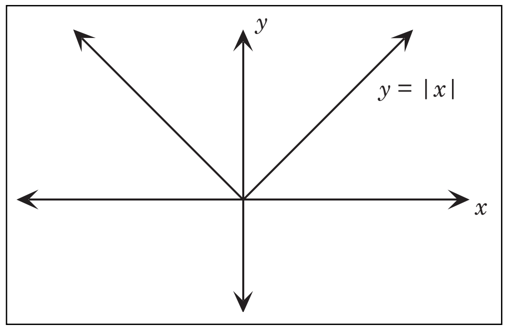
- **étirer et comprimer horizontalement le graphique d'une fonction donnée à partir d'une fonction parente**

Exemple

Trace le graphique de $y = |x|$ et utilise ce graphique pour tracer le graphique des fonctions suivantes :

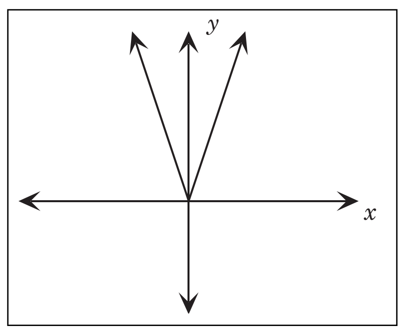
a) $y = |3x|$

b) $y = \left|\frac{1}{3}x\right|$



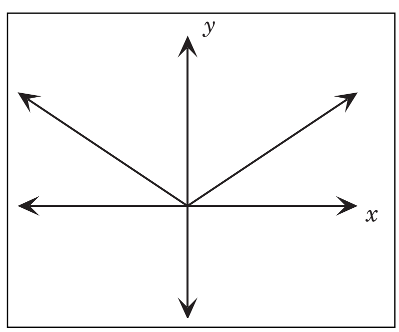
Solution

a)



Remarque : Il s'agit d'une ***compression horizontale*** de $y = |x|$ par un facteur de 3.

b)



Remarque : Il s'agit d'un ***étirement horizontal*** de $y = |x|$ par un facteur de 3.

✔ **Communications** | Résolution
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

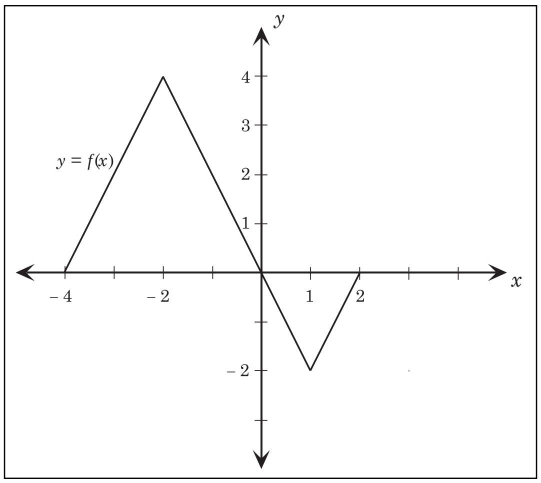
NOTES

Problème

Utilise le graphique ci-dessous pour tracer le graphique de :

a) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $2f(3x)$



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

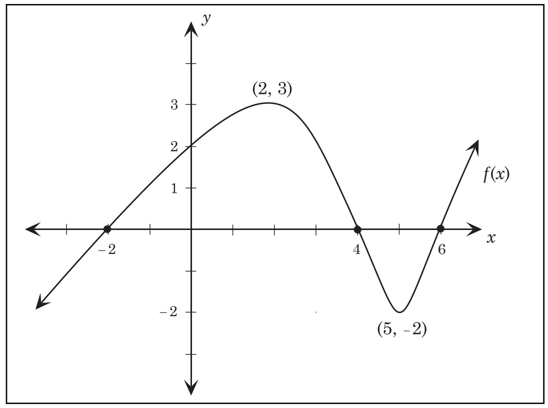
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

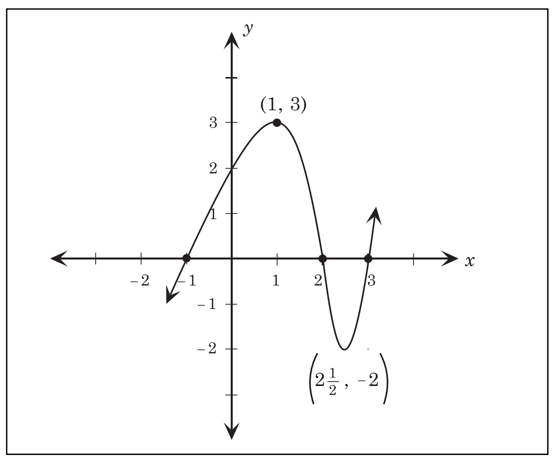
- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine**

Exemple 1

Soit $y = f(x)$ dans le diagramme ci-dessous; trouve $y = f(2x)$.



Solution



Remarque que les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ ont deux fois la valeur des abscisses à l'origine de la fonction $f(2x)$. Étant donné que les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont –2, 4 et 6, $y = f(x)$ sera égale à 0 quand x aura une valeur de –2, 4 ou 6. Ainsi, $y = f(2x)$ sera égale à 0 quand $2x$ aura les valeurs –2, 4 et 6. Pour que cela se produise, la valeur de x doit être –1, 2 ou 3.

Par conséquent, le graphique de $y = f(x)$ est une compression horizontale du graphique de $f(x)$, par un facteur de 2.

Selon le même raisonnement, le graphique de $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ est un étirement horizontal de $f(x)$, par un facteur de 2.

– suite

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont 6, 2 et –8. Quelles sont les abscisses à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(-3x)$

b) $f(2x - 4)$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

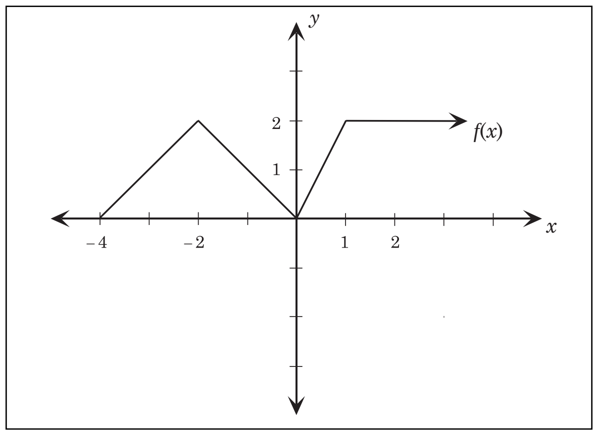
- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine (suite)**

Exemple 2

Utilise le graphique de $y = f(x)$, illustré ci-dessous, pour tracer les graphiques suivants :

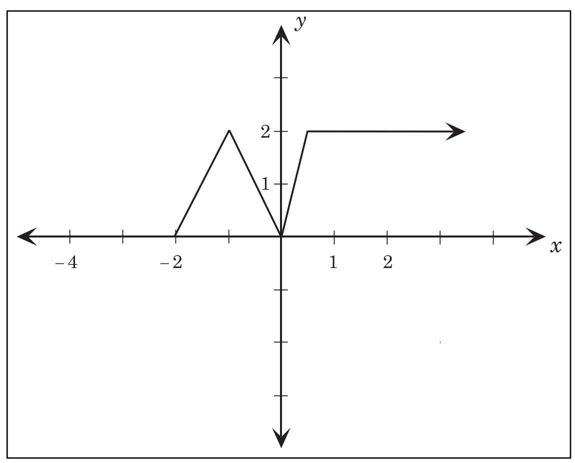
a) $y = f(2x)$

b) $y = f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$



Solution

a)



– suite

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et ✔ **Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-2 décrire comment divers étirements ou compressions affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = af(x)$
- $y = f(bx)$

– suite

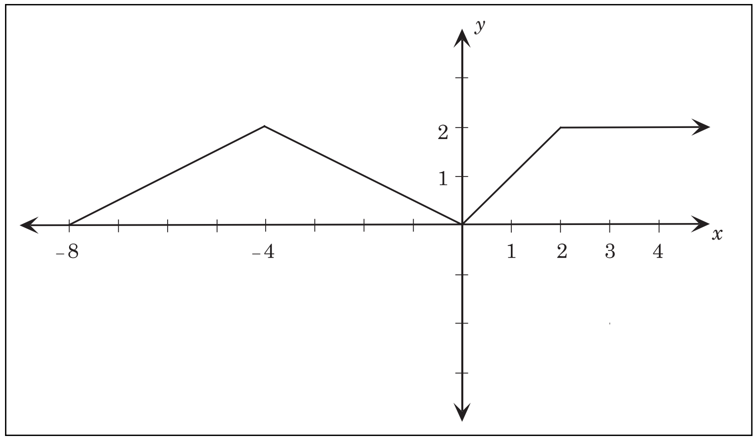
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **analyser la transformation du graphique d'une fonction à partir des abscisses à l'origine (suite)**

Exemple 2 (suite)

Solution (suite)

b)



Les élèves devraient être en mesure d'appliquer ce concept à sin x, cos x, csc x, sec x, tan x et cot x.

Il faut aussi trouver le domaine, l'image, les ordonnées à l'origine ainsi que les zéros de la fonction.

- **généraliser les transformations subies par les graphiques de $f(x)$ quand des compressions ou des étirements sont effectués**

Voici des exemples de compressions et d'étirements.

Transformation	Effet sur le graphique	Exemple
$y = af(x)$	$af(x)$ est un étirement vertical si $a > 1$	$y = 2f(x)$
$y = af(x)$	$af(x)$ est une compression verticale si $0 < a < 1$	$y = \frac{1}{2}f(x)$
$y = f(bx)$	$f(bx)$ est une compression horizontale si $b > 1$	$y = f(2x)$
$y = f(bx)$	$f(bx)$ est un étirement horizontal si $0 < b < 1$	$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Soit le graphique d'une fonction $y = f(x)$ quelconque; explique la transformation provoquée par les quatre constantes de l'équation suivante :

$$y = 3f\left[\frac{1}{2}(x-4)\right] - 5$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

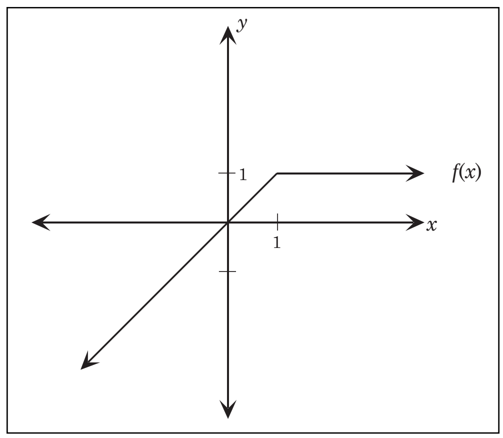
- **étudier le lien entre les valeurs de y dans $y = f(x)$ et celui de $y = -f(x)$ et tracer le graphique**

  Toutes les valeurs positives de y dans la première fonction prennent une valeur négative dans la deuxième fonction, et toutes les valeurs négatives de y dans la première fonction prennent une valeur positive dans la deuxième fonction.

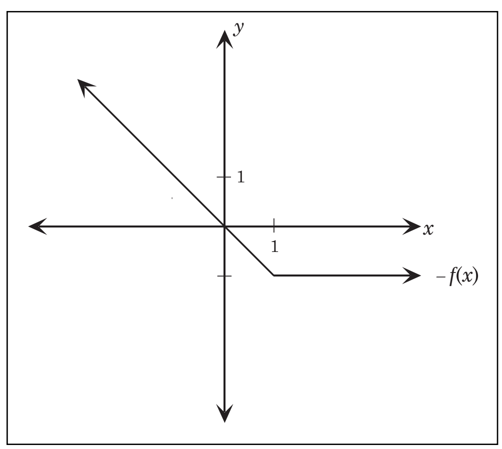
  Dans le plan géométrique, tous les points de la deuxième fonction sont le reflet de chacun des points de la première fonction par rapport à l'axe des x, et vice-versa.

  Exemple

  Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $-f(x)$.



Solution



✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et ✔ **Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

Si le graphique de $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$ est réfléchi par rapport à l'origine, l'équation de la réflexion serait :

a) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$

b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 53$

c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 53$

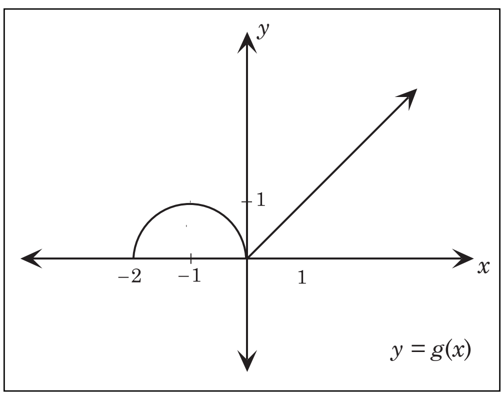
d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 53$

Inscription au journal

1. En quelques phrases, explique à un coéquipier pourquoi :
   a) $-f(x)$ est une réflexion de $f(x)$ par rapport à l'axe des x
   b) $f(-x)$ est une réflexion de $f(x)$ par rapport à l'axe des y

Problème

Utilise le graphique de $g(x)$ ci-dessous pour tracer le graphique de $-g(x) + 2$.



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

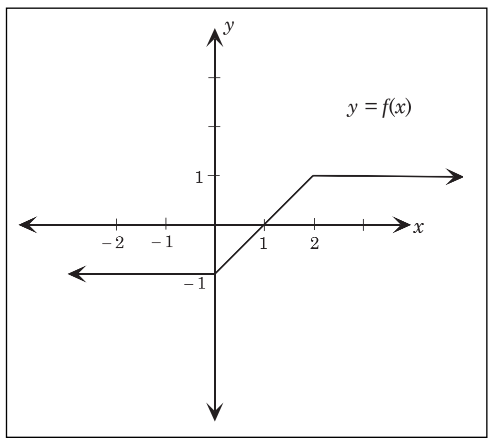
- **étudier le lien entre les graphiques de $y = f(x)$ et celui de $y = f(-x)$, et tracer le graphique (suite)**

Toutes les valeurs positives de x dans la première fonction deviennent négatives dans la deuxième fonction, et toutes les valeurs négatives de x dans la première fonction deviennent positives.

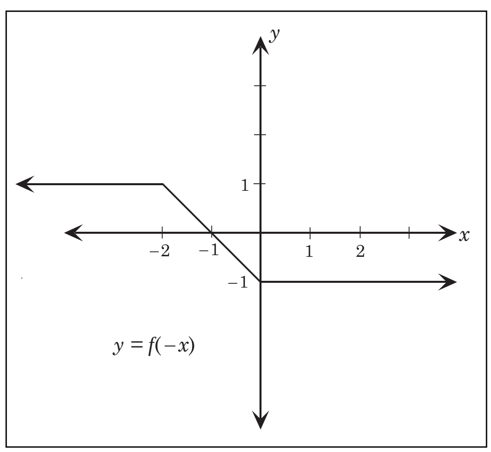
Dans le plan géométrique, tous les points de la deuxième fonction sont une réflexion de chacun des points de la première fonction par rapport à l'axe des y, et vice-versa.

Exemple

Utilise un graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $f(-x)$.



Solution



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

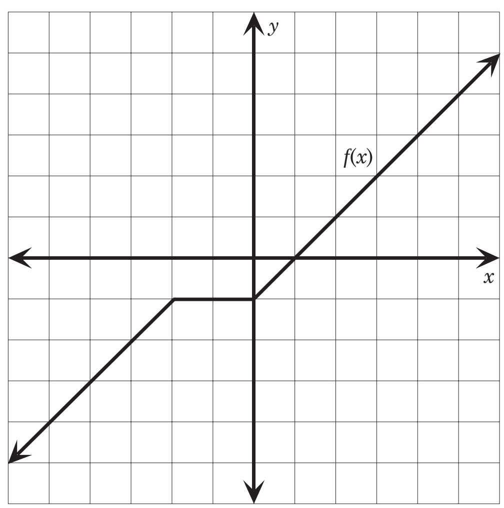
1. Écris une équation de la droite formée par la réflexion de $y = -3x + 4$ par rapport à l'axe des x.

2. Écris une équation de la droite formée par la réflexion de $y = 3x + 2$ par rapport à l'axe des y.

3. Soit le graphique de $f(x)$; trace le graphique des fonctions suivantes :

   a) $y = 2f(x - 1)$

   b) $y = f(-x) + 1$



NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

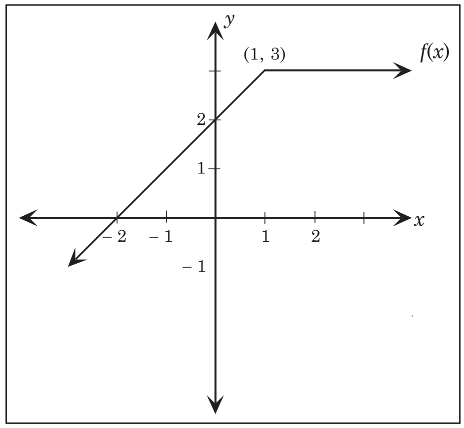
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir la relation entre $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$**

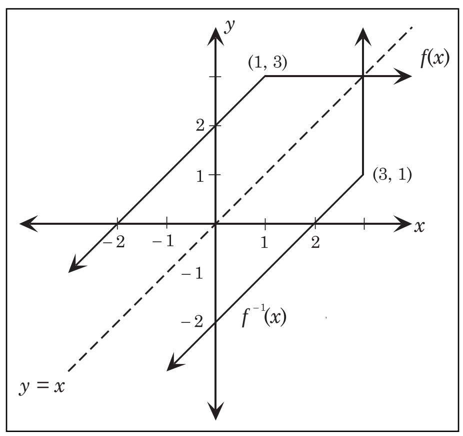
  Dans le cours *Mathématiques pré-calcul secondaire 3*, les élèves ont abordé le concept des fonctions réciproques. $y = f^{-1}(x)$ est la réflexion de $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.

  Exemple

  Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $f^{-1}(x)$.



Solution



- **généraliser le graphique de la fonction $f(x)$ réfléchie par rapport à l'axe des x et à l'axe des y, ainsi que par rapport à la droite $y = x$**

  Soit le graphique d'une fonction $f(x)$; voici les effets des transformations :

Transformations	Effet sur le graphique
$-f(x)$	réflexion par rapport à l'axe des x
$f(-x)$	réflexion par rapport à l'axe des y
$f^{-1}(x)$	réflexion par rapport à la droite $y = x$

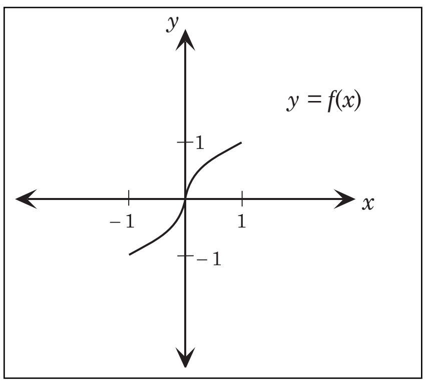
✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

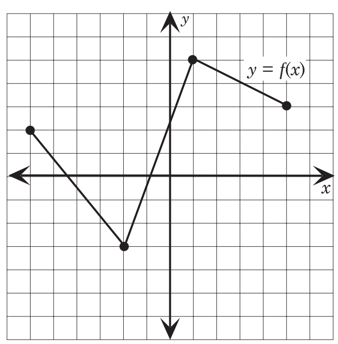
NOTES

Problèmes

1. a) Décris toutes les fonctions linéaires qui sont leur propre réciproque.
   b) Donne un exemple d'une fonction non linéaire qui est sa propre réciproque.
   c) Quelles sont les propriétés du graphique de $f(x)$ si $f(x) = f^{-1}(x)$?
2. Trouve la valeur de k de sorte que $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - k}$ devienne sa propre réciproque.
3. Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique des fonctions suivantes :
   a) $-f^{-1}(x)$
   b) $f^{-1}(-x)$



4. Soit le graphique de $y = f(x)$; trace le graphique des fonctions suivantes :
   a) $y = -f(x - 2)$
   b) $y = 2\,f(-x)$



5. Si $(4, -3)$ est un point appartenant au graphique de $y = f(x)$, trouve un point qui appartient au graphique de $y = 3f(2x) + 4$.
6. Si les abscisses à l'origine de la fonction $f(x)$ sont 3, –5 et 0, quelles seront les abscisses à l'origine des fonctions suivantes :
   a) $f(-x + 2)$?
   b) $-f(x) + 1$?
7. Si l'ordonnée à l'origine de $f(x)$ est 5, quelle est l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes :
   a) $-f(x)$ b) $f(-x)$
   c) $f(x - 3)$ d) $f(-x) + 1$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

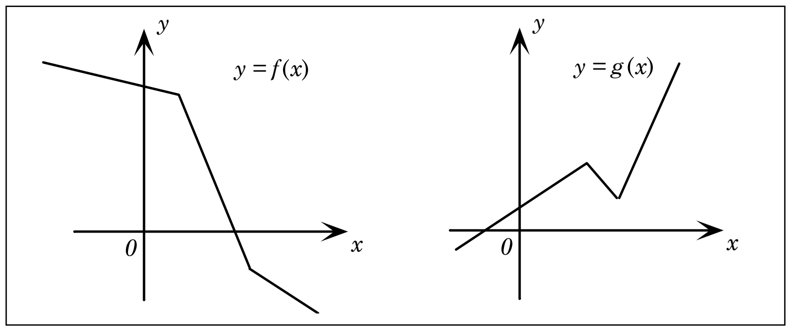
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier une fonction biunivoque**

Une fonction $y = f(x)$ qui a une réciproque est appelée une fonction biunivoque parce que non seulement à chaque valeur de x correspond une valeur de y, mais à chaque valeur de y correspond exactement une valeur de x. Nous pouvons déterminer si une fonction est biunivoque en appliquant le test de la droite horizontale à son graphique.

Si le graphique de la fonction est tel qu'une droite horizontale ne peut croiser le graphique en plus d'un point, alors f est une fonction biunivoque et elle a une réciproque.



f est une fonction biunivoque et elle a une réciproque

g n'est pas une fonction biunivoque et n'a pas de réciproque

Faites des liens avec l'unité A (p. A-24) et les sections traitant des fonctions trigonométriques réciproques.

- **faire la différence entre les fonctions paires et les fonctions impaires**

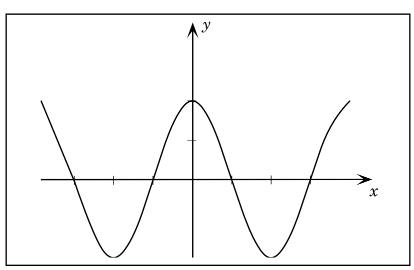
Une fonction $f(x)$ est paire si, quand on la déplace vers la gauche ou vers la droite sur une même distance à partir de 0, on obtient la même valeur (c.-à-d. $f(x)$ est paire si $f(-x) = f(x)$).

Les fonctions paires ont leur propre réflexion par rapport à l'axe des y. Elles sont dites symétriques par rapport à l'axe des y.

Exemple 1

Trace le graphique de $f(x) = \cos x$ et le graphique de $f(-x)$.

Solution



Le graphique est symétrique par rapport à l'axe des y et la fonction est paire.

– suite

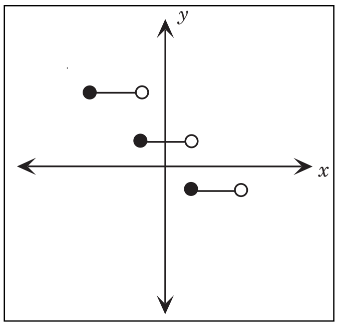
✔ **Communications** Liens Estimation et Calcul Mental
Résolution Raisonnement ✔ **Technologie** ✔ **Visualisation**

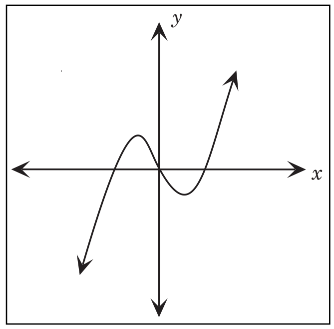
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

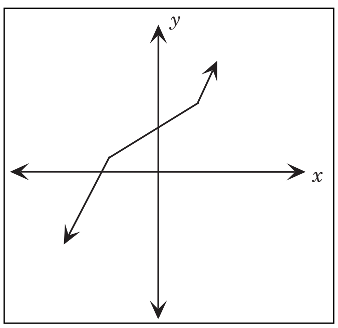
NOTES

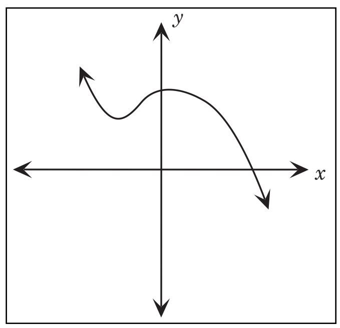
Calcul mental

1. Lequel des graphiques suivants représente une fonction biunivoque?

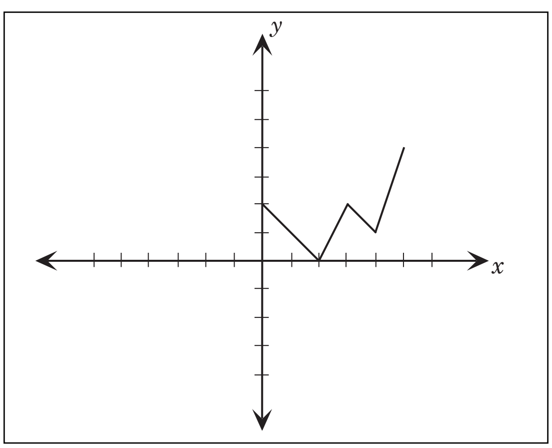
a) 

b) 

c) 

d) 

2. Voici une partie du graphique d'une fonction paire. Complète-le.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-3 décrire comment les réflexions de fonctions, par rapport aux deux axes et à la droite $y = x$, affectent les graphiques de fonctions et leurs équations associées :
- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f^{-1}(x)$

– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la différence entre les fonctions paires et les fonctions impaires (suite)**

Une fonction $f(x)$ est ***impaire*** si, quand on la déplace vers la gauche à partir de 0, la valeur de la fonction est opposée à celle obtenue si on déplaçait le graphique de la même distance vers la droite à partir de 0 ($f(x)$ est ***impaire*** si et seulement si $f(-x) = -f(x)$).

Les fonctions qui ont cette propriété sont dites symétriques par rapport à l'origine. Chacun des points de la courbe a une image réfléchie par rapport à l'origine.

La fonction sinus est impaire.

Exemple 2

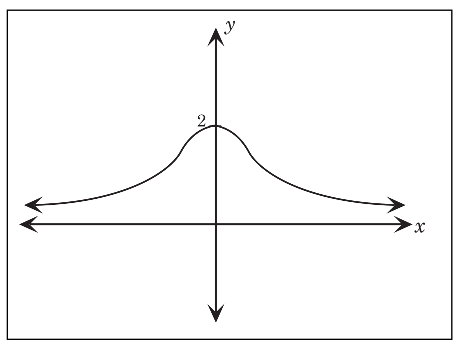
Détermine si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni l'une ni l'autre.

a) $f(x) = x^5 + x^3$

b) $f(x) = -4x^2 + 2x$

c) $f(x) = 3x^2$

d)



Solution

a) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3$
$= -x^5 - x^3$
$= -(x^5 + x^3)$
$= -f(x)$

Étant donné que $f(-x) = -f(x)$, la fonction est impaire.

b) $f(x) = -4x^2 + 2x$
$f(-x) = -4(-x)^2 + 2(-x)$
$= -4x^2 - 2x$
$= -(4x^2 + 2x)$

Étant donné que $f(-x)$ n'est pas égale à $f(x)$ ou $-f(x)$, la fonction n'est ni paire ni impaire.

c) $f(x) = 3x^2$
$f(-x) = 3(-x)^2$
$= 3x^2$

Étant donné que $f(-x) = f(x)$, la fonction est paire.

d) Étant donné que la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y, la fonction est paire.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

L'un des points de la fonction g est (–2, 3). Si g est une fonction impaire, lequel parmi les points suivants est un autre point appartenant au graphique de $g(x)$?

a) (2, 3) b) (–2, –3)

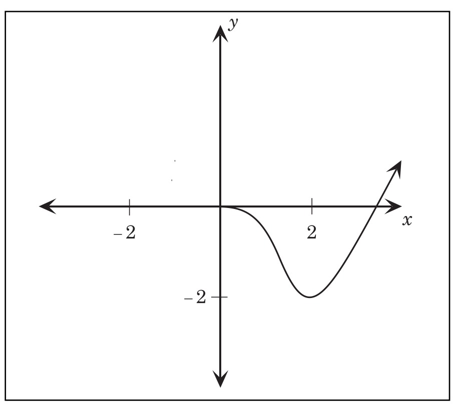
c) (2, –3) d) (3, –2)

Problèmes

1. Laquelle parmi les fonctions suivantes est paire?
   a) $f(\theta) = \sin\theta$
   b) $f(\theta) = \cos\theta$
   c) $f(\theta) = \tan\theta$

2. La fonction $f(x)$ est paire et la fonction $g(x)$ est impaire. Détermine, dans la mesure du possible, si chacune des combinaisons de fonctions suivantes est une fonction impaire, paire, ou ni l'une ni l'autre.
   a) $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $G(x) = f(x) + g(x)$
   e) $H(x) = f(x) \cdot g(x)$ d) $M(x) = f\,(g(x))$

3. Voici le graphique partiel d'une fonction $f(x)$. Complète-le en posant $f(x)$:
   a) une fonction impaire
   b) une fonction paire



4. Un jour, durant le cours de mathématiques de secondaire 4, Ann déclare ce qui suit :
   « Je crois que les fonctions impaires sont telles que $f(x) = -f(-x)$. »
   Jean, un autre élève de la classe, réplique que cette définition n'est pas exacte et que la fonction impaire devrait avoir la propriété $f(-x) = -f(x)$.
   Quelle définition de la fonction impaire est correcte? Explique pourquoi.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **décrire $y = \frac{1}{f(x)}$ et tracer le graphique à l'aide du graphique ou de l'équation de $f(x)$**

Les graphiques des expressions rationnelles ont été étudiés dans le cours Mathématiques pré-calcul de secondaire 3. Il serait peut-être bon de revoir les méthodes utilisées dans ce cours.

Pour les fonctions du type $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, tu peux utiliser la division pour exprimer $\frac{2x}{x-1}$ sous la forme $Q + \frac{R}{x-1}$, où Q est le quotient et $\frac{R}{x-1}$ est le reste.

Exemple 1

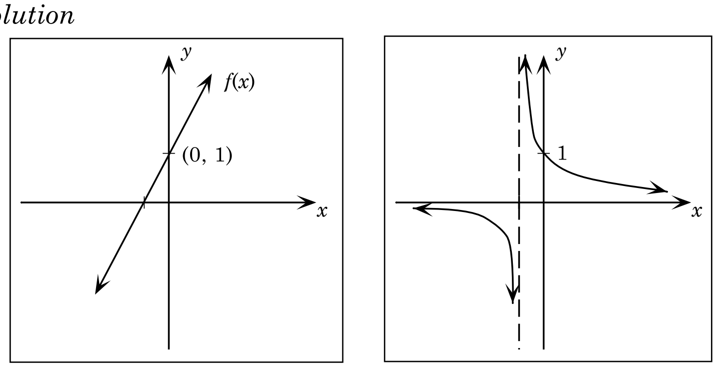
a) Soit $f(x) = 2x + 1$; trace le graphique de $f(x)$ et de $\frac{1}{f(x)}$.

Qu'arrive-t-il aux abscisses à l'origine de $f(x)$?

b) La fonction $\frac{1}{f(x)}$ peut-elle avoir des zéros?

Solution

a)



Étant donné que 0 n'a pas de réciproque, une asymptote est créée aux abscisses à l'origine de $f(x)$.

c) Non. Si $\frac{1}{f(x)} = 0$, alors $1 = 0$. C'est impossible.

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

Quelle fonction parmi les suivantes a une asymptote verticale $x = \frac{\pi}{3}$, une asymptote horizontale $y = \frac{7}{3}$ et 2 comme ordonnée à l'origine :

a) $f(x) = \dfrac{7x - 2\pi}{3x - \pi}$

b) $f(x) = \dfrac{7x}{3x - \pi}$

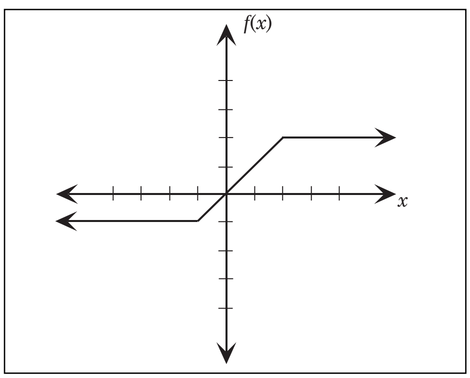
c) $f(x) = \dfrac{7x - 2\pi}{3x + \pi}$

d) $f(x) = \dfrac{7}{3x - \pi} + 2$

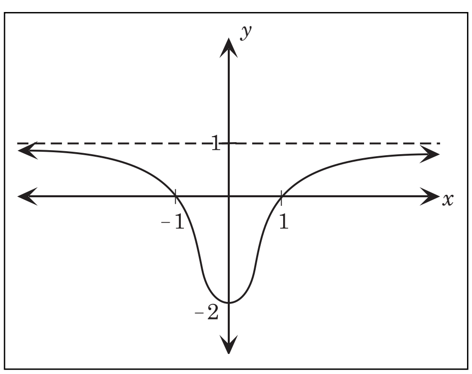
Problèmes

1. Trace le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$ si $f(x)$ est définie par le graphique suivant :

a)



b)



2. Trace le graphique de $f(x) = \cos x$, puis trace le graphique de $\dfrac{1}{\cos x}$ sur le même système d'axes.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$

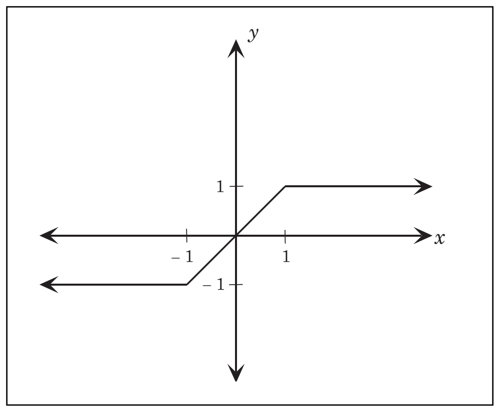
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

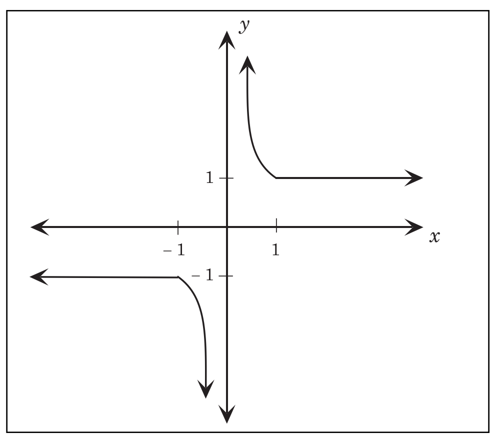
- **décrire $y = \frac{1}{f(x)}$ et tracer le graphique à l'aide du graphique ou de l'équation de $f(x)$**

Exemple 2

Utilise le graphique de $f(x)$ ci-dessous pour tracer le graphique de $\frac{1}{f(x)}$.



Solution



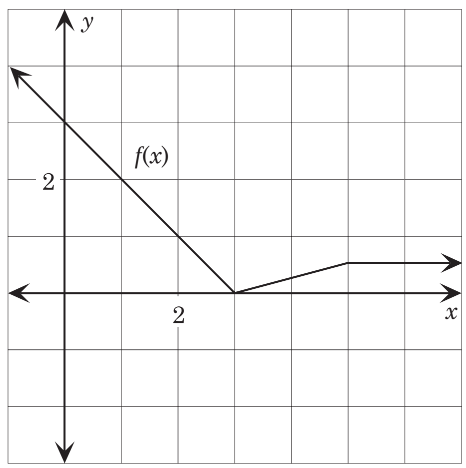
✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

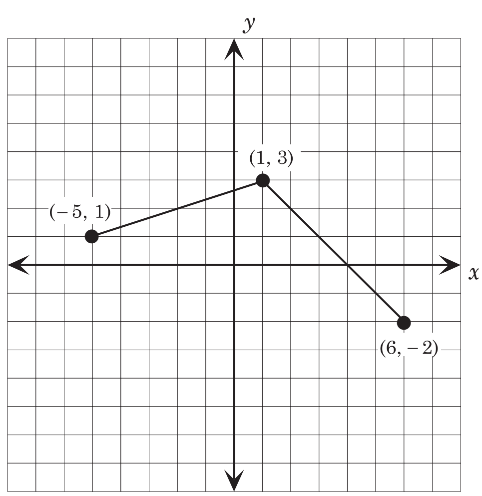
NOTES

Problèmes

1. Soit le graphique de $f(x)$ illustré ci-dessous; trace le graphique de $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.



2. Soit le graphique de $f(x)$ ci-dessous; trace le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$.



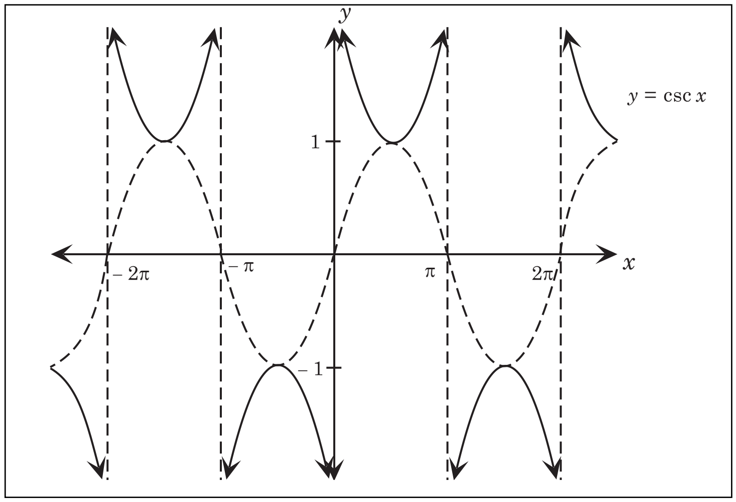
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

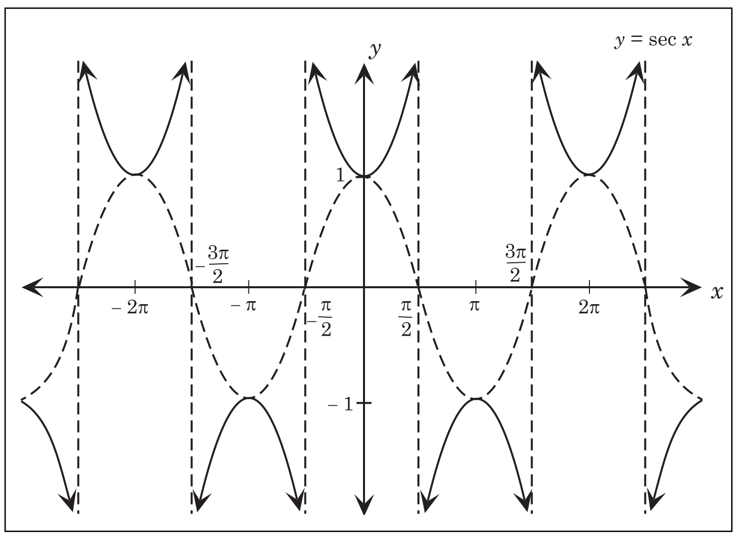
B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de base des fonctions inverses : $y = \sec x$, $y = \csc x$ et $y = \cot x$**





✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique et fais l'analyse des fonctions suivantes :

   a) $y = \sec x$

   b) $y = \csc x$

   c) $y = \cot x$

2. Compare le domaine, l'image et la période des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = \csc x$

   b) $f(x) = \cot x$

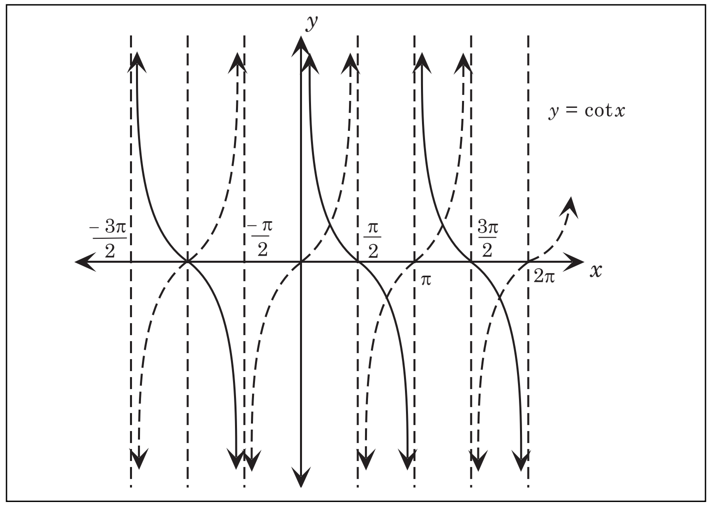
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-4 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $\dfrac{1}{f(x)}$

– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de base des fonctions inverses : $y = \sec x$, $y = \csc x$ et $y = \cot x$ (suite)**



- **décrire les propriétés des fonctions inverses ci-dessus**

  Le sommaire suivant peut servir de guide.

Fonction	Domaine	Image	Ordonnée à l'origine	Zéros
cot x	$\{x \neq k\pi \mid k = \in Z\}$	R	aucune	$\left\{x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$
csc x	$\{x \neq k\pi \mid k = \in Z\}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	aucune	aucun
sec x	$\left\{x \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right\}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	1	aucun

Fonction	Asymptotes	Période	Symétrie	Signe du quadrant	Croissante ou décroissante
cot x	$\{x = k\pi \mid k \in Z\}$	π	Impaire	+ dans I et III – dans II et IV	Toujours décroissante
csc x	$\{x = k\pi \mid k \in Z\}$	2π	Impaire	+ dans I et II - dans III et IV	Croissante : II et III Décroissante : I et IV
sec x	$\left\{x \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$	2π	Paire	+ dans I et IV – dans II et III	Croissante : I et II Décroissante : II et IV

✔ **Communications** Résolution
Liens Raisonnement
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire le lien entre le concept des fonctions définies par morceaux et la valeur absolue**

Pour les fonctions définies par morceaux, la formule change selon la partie du domaine considérée. La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou zéro.

La valeur absolue de x, exprimée par $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

La définition énonce que x conserve la même valeur tant qu'elle ne devient pas négative, et que son signe change si elle devient négative.

Exemple 1

Exprime la fonction $y = |x - 2|$ sous forme de fonction définie par morceaux.

Solution

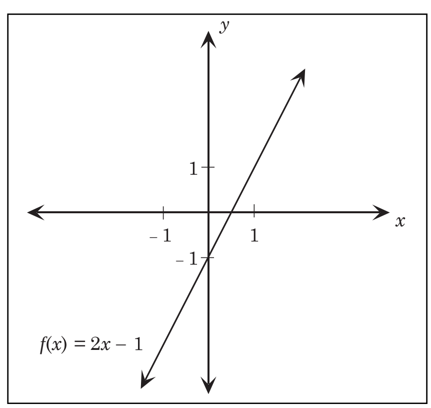
$$y = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction**

Le graphique d'une fonction valeur absolue est la réflexion d'une partie quelconque du graphique original qui se trouve au-dessous ou au-dessus de l'axe des x.

Exemple 1

a) Soit le graphique de $f(x) = 2x - 1$; trace le graphique de $y = |f(x)|$.



– suite

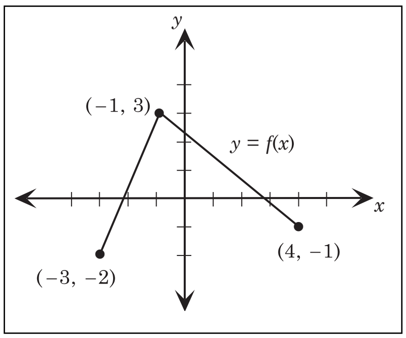
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Exprime la fonction $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ sous forme de fonction définie par morceaux.

2. Est-il possible qu'une fonction valeur absolue :
   a) n'ait aucune abscisse à l'origine?
   b) soit entièrement sous l'axe des x?
   c) soit partiellement sous l'axe des x?

3. Le graphique de $y = f(x)$ est illustré ci-dessous. Trace le graphique de :
   a) $|f(x)|$
   b) $|f(x-1)|$



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Manitoba, Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$
– suite

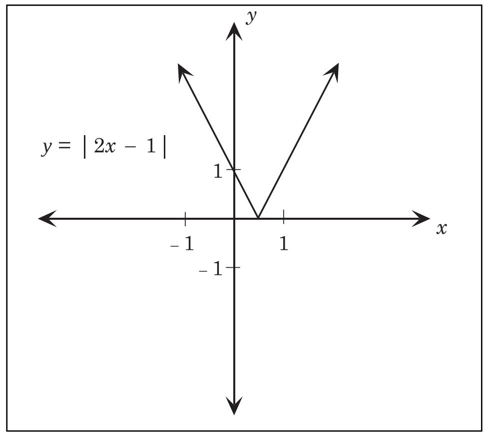
✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

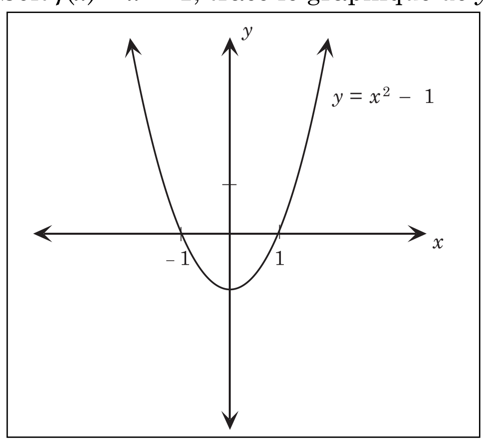
- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 1 (suite)

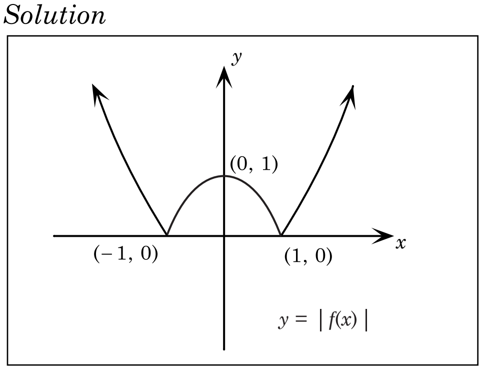
Solution



b) Soit $f(x) = x^2 - 1$; trace le graphique de $y = |f(x)|$.



Solution



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

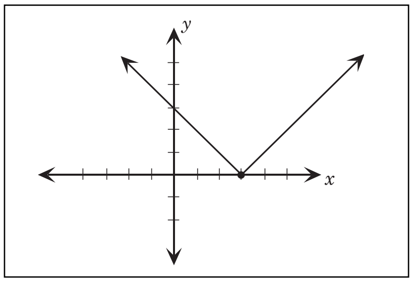
Si $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = |f(x)|$, quelle est l'ordonnée à l'origine de $g(x)$?

Choix multiples

Laquelle des équations suivantes décrit le mieux la fonction illustrée ci-dessous?

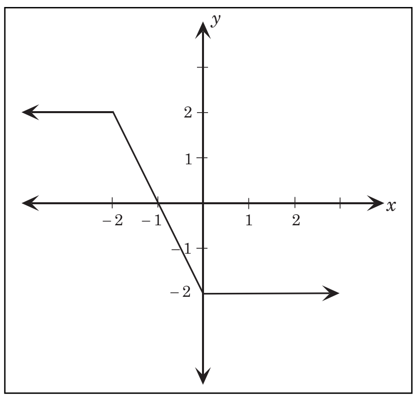
a) $y = 3\ |x|$ b) $y = |3x|$

c) $y = |x|$ d) $y = |x - 3|$



Problèmes

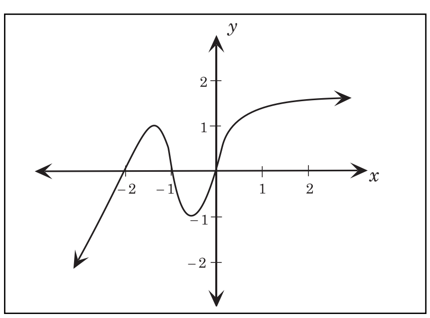
1. Utilise le graphique de la fonction $f(x)$, illustré à droite, pour tracer le graphique de $|f(x)|$.



2. Sur le graphique de $|f(x)|$, les points du graphique de $f(x)$ qui se trouvent au-dessus de l'axe des x ne sont pas déplacés. Cependant, les points qui se trouvent au-dessous de l'axe des x sont réfléchis par rapport à l'axe des x. Quelle formule permettrait d'obtenir la réflexion des points au-dessus de l'axe des x sans déplacer les points qui se trouvent au-dessous de l'axe des x?

3. Écris une formule telle que tous les points de $f(x)$ au-dessus de l'axe des x sont réfléchis au-dessous de l'axe des x, et vice-versa.

4. Utilise le graphique de $f(x)$, illustré à droite, pour tracer le graphique de $f(|x|)$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

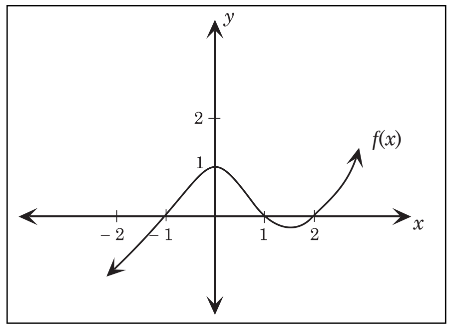
B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$ – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

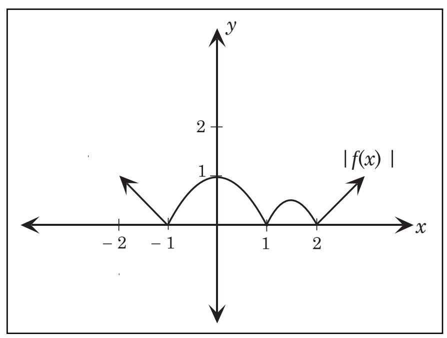
- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 2

Utilise le graphique de $f(x)$ pour tracer le graphique de $|f(x)|$.



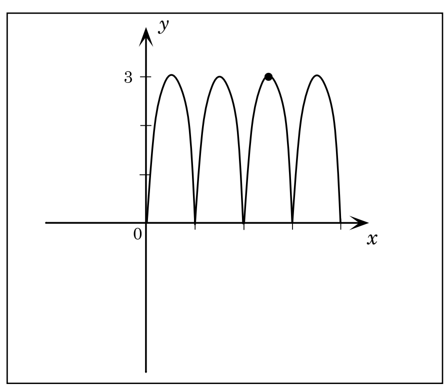
Solution



Exemple 3

Trace le graphique de $y = |\sin 2x|$. Quelle est la période de cette fonction?

Solution



Période $= \dfrac{\pi}{2}$

–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique de :
   a) $y = x + |x|$
   b) $y = |x| + |x - 1|$
   c) $|x| + |y| = 4$
   d) $y = |x^5 + 1|$

2. Trace le graphique de :
   a) $f(x) = |x^2 - 5| + 3$
   b) $f(x) = -|x^2| - 3$
   c) $f(x) = 2|\sin x| - 1$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-5 en utilisant le graphique ou l'équation de $f(x)$, décrire et tracer le graphique de $|f(x)|$ *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

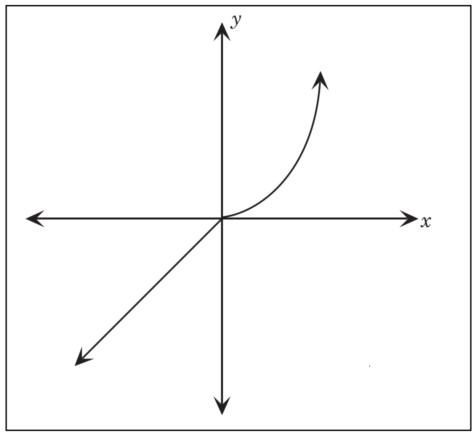
- **décrire de quelle façon l'opération valeur absolue affecte le graphique d'une fonction et tracer le graphique de la fonction (suite)**

Exemple 4

Trace le graphique des fonctions définies par morceaux :

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

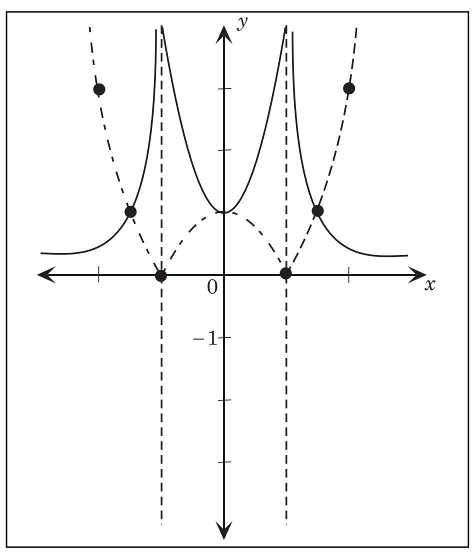
Solution



Exemple 5

Trace le graphique de $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$.

Solution



✔ **Communications** | Résolution
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trace le graphique de chacune des fonctions et indique le domaine, l'image ainsi que les coordonnées à l'origine :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

b) $m(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-6 décrire et effectuer des transformations singulières et des compositions de transformations sur des fonctions et des relations

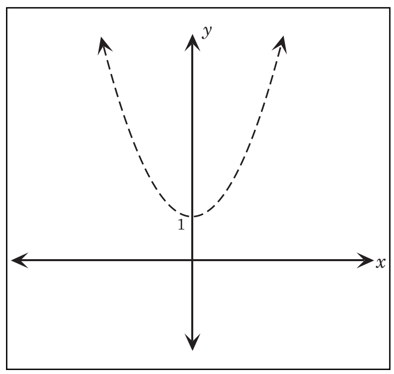
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

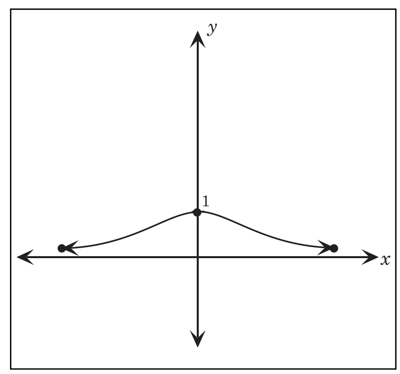
- **écrire une fonction sous forme de composition de fonctions singulières pour faciliter le traçage de son graphique**

On trouve une introduction à ce sujet dans le document *Mathématiques pré-calcul - Secondaire 3 : Document de mise en œuvre.*

La composition de fonctions, un outil important qui aide à tracer le graphique des fonctions plus complexes, consiste à décomposer la fonction en une suite de fonctions plus simples.

Ainsi, la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ peut être exprimée sous la forme $g(h(x))$, où g et h sont définis par $h(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$; on peut ensuite tracer le graphique.





- **effectuer et décrire des transformations singulières et des combinaisons de transformations de fonctions**

Dans les fonctions telles que $y = af(x) + k$ et $y = f(a(x - b))$, l'ordre de la transformation est important.

Soit $y = af(x) + k$: effectue un étirement par un facteur de a, puis un déplacement vertical de k unités.

Soit $y = f(a(x - b))$: effectue un étirement par un facteur de $\dfrac{1}{a}$, puis un déplacement horizontal de b unités, soit une compression par un facteur de a puis un déplacement horizontal de b unités.

✔ **Communications** — Résolution
Liens — Raisonnement
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscriptions au journal

Comment faut-il modifier la formule de $f(x)$ pour effectuer les transformations suivantes :

a) translation du graphique de 2 unités vers la droite?

b) compression horizontale du graphique par un facteur de 5?

c) étirement horizontal du graphique par un facteur de 2, puis translation de 3 unités vers le bas?

d) réflexion du graphique par rapport à l'axe des y, puis étirement vertical par un facteur de 3?

Problème

Trace le graphique de chaque fonction. Pour certaines, appuie-toi sur le concept de la composition des fonctions. Utilise un outil graphique pour vérifier ton graphique. Ensuite, indique le domaine, l'image, la valeur des coordonnées à l'origine ainsi que les équations des asymptotes, le cas échéant.

a) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x^2 - 1}\right|$

b) $f(x) = (x - 2)^3 - 1$

c) $h(x) = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-6 décrire et effectuer des transformations singulières et des compositions de transformations sur des fonctions et des relations *– suite*

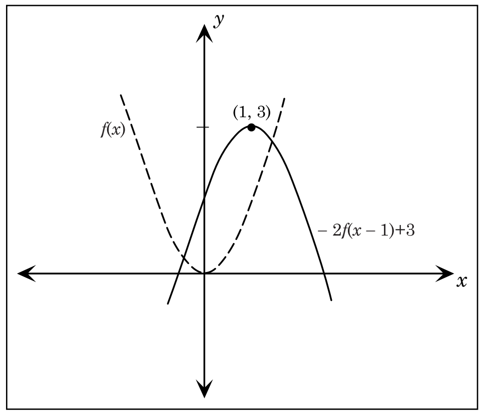
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **effectuer et décrire des transformations singulières et des combinaisons de transformations de fonctions (suite)**

Exemple 1

Soit $f(x) = x^2$; trace le graphique de $f(x)$ et celui de $y = -2f(x - 1) + 3$.

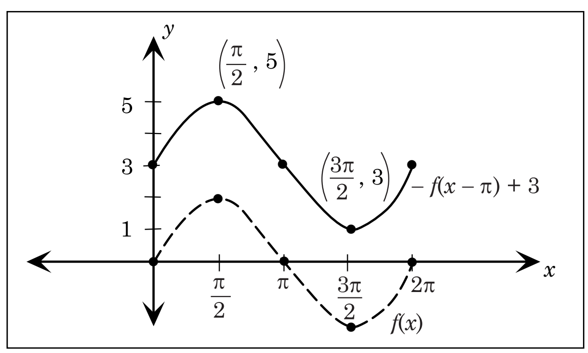
Solution



Exemple 2

Soit $f(x) = \sin x$; trace le graphique de $f(x)$ et celui de $y = -2f(x - \pi) + 3$.

Solution



Faites le lien entre les transformations et l'unité A.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques**

La transformation des courbes des fonctions sinus et cosinus forment un ensemble de courbes que l'on a baptisées les ***sinusoïdes***.

Définition : Une fonction qui peut être exprimée sous la forme $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ ou $f(x) = a \cos(bx + c) + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels, est appelée une fonction ***sinusoïdale***.

Expliquez les caractéristiques ou les propriétés suivantes de ces courbes.

Propriété	**Généralisation de $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ ou $f(x) = a \cos(bx + c) + d$**
période	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$
amplitude	$\lvert a \rvert$
déphasage	$\frac{-c}{b}$
maximum	$d + \lvert a \rvert$
minimum	$d - \lvert a \rvert$
image	$\left[d - \lvert a \rvert, d + \lvert a \rvert\right]$

Exemple 1

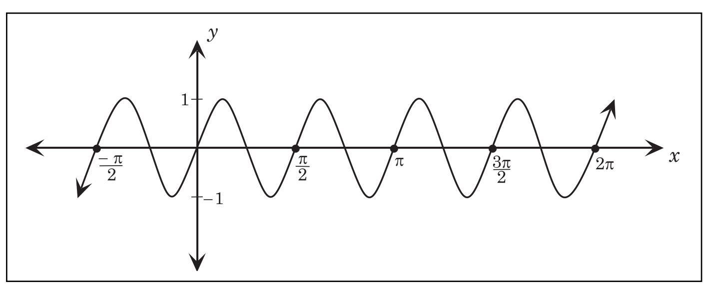
Trace le graphique et indique la période de :

a) $y = \sin 4x$

b) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

Solution

a)



–suite

Communications ✔ **Résolution**
Liens Raisonnement
Estimation et ✔ **Technologie**
Calcul Mental ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Trouve la période, l'amplitude et le déphasage de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

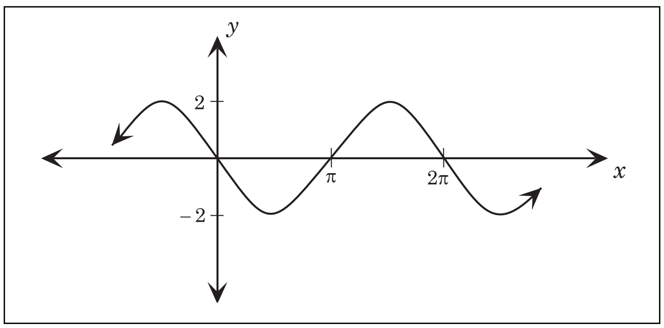
   a) $y = 2\sin(3x + \pi) - 1$

   b) $y = 5\cos(2x)$

   c) $y = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + 4$

   d) $y = \cos(x - \pi) + 3$

2. Dans le graphique suivant de $y = a\sin(bx + c)$, trouve les valeurs de a, b et c.



3. Trouve les abscisses à l'origine de chacune des fonctions circulaires suivantes :

   a) $y = \sin 3x$

   b) $y = \cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 1, Leçons 1 à 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 1 – suite

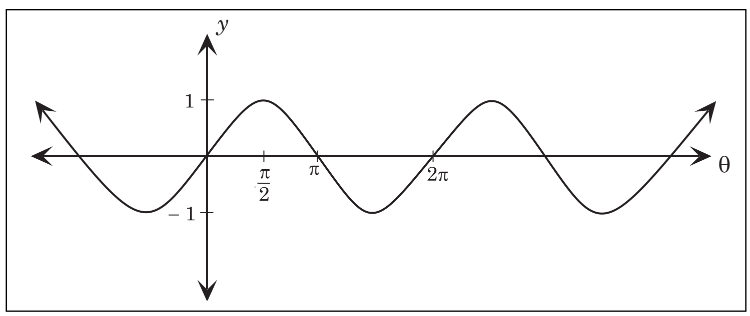
Solution – suite

La période est $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ parce que la courbe est comprimée par un facteur de 4.

Truc utile : Nombre d'élèves trouveront qu'il est plus facile de tracer les courbes de fonctions circulaires à partir de la période normale de la fonction pour déterminer où commence et où finit le cycle d'une courbe transformée. Par exemple, si la période d'une sinusoïde de base est 2π, trouver les points de début et de fin d'un cycle, comme suit :

Courbe	Début d'un cycle	Fin d'un cycle	Période
$y = \sin x$ de base	0	2π	2π
fonction transformée $y = \sin 4x$	Où $4x = 0$? Quand $x = 0$	Où $4x = 2\pi$? Quand $x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

b)



Pour illustrer comment appliquer ce truc, demandez aux élèves de trouver la valeur des points de début et de fin d'un cycle.

Début

$$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Fin

$$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

$$\theta = \frac{5\pi}{2}$$

– suite

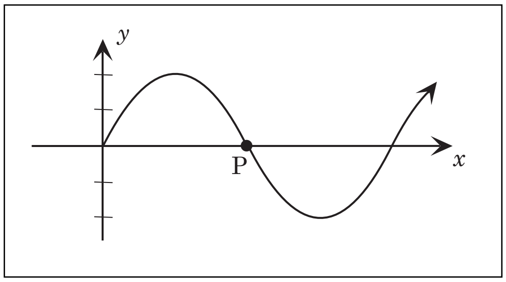
Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

1. La figure ci-dessous illustre le graphique de $y = 2 \sin 4x$. Quelle est la valeur de x au point P?



a) 2π

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{8}$

Problèmes

1. Quelle est l'image du graphique de $y = -2 \sin 4\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$?

2. Trace le graphique de :

   a) $y = 2 \sin(3x + \pi) - 1$

   b) $y = 5 \cos(2x)$

   c) $y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4$

   d) $y = \cos(x - \pi) + 3$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques *– suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

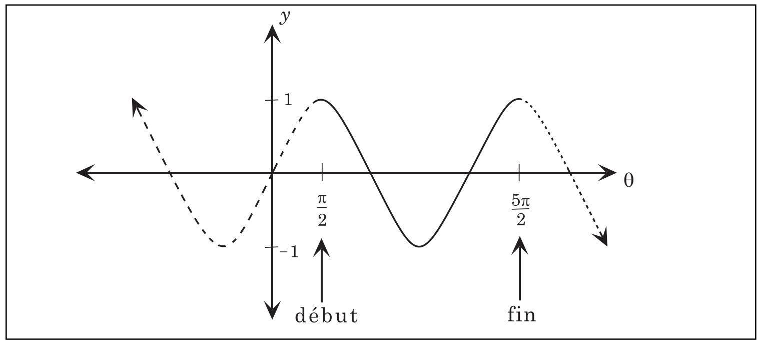
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

Commence par tracer le cycle de base de la courbe de la fonction cosinus à $\theta = \frac{\pi}{2}$, et termine le cycle à $\theta = \frac{5\pi}{2}$.



La période est toujours $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

Remarque : La période change seulement si le coefficient numérique avant x (ou θ) est modifié.

Exemple 2

Trace la courbe $y = 3 \sin(2x - \pi) + 1$.

Solution

Voici une méthode qui permet de tracer ce graphique :

1. Trace l'axe sinusoïdal à $y = 1$.
2. Marque les bornes supérieures et inférieures à 3 unités au-dessus et au-dessous de l'axe sinusoïdal, étant donné que l'amplitude est 3.
3. Trouve les points de début et de fin du cycle, mais utilise les points de début et de fin de la sinusoïde de base :

$$2x - \pi = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - \pi = 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad 2x = 3\pi$$
$$x = \frac{3}{2}\pi$$

La période étant $\frac{2\pi}{2} = \pi$, le cycle se terminera à π unités sur l'axe des x.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Soit $f(h)$ = A cos B(θ – D) + C; trouve la lettre à la source :
   a) d'un glissement vertical
   b) d'un glissement horizontal
   c) d'une compression — d'un étirement vertical
   d) d'une compression — d'un étirement horizontal
   e) de l'amplitude
   f) de la période

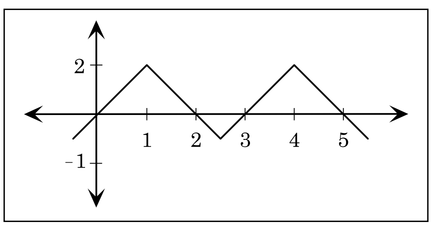
2. Trouve la période de $f(\theta) = \frac{1}{3}\sin(4\theta) + 2$.

3. Trouve l'amplitude de $f(x) = 4\cos\frac{2}{5}(\theta - \pi) - 1$.

4. Quelle est l'image de $f(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1$?

Problèmes

1. Voici un graphique de $f(x)$. La période de $f(x)$ est 3. Trace le graphique de $3f(2x)$ dans l'intervalle [–3, 3].



2. Un générateur à courant alternatif a une tension de V = 170 cos($120\pi t$), où V représente la tension et t le temps en secondes. Un redresseur DC simple a une tension de sortie de V = 170 $|\cos(120\pi t)|$. Trace les graphiques des tensions de sortie des deux appareils, puis décris les similarités et les différences.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

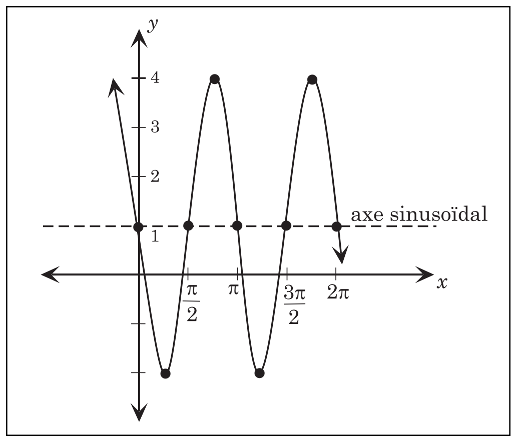
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 2 — suite

Solution — suite

4. Étant donné qu'il s'agit du graphique d'une fonction sinus, il commence au point milieu et se dirige vers le haut, pour atteindre son point sommet au quart du cycle. À mi-chemin entre chacun des points supérieurs et inférieurs, le graphique croise l'axe sinusoïdal.
5. Trace le graphique qui passe par les points critiques.



Soulignez les propriétés suivantes :

Propriété	$y = 3\sin(2x - \pi) + 1$
période	$\frac{2\pi}{2} = \pi$
amplitude	3
déphasage	$\frac{\pi}{2}$
maximum	4
minimum	–2
image	[–2, 4]

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction sinusoïdale et énoncer ses caractéristiques (suite)**

Exemple 3

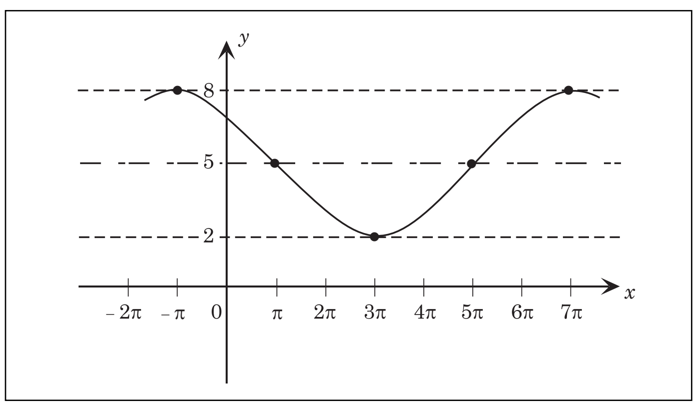
Trace le graphique de la fonction suivante :

$$y = 3\cos\frac{1}{4}(x+\pi)+5$$

Solution

Voici une méthode étape par étape efficace pour tracer le graphique :

1. Trace l'axe sinusoïdal à $y = 5$.
2. Marque les limites supérieures et inférieures à 3 unités au-dessus et au-dessous de l'axe sinusoïdal, étant donné que l'amplitude est 3.
3. Trouve le point de début d'un cycle à $x = -\pi$ (déphasage). Le cycle du cosinus commence à un point supérieur.
4. La période est $\dfrac{2\pi}{\left(\frac{1}{4}\right)}$, ce qui équivaut à 8π. Ainsi, le cycle se termine à 8π unités à la droite de $-\pi$ sur l'axe des x, à $x = 7\pi$.
5. À mi-chemin entre ces deux points supérieurs se trouve un point inférieur. À mi-chemin entre chacun des points supérieurs et inférieurs, le graphique croise l'axe sinusoïdal.
6. Trace le graphique qui passe par ces points critiques.



Communications | ✔ **Résolution**
Liens | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une fonction sinusoïdale a son maximum à (3, 1) et son minimum à (15, –3). Trace le graphique de la fonction.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

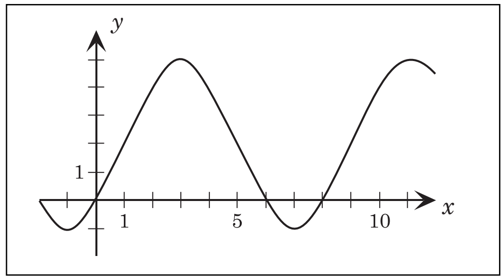
Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **écrire l'équation d'une fonction sinusoïdale dont on connaît le graphique**

Exemple 1

Trouve l'équation de la courbe sinusoïdale illustrée ci-dessous.



Solution

Le graphique indique une translation de $y = \text{A} \sin \text{B}x$ ou ($y = \text{A} \cos \text{B}x$). Pour trouver les valeurs de A et B, suis le raisonnement suivant :

amplitude : $\text{A} = \dfrac{\text{Max} - \text{min}}{2} = \dfrac{5 - (-1)}{2} = 3$

période : p = la distance horizontale entre des maximums successifs

$= 11 - 3 = 8$

étant donné que $8 = \dfrac{2\pi}{\text{B}}$, $\text{B} = \dfrac{\pi}{4}$

La vague illustrée est une translation de $y = 3 \sin \dfrac{\pi}{4} x$ ou de $y = 3 \cos \dfrac{\pi}{4} x$.

Pour trouver les grandeurs de la translation, il faut tout d'abord trouver l'***axe de la sinusoïde***, soit la droite horizontale qui passe à mi-chemin entre les maximums et les minimums de la courbe.

axe sinusoïdal : $y = \dfrac{\text{Max} + \text{min}}{2} = \dfrac{5 + (-1)}{2} = 2$

Si l'équation doit être exprimée en termes de cosinus, choisis le plus haut point de la courbe. Détermine les grandeurs de la translation entre le point (0, A) et le point le plus haut.

Si l'équation doit être exprimée en termes de sinus, choisis un point où la courbe croise son axe. Détermine la grandeur de la translation entre le point (0, 0) et le point d'intersection.

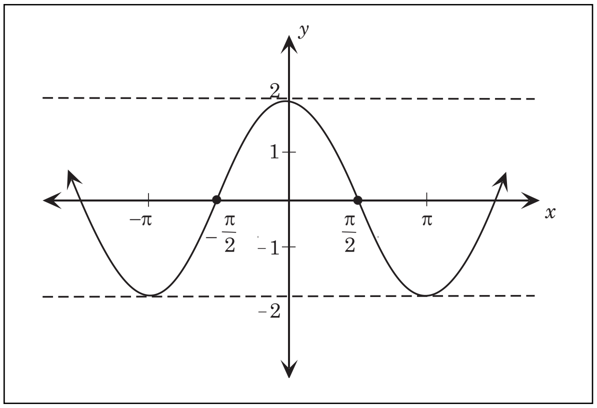
–suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

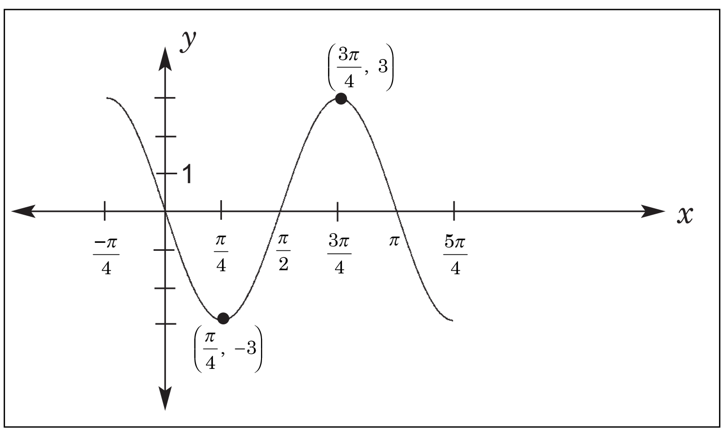
Calcul mental

Le graphique ci-dessous représente une fonction circulaire. Trouve son équation.



Problème

Écris l'équation du graphique illustré ci-dessous en termes de (cos *x*).



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

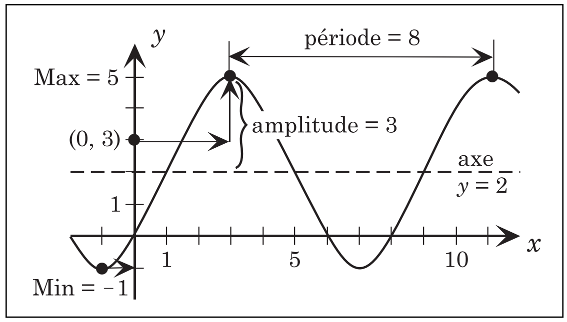
Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **écrire l'équation d'une fonction sinusoïdale dont on connaît le graphique (suite)**

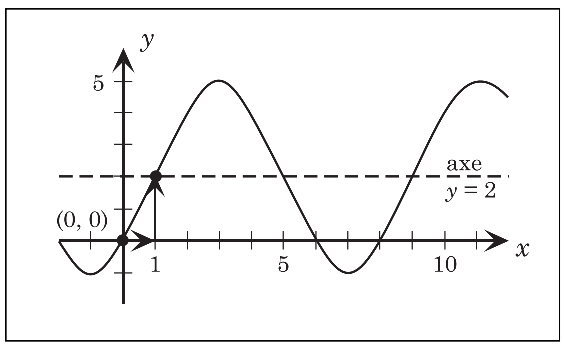
Exemple 1 – suite

Solution – suite



Le graphique de $y = 3\cos\frac{\pi}{4}x$ subit un mouvement de translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.

$$y - 2 = 3\cos\frac{\pi}{4}(x - 3)$$



Le graphique de $y = 3\sin\frac{\pi}{4}x$ subit un mouvement de translation de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut.

$$y - 2 = 3\sin\frac{\pi}{4}(x - 1)$$

Voici une équation qui définit le graphique illustré :

$$y - 2 = 3\cos\frac{\pi}{4}(x - 3) \text{ ou } y - 2 = 3\sin\frac{\pi}{4}(x - 1)$$

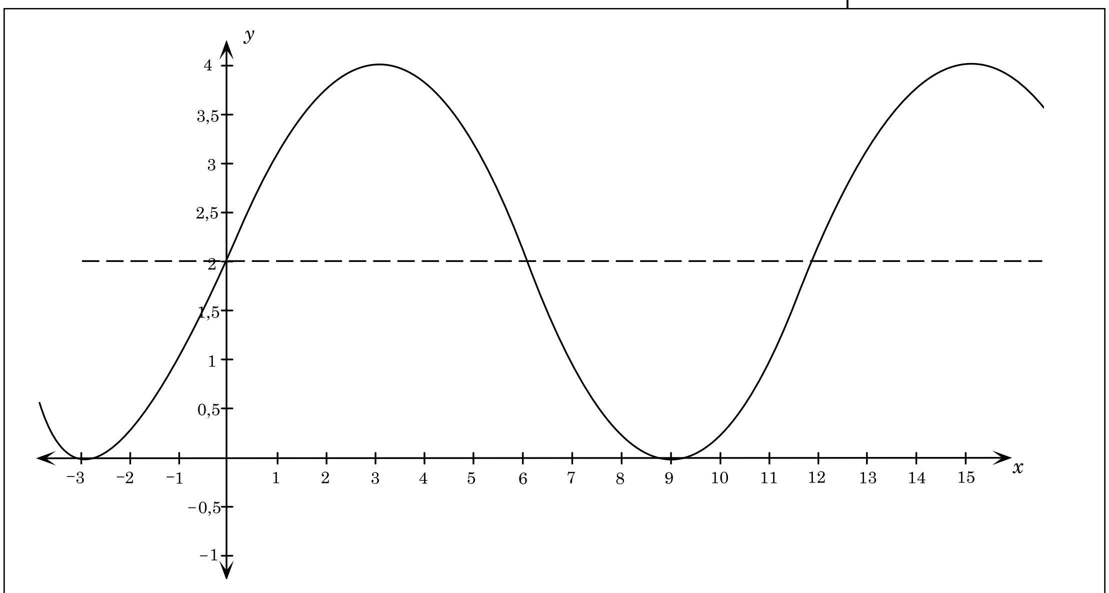
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une fonction sinusoïdale a un point maximal à $(x, y) = (2, 6)$. Le point minimal suivant est situé à $(6, 2)$. Trace le graphique et trouve une équation du graphique.

2. a) Trouve l'amplitude, la période, les translations horizontales et verticales de la fonction sinus illustrée ci-dessous.
   b) Écris une équation pour décrire la fonction sinus.
   c) Écris une équation de la même courbe en termes de la fonction cosinus.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes**

Les fonctions périodiques sont un outil précieux pour résoudre des problèmes. Voici deux exemples qui le démontrent :

Exemple 1

Dans une ville de la Saskatchewan, le lever du soleil le plus tardif se produit le 21 décembre, à 9 h 15. C'est le 21 juin qu'il se lève le plus tôt, à 3 h 15. L'heure du lever du soleil à d'autres moments de l'année est établie au moyen d'une équation sinusoïdale. Remarque : En Saskatchewan, l'heure n'est jamais avancée.

a) Quelle équation décrit l'heure des levers de soleil?

b) Détermine l'amplitude et la période de l'équation des levers du soleil.

c) Utilise cette équation pour prédire l'heure du lever du soleil le 9 avril.

d) Quelle est l'heure moyenne des levers de soleil durant l'année?

Solution

a) $f(x) = 3\cos \dfrac{2\pi}{365}\,(x + 10) + 6{,}25$

où x = le nombre de jours de l'année

b) l'amplitude est 3 et la période est 365

c) $f\,(99) = 5{,}35$ ou 5 h 21

d) 6,25 ou 6 h 15

Exemple 2

La profondeur de l'eau dans un port est définie par l'équation $p(t) = –4{,}5 \cos (0{,}16\pi t) + 13{,}7$, où $p(t)$ correspond à la profondeur en mètres et t au temps en heures, après la marée basse.

a) Trace la graphique de $p(t)$.

b) Quelle est la période de la marée, entre chacune des marées hautes?

c) Pour qu'un vraquier accoste en toute sécurité, l'eau doit avoir au moins 14,5 mètres de profondeur. Pendant combien d'heures, à l'intérieur d'un cycle, le vraquier peut-il accoster en toute sécurité?

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– *suite*

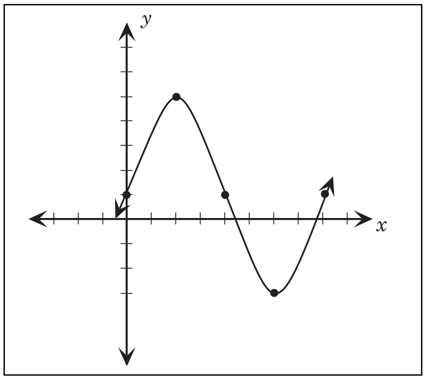
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

L'ordre des transformations et des réflexions influence-t-il le graphique obtenu? Justifie ta réponse.

Problème

1. 

Un professeur de mathématiques, M. Vermette, indique à sa classe que l'équation du graphique illustré ci-dessus est :

$$y = -4\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1.$$

Darcy, le petit futé de la classe, réplique aussitôt : Non! L'équation devrait s'écrire :

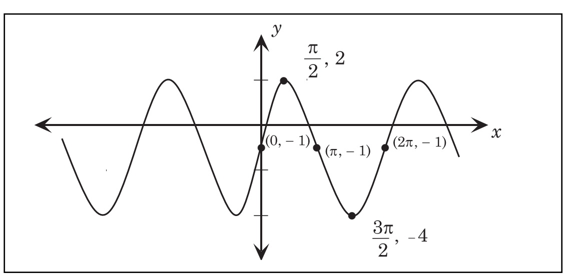
$$y = 4\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1.$$

Patrice n'est pas d'accord : Non, l'équation devrait être formulée ainsi :

$$y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

a) Qui a raison? Justifie ta réponse.
b) Lyne ajoute : « Je peux écrire une équation de ce graphique qui comprendrait la fonction sinus. » Écris cette équation.

2. Écris deux équations trigonométriques pour le graphique ci-dessous, la première en termes de sinus et l'autre en termes de cosinus.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

B-7 modéliser et résoudre des problèmes à l'aide de fonctions trigonométriques – *suite*

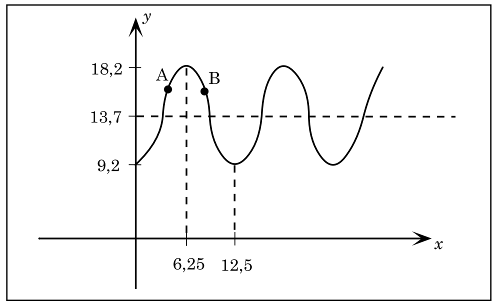
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des fonctions trigonométriques pour modéliser et résoudre des problèmes (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution

a)



b) 12,5 heures

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{0{,}16\pi}$$
$$= 12{,}5 \text{ heures}$$

c) Résous :

$$14{,}5 = -4{,}5\cos(0{,}16\pi t) + 13{,}7$$
$$0{,}8 = -4{,}5\cos(0{,}16\pi t)$$
$$\cos(0{,}16\pi t) = 1{,}777778$$
$$0{,}16\pi t = 1{,}7495$$
$$t = 3{,}48 \text{ heures}$$

Selon le graphique :
Le point A se trouve à $t = 3{,}48$.
Le point B se trouve à $t = 6{,}25 + (6{,}25 - 3{,}48) = 9{,}02$.
Le vraquier peut accoster en toute sécurité pendant $9{,}02 - 3{,}48 = 5{,}54$ heures.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

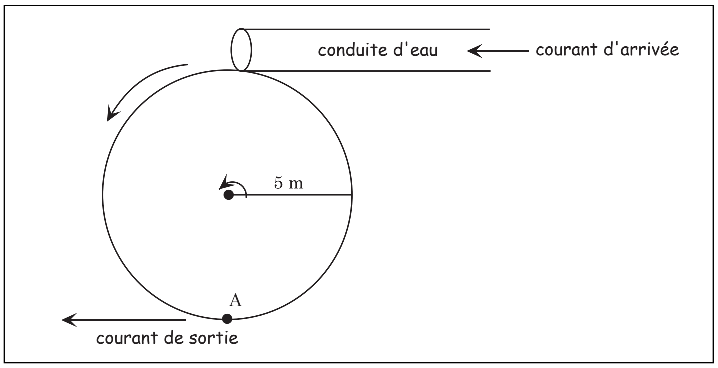
NOTES

Inscription au journal

Si $f(x) = p \cos [q(x + r)] + t$, explique l'effet des quatre constantes (p, q, r, et t) sur le graphique de la fonction.

Problèmes

1. La roue à eau illustrée dans la figure ci-dessous tourne à une vitesse de cinq révolutions toutes les quatre minutes. La partie inférieure touche la surface de l'eau (qui s'écoule).



   a) Le point A se trouve sur la roue. Trace un graphique exprimant la hauteur du point A par rapport à la surface du courant de sortie en fonction du temps à partir de $t = 0$ (temps en secondes).

   b) Écris une équation pour cette fonction.

2. La température maximale moyenne à Vancouver suit une courbe sinusoïdale; le point le plus élevé se trouve à 23,6°C le 26 juillet, et le plus bas à 4,2 °C, le 26 janvier.

   a) Illustre cette variation à l'aide d'une équation en termes de sinus ou de cosinus.

   b) Quelle est la température maximale prévisible pour le 26 mai?

   c) Donne le nombre de jours où la température maximale prévisible sera 21,0 °C ou plus.

   d) Explique pourquoi diverses équations mènent aux mêmes réponses en b) et en c).

3. Beaucoup de populations prédateur-proie, notamment les hiboux-souris ou les oiseaux-insectes, croissent selon une courbe sinusoïdale. La population la moins nombreuse, P, de prédateurs à un moment t, en jours, est établie à 7 000 le 26 janvier, et la population la plus nombreuse est établie à 13 000 le 26 juillet. Écris deux équations sinusoïdales qui représentent la fonction P(t). L'une d'elles sera une fonction sinus et l'autre une fonction cosinus.

Annexe B-1

Exercice d'algèbre

- **simplifier des fractions complexes**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes en fractions pour qu'elles contiennent seulement un seul numérateur et un seul dénominateur.

  Dans le cours de calcul universitaire, l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

  Exemple

  Simplifie :

  a) $\dfrac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{4x+1}{x-1}}$

  b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

  c) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

  d) $\dfrac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}$

  Solutions

  a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

  b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

  c) $\sqrt{3}$

  d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà unis en facteurs**

  Exemple

  Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

  a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}; \dfrac{x}{x-2}$

  b) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}; \dfrac{x^2}{x^2-9}$

  c) $\dfrac{\sin x}{\cos x}; \dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

  Solutions

  a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

  b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

  c) $\cos x \sin x$

- **utiliser $y - y_1 = m(x - x_1)$ pour trouver l'équation d'une droite**

  Dans le cours *Mathématiques pré-calcul – Secondaire 2*, on a présenté aux élèves la « forme point-pente » de l'équation d'une droite. Cette forme est beaucoup utilisée en mathématiques pré-calcul pour trouver l'équation d'une droite tangente à une courbe.

  Exemple 1

  Si la pente d'une droite est $\dfrac{-4}{5}$ et qu'elle passe par le point (–2, 3), écris l'équation de la droite.

  Solution

  $y-3=\dfrac{-4}{5}(x+2)$

  Exemple 2

  La pente de la tangente à une courbe donnée est définie par l'équation $m = 3x^2$. Quelle est l'équation de la tangente au point (–2, –8) ?

  Solution

  Pente : $m = 3(-2)^2$

  $m = 12$

  $\therefore$ l'équation est $y + 8 = 12(x + 2)$

- **utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions**

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x},\ h(x) = \sqrt{3x}$, trouve :

a) $f(4)$

b) $g(-2)$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

d) $h(3)$

e) $g(h(27))$

f) $g(f(0))$

Solutions

a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$

b) $g(-2) = \dfrac{1}{-2}$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$

e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \dfrac{1}{9}$

f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \dfrac{1}{2}$

Méthode en trois points – Mots et concepts

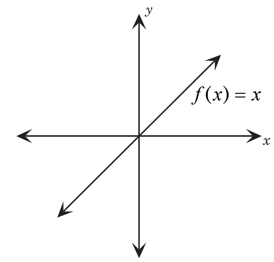
Annexe B-2

Définition
– fonction linéaire particulière $m = 1$, y ou $b = 0$
– tous les points où l'abscisse est égale à l'ordonnée
– f est une fonction impaire; le graphique est symétrique par rapport à l'origine

Mot ou concept
fonction identité

Équation
$f(x) = x$

Diagrammme

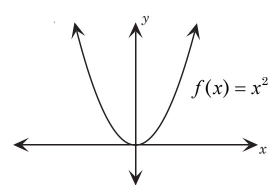


Définition
– domaine $\Re$
– fonction paire parce que $f(-x) = f(x)$ symétrique par rapport à l'axe des y
– sommet (0, 0)
– f décroissante $]-\infty, 0]$ et croissante dans l'intervalle $[0, \infty[$

Mot ou concept
élévation au carré de la fonction

Équation
$f(x) = x^2$

Diagrammme

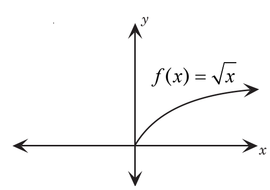


Définition
– fonction croissante $[0, \infty[$
– le graphique n'a pas de symétrie par rapport à l'axe des y ni à l'origine

Mot ou concept
fonction racine carrée

Équation
$f(x) = \sqrt{x}$

Diagramme

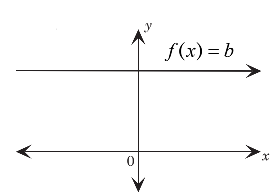


Définition
– fonction linéaire particulière $m = 0$, ordonnée à l'origine $= b$
– parallèle à l'axe des x
– tous les points ont la même ordonnée b
– domaine $\Re$; image $\{b\}$
– ni croissante ni décroissante
– symétrique par rapport à l'axe des y

Mot ou concept
fonction constante

Équation
$f(x) = b$

Diagramme



Annexe B-3

Méthode en trois points – Mots et concepts

Définition
- domaine $\Re$
- f est paire et symétrique par rapport à l'axe des y
- pour $x \geq 0$, $f(x) = x$ (fonction identité)

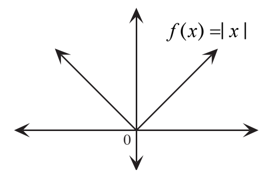
Mot ou concept

fonction valeur absolue

Équation

$$f(x) = |\, x \,|$$

Diagramme



Définition

Le tracé d'une fonction définie par morceaux est en fonction des restrictions relatives aux valeurs de x. Ces restrictions indiquent quelle fonction particulière il faut utiliser pour tracer le graphique (à l'aide d'un outil de tracé point à point.)

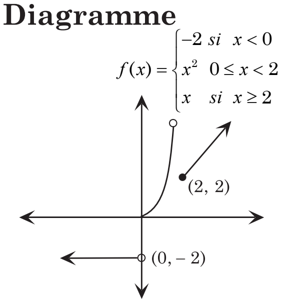
Mot ou concept

fonction définie par morceaux

Équation

$$f(x) = \begin{cases} \text{3 fonctions} \\ \text{différentes} \end{cases}$$

Diagramme



Définition

Mot ou concept

Équation

Diagramme

Définition

Mot ou concept

Équation

Diagramme

Annexe B-4

Méthode en trois points
Stratégie du vocabulaire des mathématiques

Mot ou concept

fonctions rationnelles

Mots clés

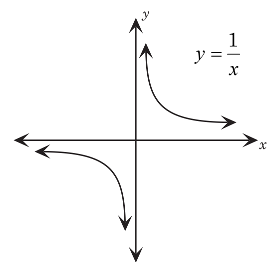
$y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$

Explication

$f(x) = \dfrac{a}{x - h} + k$

domaine : $x \in \Re$ sauf 0
image : $y \in \Re$ sauf 0
asymptotes : axes des x et des y

Exemple



Mot ou concept

Fonctions valeur absolue

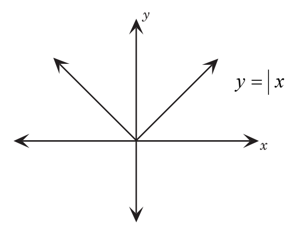
Mots clés

$f(x) = |x|$

Explication

domaine : $x \in \Re$
image : $\{y \mid y \geq 0\}$
coordonnée à l'origine : (0, 0)

Exemple



Mot ou concept

Fonctions impaires

Mots clés

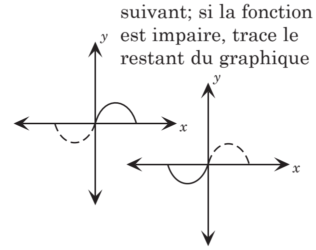
$y = x^n$ où
n est impair

Explication

- symétrique par rapport à l'origine
- réflexion de chaque point $(x, f(x)) = (-x, -f(x))$
- la fonction est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour chaque x dans le domaine de f

Exemple

Soit le graphique suivant; si la fonction est impaire, trace le restant du graphique



Mot ou concept

Fonctions paires

Mots clés

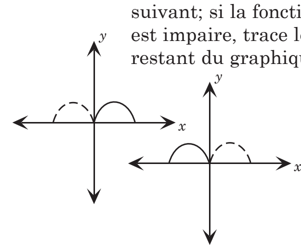
$y = x^n$ où
n est pair

Explication

- symétrique par rapport à l'axe des y
- réflexion de chaque point $(x, f(x)) = (-x, f(x))$
- la fonction est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour chaque x dans le domaine de f

Exemple

Soit le graphique suivant; si la fonction est impaire, trace le restant du graphique



Développement du concept selon Frayer

Annexe B-5

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles — Toujours

- dans une transformation, on utilise toujours l'équation de la fonction $f(x) = af(b(x - c)) + d$ où : a – étirement – compression à la verticale
  $|a|$ – amplitude
  b – étirement – compression à l'horizontal
  c/b – déphasage (horizontal)
  d – glissement vertical

Caractéristiques non essentielles — Parfois

- selon le nombre de transformations, les variables ne figurent pas dans toutes les équations
- si les transformations sont multiples, l'ordre est : (1) réflexion; (2) étirements – compressions; (3) glissements

Caractéristiques non applicables — Jamais

- les glissements horizontaux ne vont jamais dans le même sens que le signe +/–
- les glissements verticaux ne vont jamais dans le sens opposé du signe +/–
- $b > 1$ = compression à l'horizontale
- $b < 1$ = étirement à l'horizontale
- l'amplitude n'est jamais négative

Sujet – concept

Transformations

Exemples

$y = a \cos b(x - c) + d$

$y = -2 \cos \frac{\pi}{10}(x - 3) + 9$

- le signe "–" indique que le graphique est réféchi par rapport à l'axe des x
- 2 indique un étirement vertical
- cos est la fonction
- $\frac{\pi}{10}$ permet de trouver la période = $\frac{2\pi}{b}$
- –3 indique un glissement horizontal dans le sens opposé (positif)
- +9 représente l'axe horizontal ou un glissement vertical dans le même sens positif

Exemples non pertinents

$y = afb(x - c) + d$

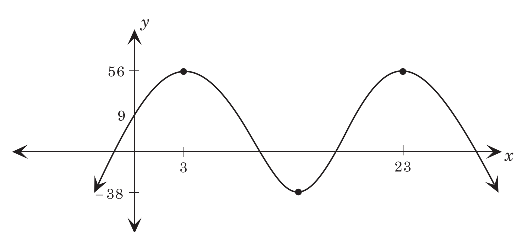
$y = a \cos \frac{1}{2}(-x - 3) + 7$

Erreurs fréquentes

- étirements et compressions : à la verticale, $a > 1$ indique un étirement et $a < 1$ une compression ***mais***, à l'horizontale $a < 1$ indique une compression et $a < 1$ un étirement
- réflexions : $y = -f(x)$ indique une réflexion par rapport à l'axe des x, ***mais*** $y = f(-x)$ indique une réflexion par rapport à l'axe des y
- glissements : à l'horizontale – opposé signe +/– tel qu'écrit; à la verticale – même sens que +/–, tel qu'écrit

Fais un dessin ou un diagramme

$y = afb(x - c) + d \rightarrow y = 47 \cos \frac{\pi}{10}(x - 3) + 9$



Définition

- pour effectuer une transformation, il faut prendre l'équation générale de la fonction : $f(x) = af(bx - c) + k$ et la modifier par une réflexion, une compression, un étirement ou un glissement à la verticale ou à l'horizontale, selon les valeurs utilisées dans les différents membres de l'équation.

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick, and Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Développement du concept selon Frayer

Annexe B-6

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles — Toujours

- $y = af(bx - c) + k$ ou $y = afb\left(x - \frac{c}{b}\right) + k$ (équation générale) prend toujours cette forme générale

Caractéristiques non essentielles — Parfois

- variable manquante, p. ex., $y = af(bx - c)$ pas de k

Caractéristiques non pertinentes — Jamais

- le glissement horizontal ne va jamais dans le même sens que son signe
  (–3) = glissement à droite
  (+3) = glissement à gauche

Sujet – concept

Déphasage

Exemples

$$\begin{array}{cccc} a & b & \frac{c}{b} & k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$y = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

- amplitude = 2
- glissement vertical = 1 vers le haut
- période = $\frac{2\pi}{3}$
- déphasage = $\frac{\pi}{2}$ vers la droite
- cycle $= \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$
  $= \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$

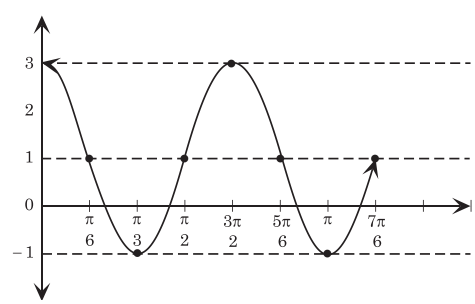
Exemples non pertinents

$$y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

- amplitude = 2
- glissement vertical = 1 vers le haut
- période = $\frac{2\pi}{3}$
- déphasage = $\frac{\pi}{2}$

Exemple d'une faute parce que le 3 se trouve à l'intérieur des paranthèses, ce qui indique que le glissement devrait être $\frac{c}{b}$ ou $\frac{\pi}{6}$.

Fais un dessin ou un diagramme



Définition

Le déphasage est une modification apportée à une fonction de base. Ces translations comprennent les translations horizontales.

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick, et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisation avec autorisation.

Organigramme des graphiques

Annexe B-7

Transformations

À la verticale

Étirements

Formule générale

$g(x) = af(x)$

$|\ x\ | > 1$ = étirement

Plus la valeur de a est élevée, plus la pente ascendante du graphique est abrupte.

Compressions

Formule générale

$g(x) = af(x)$

$|\ a\ | < 1$ = compression

Plus la valeur de a est petite, moins la pente ascendante du graphique est abrupte.

À l'horizontale

Étirements

Formule générale

$h(x) = f(bx)$

$|\ b\ | < 1$ = étirement

Si b est plus petit que 1, multiplier la coordonnée en x par l'inverse de b

Compressions

Formule générale

$h(x) = f(bx)$

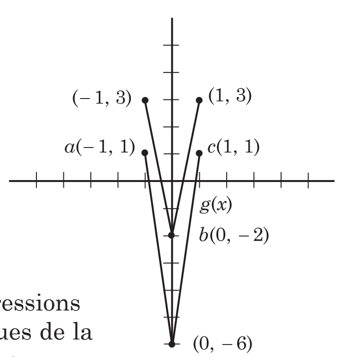
$|\ b\ | > 1$ = compression

Si b est plus grand que 1, multiplier la coordonnée en x par l'inverse de b

Trouve $g(x) = 3f(x)$.

La valeur 3 influence la coordonnée en y. Le point original a (–1, 1) devient (–1, 3).

Il s'agit d'un étirement parce que $|a| > 1$.

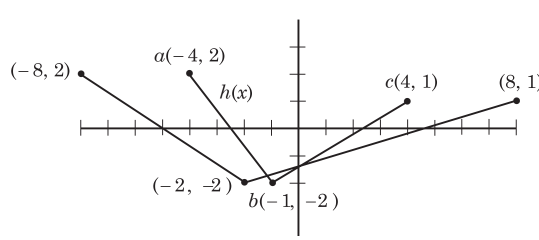


Les compressions sont résolues de la même façon.

Trouve $h(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)x$.

La valeur $\frac{1}{2}$ influence la coordonnée en x. Le point original a(–4, 2) devient (–8, 2).

Il s'agit d'un étirement parce que $|b| < 1$.



Les compressions sont résolus de la même façon.

Annexe B-8

Organigramme des graphiques

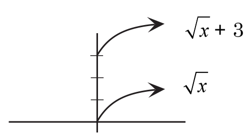
Glissements verticaux et horizontaux

Glissements verticaux

$g(x) = f(x) + k$
Si le graphique est une fonction de $k \in \Re$, il est déplacé à la verticale de $|k|$ unités. Si $k > 0$, le graphique glisse de $|k|$ unités vers le haut. Si $k < 0$, le graphique glisse de $|k|$ unités vers le bas.

Les glissements à la verticale modifient la coordonnée en y du graphique de $\pm k$ unités, selon le signe de k

Graphique de $f(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = \sqrt{x} + 3$.

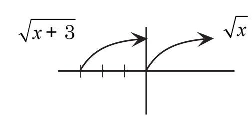


Glissements horizontaux

$g(x) = f(x - h)$
Si f est une fonction et $h \in \Re$, le graphique glisse à l'horizontale de $|h|$ unités. Si $h > 0$, le glissement se fait vers la droite de h unités. Si $h < 0$, le glissement se fait vers la gauche de $-h$ unités.

Les glissements à l'horizontale modifient la coordonnée en x du graphique de $\pm h$ unités, selon le signe de h.

Graphique $f(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = \sqrt{x+3}$



Organigramme des graphiques

Annexe B-9

Application du déphasage

Équations

$y = afb\left(x - \dfrac{c}{b}\right) + k$ *utilise cette forme

$y = af(bx - c) + k$ *remplace par la forme ci-dessus

Graphiques

On peut obtenir l'équation d'une sinusoïdale à partir d'un graphique.

Déterminer quelles données sont importantes

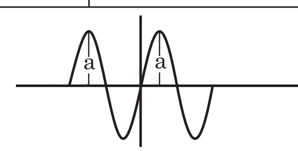
Amplitude

amplitute = a

$y = 3 \sin x$

amplitude = 3

Amplitude



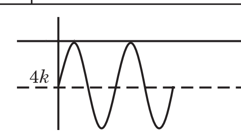
Axe horizontal

horizontal = k

$y = \sin x + 4$

axe horizontal = 4

Axe horizontal



Fréquence - période

fréquence dans $2\pi = b$

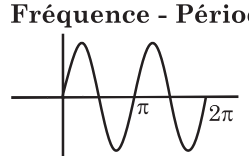
période $= \dfrac{2\pi}{b}$, $\therefore b = 2$

$y = \sin 2x$

freq. dans $2\pi = 2$

période $= \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Fréquence - Période



fréquence = –2

période = π

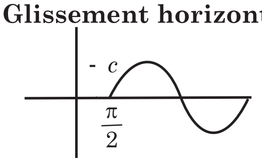
Glissement horizontal

glissement = $-c$

$y = \sin(x - 4)$

glissement = 4 unités sens positifs

Glissement horizontal



c = glissement

$c = -\dfrac{\pi}{2}$

On peut rassembler toutes ces données pour construire un graphique

Si on rassemble toutes les données, on obtient l'équation :

$$y = afb\left(x - \frac{c}{b}\right) + k$$

Annexe B-10

Organigramme des graphiques

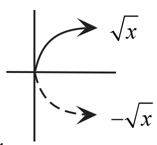
Réflexions et fonctions réciproques

Réflexions

Graphiquement

Graphique : $f(x)=\sqrt{x}$

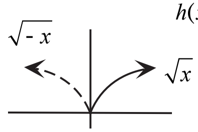
$f(x)=-\sqrt{x}$



Étant donné que toutes les valeurs de y prennent le signe opposé, le graphique est réfléchi par rapport à l'axe des x.

Graphique : $h(x)=\sqrt{x}$

$h(x)=\sqrt{-x}$



Étant donnée que toutes les valeurs de x changent de signe, le graphique est réfléchi par rapport à l'axe des y.

Algébriquement

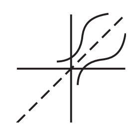
$k(x) = -f(x)$
Le graphique est réfléchi par rapport à l'axe des x parce que toutes les valeurs de y changent de signe.

$k(x) = f(-x)$
Le graphique est réféchi par rapport à l'axe des y parce que toutes les valeurs de x changent de signe.

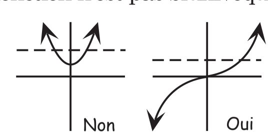
Fonctions réciproques

Graphiquement

Les fonctions de f et de g sont les réciproques l'une de l'autre si elles réfléchissent une image miroir l'une de l'autre par rapport à l'axe d'identité ($y = x$).



Le test de la droite horizontale permet de savoir si une fonction est biunivoque. Si une droite horizontale croise les coordonnées à l'origine plus d'une fois, la fonction n'est pas biunivoque.



Algébriquement

Pour résoudre l'équation, change les valeurs de x et de y et trouve la valeur de y. Si l'équation a une solution, il s'agit de fonctions réciproques.

Trouve le réciproque de $f(x) = 5x - 1$:

$$y = 5x - 1$$
$$x = 5y - 1$$
$$x + 1 = 5y$$
$$\frac{x+1}{5} = y$$
$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}$$

Adaptation de la méthode en trois points

Annexe B-11

Équation générale des transformations

$$y = af(bx - c) + d$$

Symbole	Explication
a Étirement ou compression vertical	— Il y a étirement si la valeur est supérieure à 1. — Il y a compression si la valeur est inférieure à 1.
Propriétés particulières $\lvert a \rvert$ est l'amplitude. Si a est négatif, le graphique est réfléchi par rapport à l'axe des y	

Symbole	Explication
b Étirement ou compression à l'horizontale	— Il y a étirement si la valeur est inférieure à 1. — Il y a compression si la valeur est supérieure à 1.
Propriétés particulières $\lvert b \rvert$ est le nombre de cycles de la sinusoïdale dans 2π unités de x	

Symbole	Explication
c Glissement horizontal	— Glissement vers la droite de c / b unités si le signe est négatif — Glissement vers la gauche de c / b unités si le signe est positif.
Propriété particulière Aussi appelée *déphasage*	

Symbole	Explication
d Glissement vertical	— Glissement de d unités vers le haut si le signe est positif — Glissement de d unités vers le bas si le signe est négatif.
Propriétés particulières On parle aussi d'axe horizontal	

Adaptation de l'approche en trois points : Adapté de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*.

Vue d'ensemble du concept

Annexe B-12

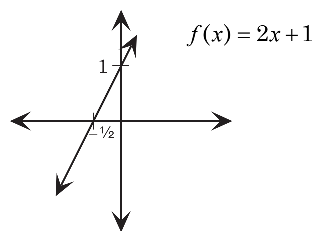
Concept

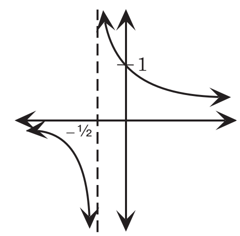
Fonction inverses

Exemples

Soit $f(x) = 2x + 1$, trace l'inverse du graphique

$g(x) = \frac{1}{2x+1}$





$g(x) = \frac{1}{2x+1}$

Caractéristiques

- quand elle est multipliée par la fonction originale, le produit est 1
- ce sont des courbes
- si $f(x)$ est croissante, $\frac{1}{f(x)}$ devient plus petit
- si $f(x)$ est décroissante, $\frac{1}{f(x)}$ devient plus grand

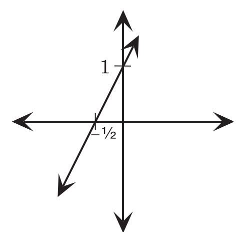
À quoi ça ressemble?

- à des fonctions inverses parce que le graphique original est modifié pour créer un nouveau graphique

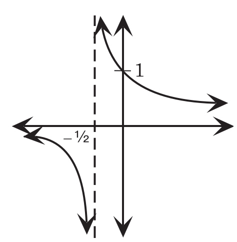
À quoi ça ne ressemble pas?

- ce n'est pas un étirement, une compression ni un glissement parce que la transformation consiste à étirer, à compresser ou à déplacer le graphique original

Peux-tu l'illustrer?



- les points les plus élevés deviennent les points les plus bas et les plus bas deviennent les plus élevés
- le point à $x = 0$ n'est pas défini



- une asymptote est formée là où la fonction originale croise l'axe des x

Définition

La fonction inverse est issue de l'inverse d'une autre fonction. Si on multiplie ces deux fonctions ensemble, le produit est 1.

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec l'autorisatino de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Inscription au journal

Annexe B-13

Inscription au journal n°6

Trace le graphique de $f(x) = \frac{2}{5}\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. Trouve l'amplitude, l'axe horizontal, la période, le cycle et les zéros.

$$\frac{2}{5}\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

1. amplitude = ∞ (aucune restriction relative aux valeurs de y)
2. axe horizontal = axe des x (aucun terme en k)
3. cycle : $3x - \frac{\pi}{2} = 0$

$$3x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ (début)}$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ (fin)}$$

$$\left(\frac{\pi}{6} \text{ à } \frac{\pi}{2}\right)$$

4. période : $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$

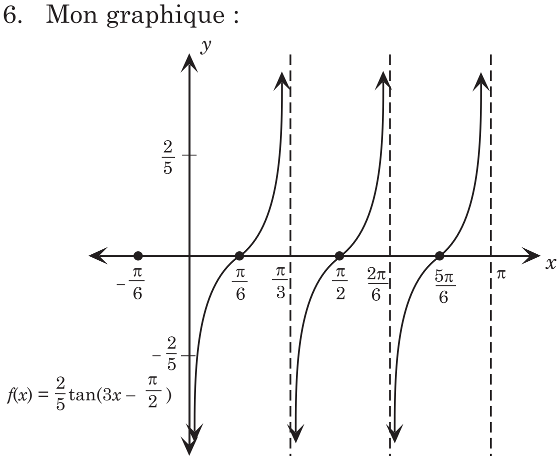
5. zéros de tan $x = 0, \pi, 2\pi$

zéros de tan $3x : 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

zéros de $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) : 0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}}$

6. Mon graphique :



1. J'en conclus que l'amplitude est l'infini parce qu'il n'y a aucune restriction relative aux valeurs de y.

$$\left(\frac{2}{5} \geq y \geq -\frac{2}{5}\right)$$

2. L'axe horizontal est 0 (parce qu'il n'y a aucun terme en k) – c'est l'axe des x.
3. Pour trouver le début du cycle, j'ai pris le terme à l'intérieur des parenthèses et je l'ai mis à zéro, puis j'ai trouvé la valeur de x. Ensuite, j'ai trouvé la fin du cycle $\left[\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi\right]$. $(bx - c)$ varie de 0 à π.
4. La période d'une fonction tan équivaut à $\frac{\pi}{b}$. J'ai simplement remplacé le terme en « b » et j'ai trouvé la période, qui est $\frac{\pi}{3}$.
5. Pour trouver les zéros, j'ai pris les zéros originaux de tan $(0, \pi, 2\pi)$ et j'ai divisé par le terme en « b ».

J'ai ensuite ajouté le terme trouvé en « c » $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ à chaque zéro. J'ai obtenu mes nouveaux zéros pour la fonction $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ — pour obtenir à

$\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ à partir de $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

J'ai simplement isolé x en enlevant le coefficient 3 à l'intérieur de l'expression.

J'ai ainsi obtenu $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ —

les zéros obtenus sont : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

6. J'ai ensuite tracé le graphique de la fonction $\frac{2}{5}\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ en utilisant toutes les données ci-dessus.

Unité C
Identités trigonométriques

IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- examinent le graphique d'identités trigonométriques et les analysent;
- vérifient les identités trigonométriques algébriquement, en utilisant les identités trigonométriques de base;
- utilisent les identités relatives à la somme, à la différence et au double d'un angle pour le sinus, le cosinus et la tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- d'analyser les identités graphiquement, si c'est approprié;
- d'utiliser diverses techniques algébriques pour vérifier des identités;
- d'intégrer les identités de base pour résoudre des équations trigonométriques;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui feront appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe C-1) :
- la décomposition en facteurs de trinômes; la différence des carrés; les facteurs communs;
- les fractions complexes.

Matériel

- outils graphiques

Durée

- 12 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Résoudre des équations exponentielles, logarithmiques et trigonométriques et des identités

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes C-2 à C-7, p. C-42 à C-47).

- **définir une équation et une identité trigonométrique**

  Une ***fonction trigonométrique*** est par définition une équation qui comprend au moins une fonction trigonométrique d'une variable. On appelle ces équations des ***identités trigonométriques*** si l'équation est vérifiée quelle que soit la valeur des variables dans les deux membres. Si l'équation n'est pas une identité, elle est appelée ***équation conditionnelle***.

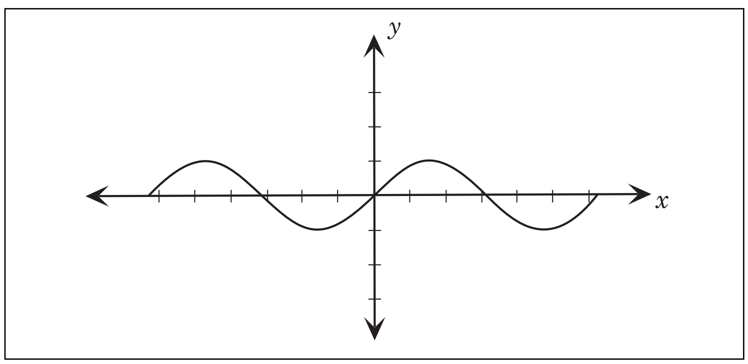
- **examiner et analyser les graphiques des équations ou des identités**

  Exemple 1

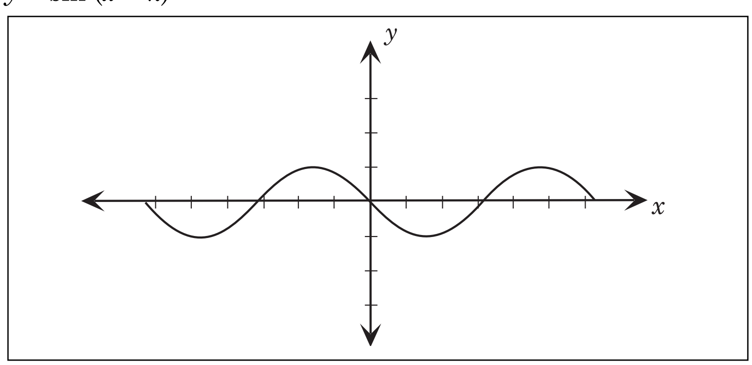
  Trace le graphique de $y = \sin x$ et de $y = \sin (x + \pi)$.

  Solution

  $y = \sin x$



  $y = \sin (x + \pi)$



  Ces graphiques permettent de constater que $\sin x \neq \sin (x + \pi)$.

  Ce n'est pas une identité.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Simplifie :

a) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\tan\theta$

b) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

c) $\dfrac{\sin\theta}{\sin^2\theta}$

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en oeuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

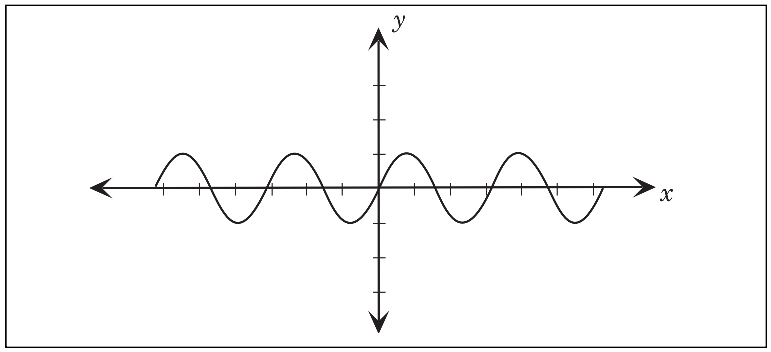
• **examiner et analyser les graphiques des équations ou des identités (suite)**

Exemple 2

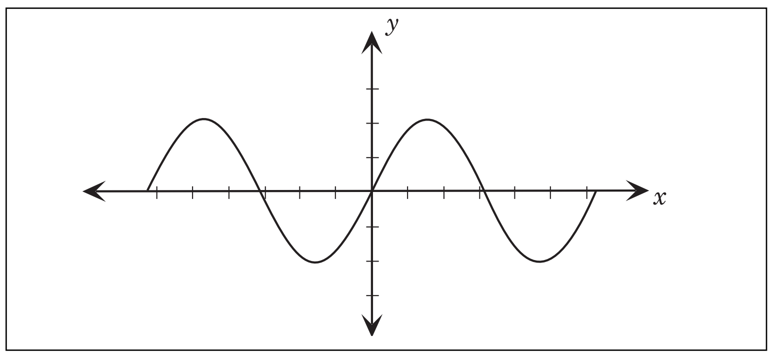
Sur le même système d'axes, trace le graphique de $y = \sin 2x$ et de $y = 2 \sin x$.

Solution

$y = \sin 2x$



$y = 2 \sin x$



Les graphiques permettent de constater que l'équation n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs : ce ne sont pas des identités.

Remarque : La méthode des graphiques ne permet pas de démontrer (vérifier) une identité.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 3, Leçons 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **énoncer les huit identités trigonométriques de base**

Identités inverses

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identités de Pythagore

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Variations : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(division par $\cos^2 x$) $\qquad$ (division par $\sin^2 x$)

$\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$ $\qquad$ $\boxed{\cot^2 x + 1 = \csc^2 x}$

- **utiliser des identités pour trouver des autres fonctions circulaires**

Les identités de base peuvent remplacer la méthode du cercle unitaire ou du triangle rectangle pour trouver des autres fonctions circulaires.

Exemple

Trouve $\cos x$ si $\cot x = 2$ et $\sin x < 0$.

Solution

$$\begin{aligned} \cot^2 x + 1 &= \csc^2 x \\ 2^2 + 1 &= \csc^2 x \\ 5 &= \csc^2 x \\ \sqrt{5} &= \csc^2 x \end{aligned}$$

Étant donné que $\sin x < 0$, alors $\csc x = -\sqrt{5}$ et
$\sin x = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ ou $\dfrac{-\sqrt{5}}{5}$.

– suite

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Si $\tan \theta = \frac{-5}{13}$ et $\cos \theta > 0$, trouve la valeur exacte de $\sin \theta$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement *– suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités pour trouver des autres fonctions circulaires (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite

Ainsi, $\cot x = 2$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2$$

$$\cos x = 2 \sin x$$

$$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \text{ ou } \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

- **utiliser des identités pour simplifier des fonctions trigonométriques**

Exemple

Simplifie le plus possible l'expression suivante :

$$\frac{\sin x + \cos^2 x \csc x}{\csc x}$$

Solution

$$\frac{\sin x + \cos^2 x \cdot \csc x}{\csc x} = \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos^2 x \csc x}{\csc x}$$

$$= \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Exprime $\cot\theta \sin\theta$ sous forme de fonction trigonométrique simple de θ.

Choix multiples

Laquelle parmi les expressions suivantes est équivalente à $\cot^2\theta$?

a) $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

b) $\dfrac{1}{1-\sin^2\theta}$

c) $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

d) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

Problèmes

1. Simplifie l'expression suivante :

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x}$$

2. Exprime $1 - \tan^2\theta$ en termes de la fonction sinus seulement.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement *– suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de base pour démontrer des identités trigonométriques**

Les techniques suivantes permettent de résoudre des identités :

a) Commence par le membre le plus complexe d'une identité et essaie de le réduire pour qu'il devienne le membre le plus simple.
b) Si la technique expliquée en (a) ne semble pas fonctionner, essaie de simplifier chaque membre séparément et de les réduire à la même expression.
c) Effectue les additions et les soustractions nécessaires dans les expressions rationnelles.
d) Effectue les multiplications et les divisions nécessaires dans les expressions rationnelles.
e) Simplifie les fractions en annulant les facteurs communs dans le numérateur et le dénominateur.
f) Si c'est possible, effectue les décompositions en facteurs dans les expressions.
g) Essaie de multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par la même expression.
h) Essaie de reformuler toutes les expressions trigonométriques en termes de sinus et de cosinus.

Exemple 1

Démontre que $\cot x + \tan x = \csc x \sec x$.

Solution

$$\begin{aligned}
\text{CG} &= \cot x + \tan x \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\
&= \frac{1}{\sin x \cos x} \\
&= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \csc x \cdot \sec x
\end{aligned}$$

$\therefore$ côté gauche = côté droit

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que :

   a) $\dfrac{\csc^2\theta + \sec^2\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \cot\theta + \tan\theta$

   b) $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}$

2. L'expression $\tan\theta\csc\theta - \sec^2\theta + 1$ est le côté gauche d'une identité. Trouve un côté droit possible pour cette identité, de sorte que la preuve de cette identité comporte au moins trois étapes importantes. Explique le travail que tu as fais.

3. Soit $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$ le côté gauche d'une identité. Jack déclare qu'il peut exprimer le côté droit en termes de la fonction sinus. Jill dit qu'elle peut écrire un côté droit en termes de la fonction cosinus.

   a) Quel sera le côté droit trouvé par Jack?

   b) Quel sera le côté droit trouvé par Jill?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — ✔ Résolution — ✔ Raisonnement — ✔ Technologie — Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de base pour démontrer des identités trigonométriques (suite)**

Exemple 2

Soit l'identité $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$:

a) vérifie l'identité dans le cas précis où $x = \dfrac{\pi}{3}$.

b) fais une vérification pour un angle général, en utilisant une méthode algébrique.

Solution

a) Côté gauche

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{3}$$

Côté droit

$$\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Côté gauche = Côté droit

b) Côté gauche $= \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$$= \frac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \text{Côté droit}$$

Remarque : Les élèves peuvent résoudre les deux côtés en même temps si aucun signe d'égalité ou symbole d'identité ne se trouve entre les deux. Une fois que les deux côtés sont identiques, ils peuvent conclure que le côté gauche est égal au côté droit.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Démontre que :

a) $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = (\tan^2 \theta)(\sin^2 \theta)$

b) $\dfrac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \dfrac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques en utilisant des identités**

Exemple 1

Résous tan x = 2 sin x, où $0 \le x \le 2\pi$.

Solution

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x, \text{ étant donné que } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = 2\sin x\cos x, \text{ pourvu que } \cos x \neq 0$$

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$$

L'équation suivante pose un vrai défi.

Étant donné que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, alors $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ est une identité qui comprend un radical.

De même, $x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ est une identité qui comporte un radical. Par conséquent, il arrive souvent que, pour résoudre des équations qui comprennent des sommes et des différences d'expressions linéaires de fonctions sinus et cosinus, on élève les deux membres au carré, jusqu'à ce que les « radicaux » soient éliminés. Cependant, étant donné que les deux membres ont été élevés au carré, il peut arriver que certaines solutions n'aient aucun lien avec la fonction - il faut les vérifier.

Exemple 2

Résous cos x + 1 = $\sqrt{3}$ sin x, où $0 \le x < 2\pi$.

Solution

Remarque : Les termes cos x et $\sqrt{3}$ sin x fonctionnent comme des radicaux. Par conséquent, il faut commencer par élever les deux membres au carré.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Comment peut-on utiliser des identités trigonométriques pour résoudre des équations trigonométriques?

Problèmes

1. Trouve la valeur de x dans chacune des équations étant donné $0^\circ \leq x < 360^\circ$:

   a) $\tan x = \sin x \tan x$

   b) $2 \cos x = 3 \tan x$

2. Trouve la valeur de x dans chacune des équations étant donné $0 \leq x \leq 2\pi$:

   a) $2 \cos^2 x - 1 = -\sin x$

   b) $2 \sec^2 x + \tan x = 2$

   c) $\sin x + \cos x = 1$

3. Trouve la valeur de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Exprime les réponses en radians, soit des réponses correctes à trois décimales près ou des valeurs exactes.

   $$13 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta = 12 \sin^2 \theta - 6$$

4. Trouve la valeur de x si $x \in \Re$:

   $$\tan x \cos^2 x + \tan x \sin^2 x = \sqrt{3}$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques en utilisant des identités (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

$$(\cos x + 1)^2 = (\sqrt{3}\ \sin x)^2$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 3\sin^2 x$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 3\,(1 - \cos^2 x)$$

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$

$$2\,(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -1$$

les solutions possibles sont : $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$

Vérifie :

$\frac{\pi}{3} : \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$

Par conséquent, $\frac{\pi}{3}$ est une racine.

$\frac{5\pi}{3} : \cos\frac{5\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{3} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$

Par conséquent, la racine $\frac{5\pi}{3}$ n'a aucun lien avec la solution.

$\pi : \cos\pi + 1 = -1 + 1 = 0$

$\sqrt{3}\sin\pi = \sqrt{3}\,(0) = 0$

Par conséquent, π est une racine. La solution est $x = \pi, \frac{\pi}{3}$.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les propriétés des arcs et des angles complémentaires relatives à des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques**

Propriétés des cofonctions relatives aux fonctions circulaires

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$

$\csc\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sec x$ et $\sec\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \csc x$

Propriétés des cofonctions relatives aux fonctions trigonométriques

$\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$ et $\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$

$\cot (90^\circ - \theta) = \tan \theta$ et $\tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$

$\csc (90^\circ - \theta) = \sec \theta$ et $\sec (90^\circ - \theta) = \csc \theta$

Ainsi, le cosinus d'un angle est équivalent au sinus de son complément et ainsi de suite.

Demandez aux élèves de tracer le graphique des fonctions pour vérifier graphiquement les énoncés ci-dessus.

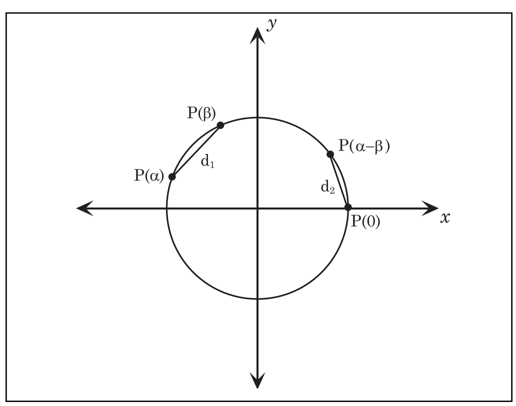
- **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente**

On dérive ces identités pour évaluer et simplifier des expressions.

1. **Identité de base de la différence**

$\boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$

Preuve :

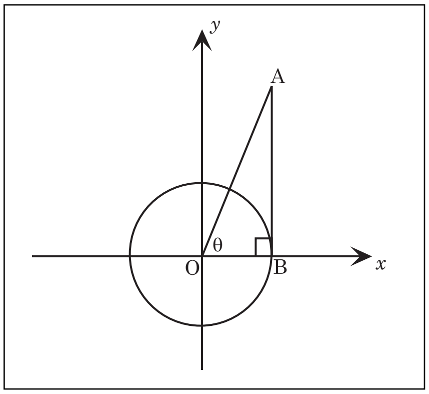


– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Soit le cercle unitaire avec une tangente AB au point B sur le cercle; démontre que la longueur de la tangente AB = tangente (θ).



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 3, Leçons 3, 4 et 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente (suite)**

Les coordonnées de P(α) sont (cos α, sin α); les coordonnées de P(β) sont (cos β, sin β).

Transfère l'arc qui unit les points P(β) et P(α) pour la mettre en position standard afin de créer le point P($\alpha - \beta$). Les coordonnées de P($\alpha - \beta$) sont : (cos ($\alpha - \beta$), sin ($\alpha - \beta$)), étant donné que la longueur de l'arc entre P(0) et P($\alpha - \beta$) est ($\alpha - \beta$).

Étant donné que les deux arcs ont la même longueur, les cordes ont aussi la même longueur.

$d_1 = d_2$

$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$

$\sqrt{\left[\cos(\alpha - \beta) - 1\right]^2 + \left[\sin(\alpha - \beta) - 0\right]^2}$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta + \sin^2\beta$
$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$
$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$, étant donné que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
$-2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = -2\cos(\alpha - \beta)$
$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$

Tu peux utiliser l'identité de base de la différence ainsi que les identités des cofonctions et de la symétrie pour démontrer les identités de la somme et de la différence suivantes :

2. $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

Preuve :
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$
Étant donné que le sinus est impair et que le cosinus est pair, alors
$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(-\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

3. $\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$

Preuve :

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

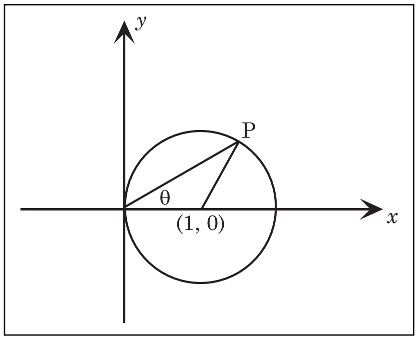
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Soit un cercle unitaire centré à (1,0); trouve les coordonnées de P en termes de θ.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente (suite)**

4. $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

Preuve :

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha-(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,[-\sin\beta]$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Tu peux maintenant trouver les coordonnées de tous les points du cercle unitaire qui sont la somme ou la différence de longueurs d'arc données, sans recourir à la calculatrice.

5. $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

Preuve :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

6. $\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}}$

Preuve :

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$= \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, étant donné que tan x est impair.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta - 1$; démontre que $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.
2. Si $\cos\theta = p$, trouve la valeur de $\cos 4\theta$ en termes de p.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de la somme et de la différence pour trouver des valeurs exactes**

Demandez aux élèves de faire des essais pour trouver des combinaisons de longueurs d'arc $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$, qui serviront à trouver d'autres longueurs d'arc exactes.

Exemple 1

a) Utilise des identités pour trouver les valeurs exactes de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et de $\cos \frac{7\pi}{12}$

Solution

Posons $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}\right)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

b) À quel quadrant $P\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ appartient-il?

Solution

Étant donné que $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$,

alors $P\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ appartient au quadrant II.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Simplifie : $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \tan(\alpha + \beta)$

Choix multiples

La valeur de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ peut être évaluée par :

a) $\left(\sin \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos \dfrac{\pi}{6}\right) + \left(\cos \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $\left(\cos \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos \dfrac{\pi}{6}\right) + \left(\sin \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $\left(\sin \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos \dfrac{\pi}{6}\right) - \left(\cos \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\pi}{6}\right)$

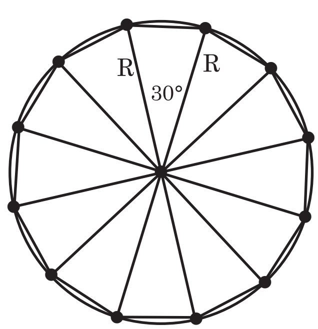
d) $\left(\cos \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos \dfrac{\pi}{6}\right) - \left(\sin \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\pi}{6}\right)$

Problèmes

1. Trouve la valeur exacte de $\sin \dfrac{29\pi}{12}$.

2. Trouve la valeur exacte de $\sin \dfrac{5\pi}{16} \cos \dfrac{\pi}{16} - \sin \dfrac{\pi}{16} \cos \dfrac{5\pi}{16}$

3. Démontre que l'aire d'un polygone à 12 côtés est équivalente à $3\ R^2$, où R est un rayon du cercle circonscrit.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de la somme et de la différence pour trouver des valeurs exactes (suite)**

Exemple 2

Trouve la valeur exacte de tan 75°.

Solution

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

- **exprimer chacune des expressions en termes de fonctions de θ seulement**

Exemple

Exprime $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ en termes de fonctions de θ seulement.

Solution

$$\sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta}$$

- **simplifier des expressions trigonométriques sans l'aide de la calculatrice**

Exemple

Évalue la fonction suivante sans utiliser une calculatrice :

$$\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{36} + \cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{36}$$

Solution

La fonction est équivalente à : $\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{36}\right) = \sin\frac{9}{36}\pi$ ou $\sin\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

1. Soit $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$; à quel quadrant $(\alpha + \beta)$ appartient-il?
2. Exprime les mesures suivantes en tant que fonction trigonométrique d'un seul angle : $\sin 61^\circ \cos 47^\circ - \sin 47^\circ \cos 61^\circ$.

Problèmes

1. Soit $\tan \alpha = \dfrac{-4}{3}$ et $\cot \beta = \dfrac{5}{12}$, où α n'appartient pas au quadrant IV et où $\pi \le \beta \le \dfrac{3\pi}{2}$; trouve $\cos(\alpha + \beta)$.
2. $P(\alpha - \beta)$ est un point du cercle unitaire, tel que
   $$\sin\alpha = \frac{8}{17}, \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right] \text{ et } \cos\beta = \frac{-5}{13},\ \pi \le \beta \le \frac{3\pi}{2}.$$
   Trouve $\sin(\alpha - \beta)$.
3. Trouve la valeur exacte de $\cos 105^\circ$.
4. Trouve la valeur numérique exacte de a :
   $$\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right) = a \sin\theta + b\cos\theta$$
5. Utilise des identités pour simplifier l'expression et l'exprimer sous la forme d'une seule fonction circulaire :
   a) $\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$
   b) $2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– *suite*

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **vérifier des identités en utilisant des identités de la somme et de la différence**

  Exemple

  Vérifie $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$.

  Solution

  Côté gauche $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$
  $= 2\cos\alpha\sin\beta$

  $\therefore$ côté gauche = côté droit

- **établir les identités du double d'un angle pour le sinus, le cosinus et la tangente**

  1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

  $$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

  2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

  $$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

  ou

  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2 - (1-\cos^2\alpha)$

  $$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

  ou

  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha =$

  $$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

  3. $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

  $$\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que l'énoncé suivant est vrai :

$$\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -3\sin\theta$$

2. Démontre l'identité :

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$$

3. Trouve la valeur de x : $0 < x < 2\pi$

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **simplifier des expressions en utilisant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Écris 2 (sin 5)(cos 5) en termes d'une seule fonction trigonométrique.

Solution

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$\therefore\ 2 \sin 5 \cos 5 = \sin 2\,(5)$

$= \sin 10$

- **évaluer des expressions en utilisant des identités de l'angle double**

Exemple 1

Si $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin \theta = \dfrac{3}{5}$, trouve les valeurs exactes de $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$.

Solution

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$
$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$
$$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \cos^2\theta$$
$$1 - \frac{9}{25} = \cos^2\theta$$
$$\frac{16}{25} = \cos^2\theta$$
$$\pm\frac{4}{5} = \cos\theta$$

parce que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{9}{25}\right) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

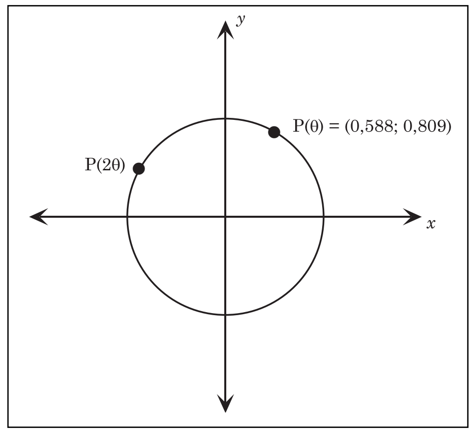
Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **évaluer des expressions en utilisant des identités de l'angle double (suite)**

Exemple 2

Sur le cercle unitaire, les coordonnées du point circulaire P(θ) sont (0,588; 0,809). Trouve les coordonnées de P(2θ).



Solution

Les coordonnées de P(2θ) sont (cos 2θ, sin 2θ).
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\,(0{,}588)^2 - 1 = -0{,}309$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\,(0{,}809)(0{,}588) = 0{,}951$
Par conséquent, les coordonnées de P(2θ) sont (–0,309; 0,951).

- **résoudre des équations comprenant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Résous; exprime les réponses en valeurs exactes.

$\sin 2x + \sin x = 0 \; ; -\pi \le x \le \pi$

Solution

$2\sin x\cos x + \sin x = 0$
$\sin x\,(2\cos x + 1) = 0$
$\sin x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
$x = -\pi,\ 0,\ \pi,\ -\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

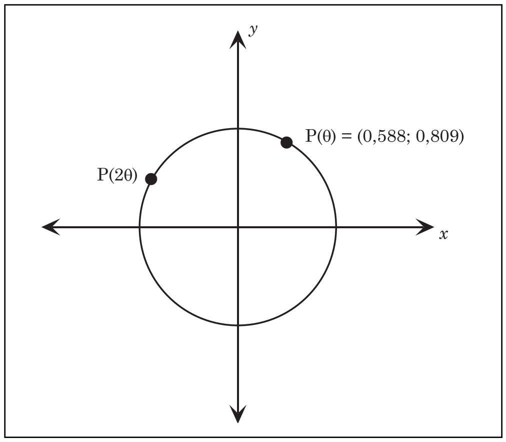
NOTES

Problèmes

1. Sur le cercle unitaire, les coordonnées du point circulaire P(θ) sont (0,588, 0,809). Trouve les coordonnées de :

   a) P(4θ)

   b) $P\left(\frac{\theta}{2}\right)$



2. Si $\cos\frac{\pi}{10} = 0{,}95$, trouve $\cos\frac{\pi}{5}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations où θ est exprimé sous la forme de l'angle double ou d'une longueur d'arc double**

Exemple

Résous l'équation $\sin 2\theta = \sin \theta$, où $0 \le \theta < 2\pi$.

Solution

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$
$$2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0$$
$$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$$
$$\sin \theta = 0 \text{ ou } \cos \theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

L'identité te permet de transformer l'équation en une équation où l'argument θ est le même.

- **vérifier d'autres identités en utilisant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Vérifie : $\dfrac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$.

Solution

$$\text{Côté gauche} = \frac{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}}{\sec^2 \theta}$$
$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta$$
$$= 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$
$$= \sin 2\theta$$

$\therefore$ Côté gauche = côté droit

– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouve la valeur de θ si $0 \leq \theta \leq 2\pi$: $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$
2. Trouve la valeur de x si $0^\circ \leq x < 360^\circ$:
   a) $\sin 2x = \sin x$
   b) $\sin 2x + \cos x = 0$
3. Vérifie :
   a) $\sin 2x \sin x \cos x - \sin^2 x = \cos 2x \sin^2 x$
   b) $\dfrac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$

Annexe C-1

Exercice d'algèbre

- **décomposer des trinômes**

  Les trinômes décomposés en facteurs devraient être exprimés sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$ ou a est un nombre premier inférieur à 10. La valeur de c devrait avoir un nombre minimal de facteurs.

  Exemple

  Décompose en facteurs

  a) $x^2 + 5x + 6$

  b) $x^2 + 9x - 10$

  c) $2x^2 - 5x + 3$

  d) $x^2 - 4x - 12$

  e) $2 \cos^2 x + \cos x - 1$

  f) $5 \tan^2 x - 12 \tan x + 7$

  Solutions

  a) $(x + 3)(x + 2)$

  b) $(x + 10)(x - 1)$

  c) $(2x - 3)(x - 1)$

  d) $(x - 6)(x + 2)$

  e) $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

  f) $(5 \tan x - 7)(\tan x - 1)$

- **trouver la valeur de *a*, *b* ou *c* quand deux des trois valeurs sont données**

  Exemple

  Soit $ax^2 + bx + c$, trouve les valeurs possibles de b si :

  a) $a = 1$, $c = 6$

  b) $a = 2$, $c = -5$

  Solutions

  a) $x^2 + bx + 6$ pourrait être décomposée en facteurs :

  $(x + 6)(x + 1) \Rightarrow b = 7$

  $(x - 6)(x - 1) \Rightarrow b = -7$

  $(x + 2)(x + 3) \Rightarrow b = 5$

  $(x - 2)(x - 3) \Rightarrow b = -5$

  $\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 5, ± 7

  b) $2x^2 + bx - 5$ pourrait être décomposée en facteurs :

  $(2x + 5)(x - 1) \Rightarrow b = 3$

  $(2x - 5)(x + 1) \Rightarrow b = -3$

  $(2x + 1)(x - 5) \Rightarrow b = -9$

  $(2x - 1)(x + 5) \Rightarrow b = 9$

  $\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 3, ± 9

- **décomposer en facteurs la différence de carrés**

  Exemple

  Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

  a) $x^2 - 4$
  b) $x^2y^2 - 1$
  c) $\cos^2 x - \sin^2 x$
  d) $x^2 - 49$
  e) $x^4 - 16$

  Solutions

  a) $(x - 2)(x + 2)$
  b) $(xy - 1)(xy + 1)$
  c) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
  d) $(x - 7)(x + 7)$
  e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

- **décomposer en facteurs communs**

  Exemple

  Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

  a) $9x^2 + 18$
  b) $2x^2 + 6x + 4$
  c) $\sin x - \sin x \cos x$
  d) $8x^2 - 32$

  Solutions

  a) $9(x^2 + 2)$
  b) $2(x + 2)(x + 1)$
  c) $\sin x(1 - \cos x)$
  d) $8(x - 2)(x + 2)$

- **résoudre des questions qui font appel à la décomposition en facteurs**

  Les élèves devraient être en mesure de résoudre des équations simples sans démontrer les étapes de la décomposition en facteurs.

  Exemple

  Trouver la valeur de x dans chacune des équations suivantes :

  a) $x^2 - 4 = 0$
  b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
  c) $4x^2 + x = 0$

  Solutions

  a) $x = 2, -2$
  b) $x = -2, x = -1$
  c) $x = 0, x = -\frac{1}{4}$

- **simplifier des fractions complexes**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

  En calcul, l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

  Exemple

  Simplifie :

  a) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

  b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

  c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$

  d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

  Solutions

  a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

  b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

  c) $\sqrt{3}$

  d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs**

  Exemple

  Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

  a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4};\ \dfrac{x}{x-2}$

  b) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3};\ \dfrac{x^2}{x^2-9}$

  c) $\dfrac{\sin x}{\cos x};\ \dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

  Solutions

  a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

  b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

  c) $\cos x \sin x$

Mise en correspondance – Problème et solution

Anenxe C-2

Formules relatives à la différence

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Probléme

Trouve la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution

Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

Étape 3

Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Mise en correspondance –Problème et solution

Annexe C-3

Formules relatives à la somme

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Problème

Trouve la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution

Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\frac{7\pi}{12}$.

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}$$

Étape 3

Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Mise en correspondance – Problème et solution

Annexe C-4

Identités trigonométriques

Identités inverses

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identités du quotient

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Identités de base

dérivées de $x^2 + y^2 = r^2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

Autres relations pythagoriciennes

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Étapes générales de la résolution d'une équation

#1 Effectuer les opérations nécessaires pour réduire un côté de l'équation à la même forme que l'autre côté

#2 On peut accomplir l'étape 1 comme suit :

a) en effectuant les additions ou les soustractions appropriées

b) en effectuant les multiplications ou les divisions appropriées

#3 Simplifier la fraction et décomposer en facteurs si nécessaire :

a) essayer de reformuler les expressions trigonométriques en un seul terme

Exemple

$$\sin\theta\sec\theta = \tan\theta$$

Côté gauche $(\sin\theta)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta$$

Côté gauche = Côté droit

Annexe C-5

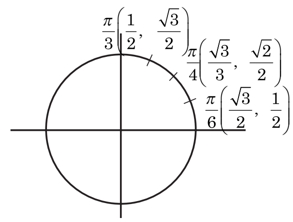
Méthode en trois points – Stratégies du vocabulaire

Terme/Concept :
Fonctions circulaires particulières

Formule/Équation :
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

Caractéristiques :
- coordonnées précises
- appartiennent au cercle unitaire
- multiples de tous les types dans chaque quadrant

Exemple :



Terme/Concept :
Équation trigonométrique du premier degré

Formule/Équation :
$2 \cos \theta + 4 = 5$

Caractéristiques :
-
-
-
-

Exemple :
$\cos \theta > 0$
Quadrants I, IV

$2 \cos \theta = 1$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Terme/Concept :
Équaiton trigonométrique du second degré

Formule/Équation :
$2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$

Caractéristiques :
- décomposition en facteurs nécessaire en générale
- possible d'utiliser une formule quadratique
-

Exemple :
Quadrants III, IV

$(2x+1)(x-1) = 0$

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin \theta = 1$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Terme/Concept :
Identité de base

Formule/Équation :
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Caractéristiques :
- issue d'une équation générale du cercle unitaire
- utilisée pour résoudre une fonction trigonométrique si on connaît l'autre

Exemple :
Soit $\cos \theta = \frac{-5}{13}$, et θ appartient au Q II, trouve $\sin \theta$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\therefore \theta > 0$

$1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2 = \sin^2 \theta$

étant donné que $\sin \theta > 0$,

$\sin \theta = \frac{12}{13}$

Méthodes en trois points – Stratégie du vocabulaire

Annexe C-6

Terme/Concept :
Différence des cosinus

Formule/Équation :
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Caractéristiques :

- utilisée pour des angles non précisés
- α et β sont deux angles qui correspondent à une différence par rapport à l'angle inconnu

Exemple :

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{12} \to \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Terme/Concept :
Somme des cosinus

Formule/Équation :
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Caractéristiques :

- utilisée pour des angles non précisés

Exemple :

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{29\pi}{12} \to \cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{4}-\frac{-\sqrt{6}}{4}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Terme/Concept :
Différence des sinus

Formule/Équation :
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

Caractéristiques :

- utilisée pour des angles précis

Exemple :

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{5\pi}{12} \to \sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{-\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Terme/Concept :
Somme des sinus

Formule/Équation :
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

Caractéristiques :

- utilisée pour des angles non précisés

Exemple :

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{17\pi}{12} \to \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{4}+\frac{-\sqrt{6}}{4}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Méthode en trois points – Stratégie du vocabulaire (*Three-Point Approach Vocabulary Strategy*) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*.

Inscription au journal

Annexe C-7

Inscription au journal nº 5

$(\cos\theta + \tan\theta\sin\theta)\cot\theta$	
1. $\left(\cos\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta\right)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	1. À la première étape, j'ai ramené les termes $\tan\theta$ et $\cot\theta$ à leur simple expression. $\left(\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ and } \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$
2. $\left(\cos\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	2. Ensuite, j'ai effectué la multiplication à l'intérieur des parenthèses. $\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{1} = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$
3. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\overset{\sin\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}\ \cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}\ \cancel{\sin\theta}}$	3. J'ai ensuite multiplié le terme à l'extérieur des parenthèses par les deux termes se trouvant à l'intérieur. J'ai ensuite effectué l'élimination nécessaire dans le terme $\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$.
4. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1}$	4. Après l'élimination, il restait le terme en (4). $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1}$
5. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$	5. J'ai ensuite trouvé un dénominateur commun pour effectuer l'addition.
6. $\dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta}$	6. Après avoir effectué cette addition, il restait le terme illustré en (6).
7. $= \dfrac{1}{\sin\theta}$	7. Ayant reconnu que $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ était une identité de Pythagore équivalant à 1, j'ai simplifié l'expression pour obtenir $\dfrac{1}{\sin\theta}$.
8. $= \csc\theta$	8. J'ai aussi reconnu que $\dfrac{1}{\sin\theta}$ était l'inverse de $\csc\theta$; c'est ma réponse finale.

Unité D
Exposants et logarithmes

EXPOSANTS ET LOGARITHMES

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- tracent le graphique de fonctions exponentielles et de leurs transformations et déterminent leurs propriétés;
- apprennent à passer de la forme exponentielle à la forme logarithmique, et vice-versa;
- tracent le graphique de fonctions logarithmiques décimales et de leurs transformations, et déterminent leurs propriétés;
- démontrent les théorèmes des logarithmes et les appliquent à des problèmes d'algèbre;
- utilisent des théorèmes de changement de base pour résoudre des problèmes;
- résolvent des équations exponentielles et logarithmiques et les vérifient;
- étudient la fonction exponentielle naturelle et ses propriétés;
- tracent le graphique de fonctions logarithmiques naturelles et de leurs transformations;
- résolvent des équations exponentielles et logarithmiques naturelles;
- modélisent et appliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques pour résoudre des problèmes.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'utiliser une calculatrice à affichage graphique ou un logiciel graphique pour étudier les graphiques exponentiels et logarithmiques et pour en déterminer les propriétés;
- d'établir des liens entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques;
- de travailler avec des logarithmes de bases différentes;
- de trouver des techniques qui leur permettront de résoudre des équations comprenant des exposants et des logarithmes;
- de modéliser et d'appliquer des logarithmes à des problèmes donnés dans les activités en classe;
- d'effectuer des activités appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental » les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe D-1) :

- les exposants rationnels et fractionnaires
- la notation fonctionnelle

Matériel

- calculatrice à affichage graphique ou logiciel graphique
- papier quadrillé

Durée

- 16 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultats d'apprentissage généraux

Représenter et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques à l'aide des outils technologiques appropriés

Résoudre des équations exponentielles, logarithmiques et trigonométriques et des identités

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

D-1 tracer le graphique de fonctions exponentielles et les analyser

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes D-2 à D-8, p. D-58 à D-64).

- **définir une fonction exponentielle**

Définition : La fonction $f(x) = ab^x$, où a et b sont des nombres réels tels que $a \neq 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$, est une ***fonction exponentielle***, où
a est une ***constante***
b est une ***base***
x est un ***exposant***

- **tracer le graphique de fonctions exponentielles**

Demandez aux élèves de tracer le graphique de $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 3^x$ ou $y = 3^{-x}$, par exemple, sur le même système d'axes. Le recours à des outils technologiques facilitera la visualisation des graphiques.

- **déterminer les propriétés des fonctions exponentielles de la forme $y = ab^x$, où $b > 0$ et $b \neq 1$**

Donnez aux élèves l'occasion d'étudier les propriétés suivantes :
1. le graphique passe par le même point (0, 1) ou l'ordonnée à l'origine est 1;
2. les graphiques n'ont pas d'abscisse à l'origine;
3. le domaine est l'ensemble des nombres réels;
4. l'image est $]0, \infty[$;
5. $y = 0$ est une asymptote horizontale;
6. la fonction est croissante quand $b > 1$ et elle est décroissante quand $0 < b < 1$;
7. la fonction est biunivoque;
8. la courbe est ouverte vers le haut pour $b > 1$ et $0 < b < 1$.

- **tracer le graphique des transformations de fonctions exponentielles**

Demandez aux élèves de transformer des fonctions exponentielles du type $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = -2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^x - 1$, $y = |2^x - 1|$.

Demandez aux élèves de trouver le domaine, l'image, l'ordonnée à l'origine ainsi que l'équation de l'asymptote de ces transformations.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscription au journal

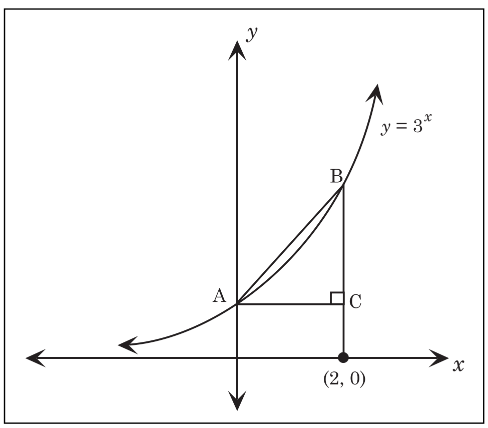
1. Écris une équation exponentielle dont la solution est 3.
2. Donne des exemples de croissance exponentielle.

Problèmes

1. a) Trace le graphique de $y = 2^{|x|}$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
   b) Indique le domaine et l'image.
   c) Donne tes commentaires sur la symétrie.

2. a) Quelle est la période de la fonction $y = 2^{|\cos x|}$?
   b) Trace le graphique de la fonction.

3. Un ΔABC est formé dans le graphique de $y = 3^x$. Trouve l'aire du ΔABC.



NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 4, leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-2 résoudre des équations exponentielles dont les bases sont des puissances l'une de l'autre

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations exponentielles dont les bases sont des puissances l'une de l'autre**

La propriété d'injectivité d'une fonction *f* biunivoque peut être énoncée comme suit :

Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

Autrement dit, étant donné que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ ont la même image, il peut y avoir une seule valeur correspondante du domaine; par conséquent, $x_1 = x_2$. Si on pose $f(x) = b^x$, cet énoncé signifie que :

Si $b^{x_1} = \mathrm{b}^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$.

Quand on trace les graphiques de $f(x) = 2^{3-2x}$ et de $g(x) = 0{,}25^{x-1{,}5}$, on s'aperçoit qu'ils coïncident. Les lois des exposants nous démontrent pourquoi.

$$2^{3-2x} = 0{,}25^{x-1{,}5}$$
$$2^{3-2x} = (2^{-2})^{x-1{,}5}$$
$$2^{3-2x} = 2^{-2x+3}$$

Ainsi, pour résoudre des équations exponentielles, tu peux convertir les bases en puissance de même base et appliquer les lois des exposants.

Exemple

Trouve la valeur de x :

a) $3^{(4x-1)} = 27^{2x}$

b) $(3^x)(27) = 81^{2x+1}$

c) $4^{x+1} = 2^x\sqrt{2}$

d) $(-8)^{\frac{5}{3}} = 2\,(4^{\frac{x}{2}})$

e) $\dfrac{1}{3^{x-1}} = 81$

Solution

a)
$$3^{4x-1} = (3^3)2^x$$
$$3^{4x-1} = 3^{6x}$$
$$4x - 1 = 6x$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

b)
$$3^x \cdot 3^3 = (3^4)^{(2x+1)}$$
$$3^{x+3} = 3^{8x+4}$$
$$x + 3 = 8x + 4$$
$$x = \frac{-1}{7}$$

c)
$$(2^2)^{(x+1)} = 2^x\, 2^{\frac{1}{2}}$$
$$2^{2x+2} = 2^{x+\frac{1}{2}}$$
$$4x + 4 = 2x + 1$$
$$x = \frac{-3}{2}$$

d)
$$(-2)^5 = 2 \cdot 2^x$$
$$(-2)^5 = 2^{1+x}$$

∴ pas de solution
(côté gauche négatif,
côté droit positif)

e)
$$3^{-(x-1)} = 3^4$$
$$-x + 1 = 4$$
$$x = -3$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Trouve la valeur de x : $8^x = 32$
2. Trouve les deux fonctions équivalentes parmi les fonctions suivantes :
   a) $y = 5^{-x}$
   b) $y = \dfrac{5}{x}$
   c) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$
3. Trouve la valeur de x : $3 \cdot 3^{x-1} = \dfrac{1}{27}$
4. Trouve la(les) valeur(s) de r dans $5r^4 = 80$.
5. Combien y a-t-il de solutions à l'équation $2^{\sin x} = 8$, où $0 < x < \pi$?

Problèmes

1. Trouve la valeur de x :
   a) $\dfrac{1}{4^{x-2}} = 64$
   b) $2\,(5^{2x-9}) = 250$
2. Trouve la valeur de x : $2^{2x} = 3(2^x) - 2$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 4, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-3 définir un logarithme et transformer des expressions exponentielles en expressions logarithmiques équivalentes, et vice-versa

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction logarithmique**

La ***fonction logarithmique*** $y = \log_b x$ est la réciproque de la fonction exponentielle $y = b^x$, où $b \neq 1$ et $b > 0$, $x > 0$.

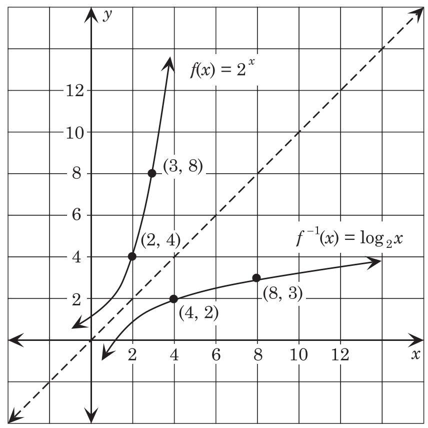
$y = \log_b x$ si et seulement si $x = b^y$

y est le ***logarithme***

b est la ***base***

x est l'***argument***

Compare les graphiques de $y = 2^x$ et de $y = \log_2 x$.



Exemple 1

a) Écris $y = 4^x$ sous forme logarithmique.

b) Écris $\log_2 8 = 3$ sous forme exponentielle.

c) Trouve $\log_2 16$, $\log_9 3$, $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$

d) Pourquoi $\log_2(-4)$ n'existe-t-il pas?

Solutions

a) $\log_4 y = x$

b) $2^3 = 8$

c) $4, \frac{1}{2}, -2$

d) -4 n'appartient pas au domaine, $2^x \neq -4$

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Exprime sous forme exponentielle : $\log_6\left(\frac{1}{6}\right) = -1$

Inscription au journal

Explique pourquoi $\log_a 0$ n'est pas défini. Utilise des phrases complètes.

Problèmes

1. Évalue $\log_{12} (\log_9 (\log_5 (\log_2 32)))$.
2. Évalue log (cos $k\pi$), où k est un entier impair.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 4, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-3 définir un logarithme et transformer des expressions exponentielles en expressions logarithmiques équivalentes, et vice-versa – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

• **définir une fonction logarithmique (suite)**

Exemple 2

Évalue $7^{\log_7 3}$

Solution

3

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

• **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques**

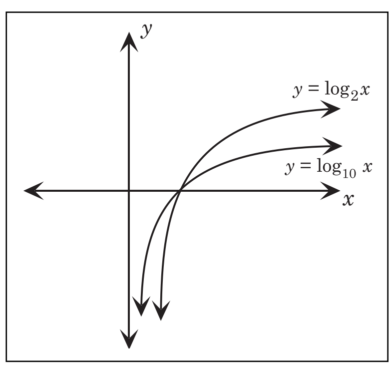
Les élèves peuvent commencer par tracer le graphique de la fonction exponentielle, puis sa réflexion par rapport à la droite $y = x$ pour obtenir le graphique de la fonction logarithmique requis.

Demandez aux élèves de tracer le graphique de $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ et $y = \log_{10} x$, par exemple, dans le même système d'axes.

Exemple 1

Trace le graphique de $y = \log_{10} x$ et de $y = \log_2 x$ dans le même système d'axes. Quelle sera la position la plus probable du graphique de $y = \log_5 x$ sur le même système d'axes?

Solution



$y = \log_5 x$ se trouvera probablement entre les deux graphiques.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Trouve la valeur de $\log_{10} 0{,}0001$.
2. Trouve la valeur de x : $\log_{10} x = 2$.
3. Exprime $\log_a b = x$ sous forme exponentielle.
4. Exprime $5^x = 74$ sous forme logarithmique.

Problèmes

1. Soit $\log_{2B} \mathrm{T} = m$; trouve la valeur de B et laisse ta réponse en forme exponentielle.
2. Trouve une expression correspondant à $\log_{10} x$ si $= \dfrac{\sqrt[4]{ab}}{c}$.
3. Trouve une expression équivalente à $\dfrac{1}{2}\log_a 9 - \log_a 3$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 4, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique de fonctions logarithmiques (suite)**

Exemple 2

Analyse le graphique de $y = \log_{10}(2x + 3)$. Trouve le domaine, l'image, les asymptotes et les coordonnées à l'origine.

Solution

Domaine : $x > \frac{-3}{2}$ ou $\left]\frac{-3}{2}, \infty\right[$

Image : $\{y \in \Re\}$ ou $]-\infty, \infty[$

Asymptote : $x = 0$

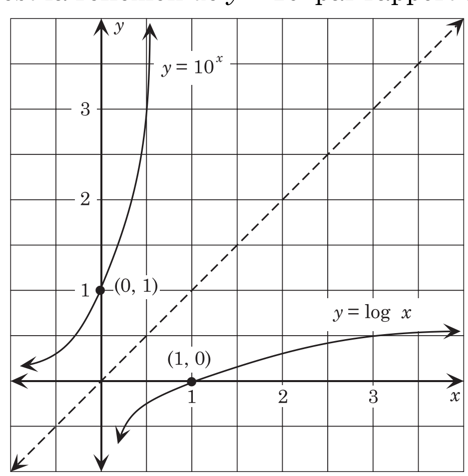
Coordonnées à l'origine : l'abscisse à l'origine = 1

l'ordonnée à l'origine : 0,47712 ou $\log_{10}3$

- **présenter le concept du logarithme décimal (aussi appelé logarithme de Briggs ou commun) et faire le lien avec la définition de base du logarithme**

Une fonction logarithmique de base 10, $y = \log_{10} x$, est appelée une f***onction logarithmique décimale***. Si le logarithme est écrit sans base, il faut tenir pour acquis que la base est 10. Cette fonction est désignée par la touche $\boxed{\text{LOG}}$ sur la calculatrice scientifique.

L'équation $y = \log x$ est équivalente à $x = 10^y$. Son graphique est la réflexion de $y = 10^x$ par rapport à la droite $y = x$.



Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique des fonctions logarithmiques suivantes :
   a) $y = |\log x|$
   b) $f(x) = \log_4 |x|$
   c) $y = \log(x + 1) - 2$

2. Sur le même système d'axes, trace le graphique de $y = 2^x$ et de $y = \log_2 x$. Donne tes commentaires sur le lien entre les deux graphiques.

3. Soit $f(x) = \log_3(x - 2)$; trouve une expression de $f^{-1}(x)$.

4. Trace le graphique de $y = \dfrac{1}{\log x}$.

5. Trace le graphique de $y = -\log_2(x - 3)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques *– suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **présenter le concept du logarithme décimal (aussi appelé logarithme de Briggs ou commun) et établir le lien avec la définition de base du logarithme (suite)**

Exemple

Trouve log 2.

Solution

log 2 = 0,30103 (ce qui signifie $10^{0,30103} \approx 2$)

- **déterminer les propriétés des fonctions logarithmiques de la forme $y = \log_b x$ où $b > 0$ et $b \neq 1$**

Une fois qu'ils auront tracé le graphique des fonctions logarithmiques, donnez aux élèves la possibilité d'étudier les propriétés suivantes :

Propriétés de $y = \log_b x$, où $b > 0$ et $b \neq 1$

1. Le domaine est constitué de tous les nombres x positifs.
2. L'image est constituée de tous les nombres y réels.
3. La fonction est croissante (la courbe monte) pour $b > 1$, et elle est décroissante (la courbe descend) pour $0 < b < 1$.
4. La courbe est ouverte vers le bas pour $b > 1$, et elle est ouverte vers le haut pour $0 < b < 1$.
5. Il s'agit d'une fonction biunivoque : si $\log_b (x_1) = \log_b (x_2)$, alors $x_1 = x_2$.
6. Le point (1, 0) appartient au graphique. Il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.
7. L'axe des y est une asymptote verticale à la courbe dans la direction descendante pour $b > 1$, et dans la direction montante pour $0 < b < 1$.
8. $\log_b (b^x) = x$ et $b^{\log_b x} = x$.

- **tracer le graphique des transformations de fonctions logarithmiques**

Demandez aux élèves de transformer des fonctions logarithmiques telles que $y = \log_3(x - 1)$, $y = \log x + 2$, $y = \log_2 x - 2$ et $y = -\log x$.

Demandez aux élèves de trouver le domaine, l'image et l'équation des asymptotes.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Trouve la valeur de $\log_9 9^{4,2}$.
2. Pour toutes les valeurs de a, tel que $a > 0$, quelle est la valeur de $\log_a a$?
3. Pour toutes les valeurs de a, tel que $a > 0$, quelle est la valeur de $\log_a 1$?
4. Trouve la valeur de $x = 4^{\log_5 25}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **démontrer les théorèmes des logarithmes**

La loi du produit des exposants, qui énonce que

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

est liée à la loi du produit des logarithmes, qui énonce que

$$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}\text{, où } M > 0 \text{ et } N > 0$$

Preuve :

Soit $x = \log_a M$ alors $a^x = M$.

Soit $y = \log_a N$ alors $a^y = N$.

Maintenant $MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes :

$$\log_a MN = x + y$$

Mais $x = \log_a M$ et $y = \log_a N$, par conséquent nous obtenons

$$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$$

La loi du quotient des exposants, qui énonce que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

est liée à la loi du quotient des logarithmes, qui énonce que

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \quad \text{où } M > 0 \text{ et } N > 0$$

Preuve :

Soit $x = \log_a M$ alors $a^x = M$.

Soit $y = \log_a N$ alors $a^y = N$.

Maintenant $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y}$

$$\frac{M}{N} = a^{x-y}$$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y$$

Mais $x = \log_a M$ et $y = \log_a N$, alors

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,} \quad \text{où } M > 0 \text{ et } N > 0$$

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Exprime $\log y - 5 \log z$ sous la forme d'un seul logarithme.

Choix multiples

Quelle expression parmi les suivantes équivaut à $\log_2 \dfrac{\sqrt{x}(x-5)}{x^3}$?

a) $\dfrac{1}{2}\log_2 x \cdot \log_2 (x-5) \div \dfrac{1}{3}\log_2 x$

b) $\dfrac{1}{2}\log_2 x + \log_2 (x-5) - 3 \log_2 x$

c) $2 \log_2 x + \log_2 x - \log_2 5 - 3 \log_2 x$

d) $2 \log_2 x + \log_2 (x-5) - 3 \log_2 x$

Inscription au journal

Explique comment la loi des exposants

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

est liée à la loi des logarithmes

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$$

Problème

Si $\log_a 2 = 0{,}456$ et $\log_a 3 = 0{,}723$, trouve $\log_a 6$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **démontrer les théorèmes des logarithmes (suite)**

La loi de la puissance des exposants, qui énonce que :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

est liée à la loi de la puissance des logarithmes, qui énonce que :

$$\boxed{\log_a M^x = x \log_a M}$$

Preuve :

Soit $y = \log_a \mathrm{M}$ alors, $a^y = M$.

Élève chaque membre de la dernière équation à la puissance x, pour obtenir

$(a^y)^x = M^x$ ou $a^{yx} = M^x$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes, $\log_a M^x = yx$, et puisque $y = \log_a M$, nous obtenons :

$$\boxed{\log_a M^x = x \log_a M}$$

Assurez-vous que les élèves comprennent bien que les logarithmes sont des exposants et que, par conséquent, les lois des exposants et les règles des logarithmes sont équivalentes.

- **utiliser les théorèmes des logarithmes pour simplifier des expressions logarithmiques**

Exemple 1

Exprime $2 \log x - \log y - \log z$ sous la forme d'un seul logarithme.

Solution

$\log x^2 - \log y - \log z$

$= \log x^2 - (\log y + \log z)$

$= \log \dfrac{x^2}{yz}$

Exemple 2

Exprime $\log_a \dfrac{A\sqrt{C}}{B^2}$ sous sa forme développée.

Solution

$$\log_a \frac{A\sqrt{C}}{B^2} = \log_a A + \frac{1}{2}\log_a C - 2\log_a B$$

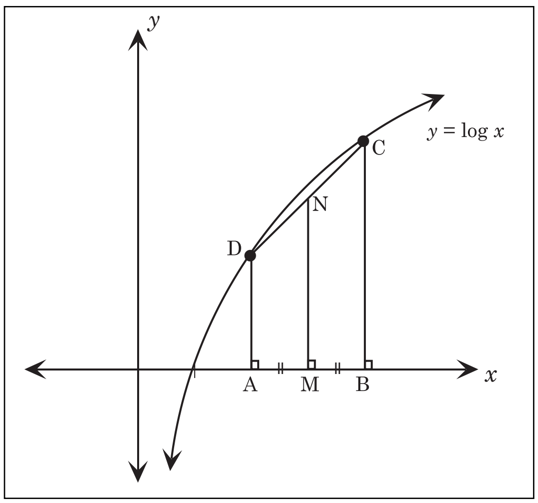
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans la figure ci-dessous, les points D et C appartiennent au graphique de $y = \log_x$. Les points A(a, 0) et B(b, 0) appartiennent à l'axe des x. ABCD est un trapèze. M est le point milieu de la droite AB et N est le point milieu de la droite DC. Démontre que la longueur de MN est égale au $\log\sqrt{ab}$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– *suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser les théorèmes du logarithme pour simplifier des expressions logarithmiques (suite)**

Exemple 3

Soit : $\log_a 2 = 0{,}3562$
$\log_a 3 = 0{,}5646$
$\log_a 5 = 0{,}8271$

Trouve la valeur de $\log_a \sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

Solution

$$\log_a \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2}[\log_a 10 - \log_a 3]$$

$$= \frac{1}{2}[\log_a 5 + \log_a 2 - \log_a 3]$$

$$\approx \frac{1}{2}[0{,}8271 + 0{,}3562 - 0{,}5646]$$

$$\approx 0{,}31$$

- **dériver la formule du changement de base**

Si la base n'est pas 10, on ne peut utiliser la touche $\boxed{\text{LOG}}$ sur la calculatrice. Il faut donc recourir à la formule de changement de base.

Le théorème du changement de base

Pour les nombres positifs a, b et n, et pour $a \neq 1$ et $b \neq 1$,

$$\boxed{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}$$

Preuve :

Posons $A = \log_b n$.

Selon la définition des logarithmes, $b^A = n$.

Puisque $C = D$, $\log_a C = \log_a D$, si on prend les logarithmes de chaque côté de l'équation $b^A = n$, nous obtenons $\log_a b^A = \log_a n$.

Selon la loi de la puissance, $\log_a b^A = A \times \log_a b$, et puisque $A = \log_b n$, nous obtenons $\log_b n \times \log_a b = \log_a n$.

Par conséquent, la division par $\log_a b$ nous donne le résultat :

$$\boxed{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Vérifie des propriétés des logarithmes qui sont moins connues :

   a) $\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x$ (logarithme avec une puissance comme base)

   b) $\log_{(b^n)} x^n = \log_b x$ (la base et l'argument sont comme des puissances)

   c) $\log_{\left(\frac{1}{b}\right)} \left(\frac{1}{x}\right) = \log_b x$ (la base et l'argument des inverses)

2. Trouve (x, y) dans le système suivant :

   $\log_9 x + \log_y 8 = 2$

   $\log_x 9 + \log_8 y = \frac{8}{3}$

3. Trouve la valeur de x : $\log_8 x + \log_{64}(x) = 1$

4. Si $\log_a M = X$ et $\log_b M = y$, démontre que $\log_{ab} M = \frac{xy}{x + y}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– suite

✔ **Communications** — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — Raisonnement — ✔ **Technologie** — Visualisation

• **dériver la formule du changement de base (suite)**

Exemple

Soit $y = \log_2 3$; trouve sa valeur.

Solution

Méthode 1 : Changement de base

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$
$$\approx 1{,}58496$$

Méthode 2 : Conversion à la forme exponentielle

Pour résoudre ces problèmes, on peut convertir l'expression à la forme exponentielle en utilisant la définition du logarithme, puis trouver une base appropriée pour les logarithmes et résoudre le problème.

$$y = \log_2 3$$
$$2^y = 3$$
$$\log 2^y = \log 3$$
$$y \log 2 = \log 3$$
$$y = \frac{\log 3}{\log 2}$$
$$y \approx 1{,}58496$$

Remarque : Cette méthode vérifie la formule du changement de base dans chaque cas.

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — Technologie — Visualisation

• **résoudre des équations exponentielles**

Pour résoudre des équations exponentielles dont les bases ne sont pas communes, il faut trouver le logarithme de chaque membre à l'aide des théorèmes des logarithmes. Mettez les élèves en garde de ne pas prendre les logarithmes d'une somme ou d'une différence (p. ex., $\log (x + 3) \neq \log x + \log 3$).

Exemple 1

Trouve la valeur de x : $2(3^x) = 5$.

Solution

$$2(3)^x = 5$$
$$\log 2 + x \log 3 = \log 5$$
$$x \log 3 = \log 5 - \log 2$$
$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 3}$$
$$x \approx 0{,}834$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Pour des valeurs données de x, il est vrai que $(\log_b x)^3 = 3 \log_b x$. Ces valeurs sont :

a) 1 et b

b) 1, b, et b^3

c) 1, $b^{\sqrt{3}}$ et $b^{-\sqrt{3}}$

d) 1, b, b^3 et $b^{-\sqrt{3}}$

Problèmes

1. Trouve la valeur de x en utilisant deux méthodes différentes et arrondis ta réponse finale à 4 décimales près : $5(3^x) = 4^{x-1}$.
2. Résous l'équation quadratique suivante sans l'aide d'une calculatrice : $2^{2x} = 3(2^x) - 2$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations exponentielles (suite)**

Exemple 2

Résous : $19^{x-5} = 3^{x+2}$

Solution

$$(x-5)\log 19 = (x+2)\log 3$$
$$x(\log 19 - \log 3) = 2\log 3 + 5\log 19$$
$$x = \frac{2\log 3 + 5\log 19}{\log 19 - \log 3} \approx 9{,}17$$

- **résoudre des équations logarithmiques**

Pour résoudre des équations logarithmiques, utilise les théorèmes des logarithmes pour mettre un logarithme simple en équation avec un nombre, puis convertis à la forme exponentielle.

Remarque : Rappelez aux élèves de vérifier les racines étrangères étant donné que les logarithmes ont des domaines restreints.

Exemple 1

Résous : $\log_2(x-2) + \log_2(x) = \log_2 3$

Solution

$$\log_2 x(x-2) = \log_2 3$$
$$x(x-2) = 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = 3,\ x = -1$$

Cependant, les logarithmes n'étant pas définis pour les nombres négatifs,

$\therefore\ x = 3$

et ($x = -1$ est une racine étrangère et doit être exclue.)

Exemple 2

Résous l'équation logarithmique suivante :

$\log_5(3x+1) + \log_5(x-3) = 3$

Solution

Si on applique le théorème du produit des logarithmes :

$\log_5[(3x+1)(x-3)] = 3$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ pour toutes les bases a.

2. Trouve la valeur de x :
   a) $\log_{10}(x^3 - 1) - \log_{10}(x^2 + x + 1) = 1$
   b) $\log_2(x + 6) + \log_2(x - 1) = 3$
   c) $\log_6(x + 5) + \log_6(2 - x) = 1$
   d) $\log_2(\log_{81} x) = -2$
   e) $\log_3(\log_2 x) = 1$
   f) $(\log_4 x)^2 - \log_4 (x) = 0$

3. L'équation $\log a + \log b - 2 \log c = 0$ est écrite au tableau. L'enseignant te demande de trouver les valeurs entières de a, b et c qui vérifient cette équation.

   Daisy répond : « $a = 3$, $b = 12$ et $c = 6$ est une solution. » Sans utiliser une calculatrice, démontre que sa réponse est correcte.

   Marie répond : « J'ai découvert un autre ensemble de valeurs pour a, b et c quand $a = 5$. » Trouve les valeurs de b et de c qu'elle peut avoir utilisées. Trouve un autre ensemble de valeurs de b et de c qu'elle aurait pu utiliser.

   L'enseignant te demande de trouver un autre ensemble de valeurs de a, b et c qui vérifient l'équation. Trouve cet ensemble de valeurs.

   George répond : « Je crois que l'équation est vérifiée quand $a = b = c$. » Harry réplique : « On trouve des solutions quand $a = b = c$, mais l'équation n'est pas vérifiée. » Trouve cette valeur.

   Décris l'ensemble de toutes les solutions pour a, b et c.

4. Trouve les zéros de la fonction $g(x) = \log_2 x + \log_2(x - 1) - 1$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — ✔ **Technologie** — Visualisation

• **résoudre des équations logarithmiques (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

Convertis à la forme exponentielle :

$$3x^2 - 8x - 3 = 5^3$$
$$3x^2 - 8x - 128 = 0$$
$$(3x + 16)(x - 8) = 0$$
$$x = -\frac{16}{3} \text{ ou } x = 8$$

$-\dfrac{16}{3}$ doit être rejeté parce que $\log_5\left(-\dfrac{16}{3} - 3\right)$ n'a aucun sens.

$\therefore$ la solution est $x = 8$.

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse de problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — ✔ **Technologie** — Visualisation

• **proposer une activité qui permet de trouver une valeur approximative de *e***

Remarque : Le concept de la base *e* des logarithmes naturels (népériens) peut être intégré aux résultats d'apprentissage liés aux logarithmes décimaux.

Dans les fonctions logarithmiques exponentielles, le plus important nombre dans la base est celui qui est exprimé par la lettre *e*. Tout comme π, il s'agit d'un nombre irrationnel dont la valeur est 2,718281828457045...

Demandez aux élèves d'utiliser un outil graphique pour trouver cette approximation.

Posons $f(n) = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $g(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

À l'aide de ta calculatrice, évalue les énoncés suivants :

a) $f(1)$ et $g(1)$

b) $f(10)$ et $g(10)$

c) $f(100)$ et $g(100)$

d) $f(1000)$ et $g(1000)$

e) $f(10000)$ et $g(10000)$

Les élèves devraient découvrir que, si les valeurs de *f* se rapprochent de 1 à mesure que la valeur de *n* augmente, ce n'est pas le cas des valeurs de *g*. En effet, à mesure que la valeur de *n* augmente, les valeurs de *g* se rapprochent d'un nombre représenté par *e*, qui équivaut approximativement à 2,718.

Autrement dit, les élèves découvrent la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. a) Quelle est la valeur de $e^{2ln\ 4}$?
   b) Trace les graphiques de $y = e^x$ et de $y = e^{-x}$.
   c) Trace les graphiques $y = e^{\ln x}$ et de $y = \ln e^x$. Pourquoi les graphiques sont-ils différents? Pourquoi aurais-tu pu t'attendre à ce qu'ils soient semblables?

2. Trouve la valeur de x :
   a) $\ln e^x = 3$
   b) $2^{\ln x} = 4$
   c) $\ln e^{2x+3} - \ln e^{x-5} = \log_2 32$

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 5 leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

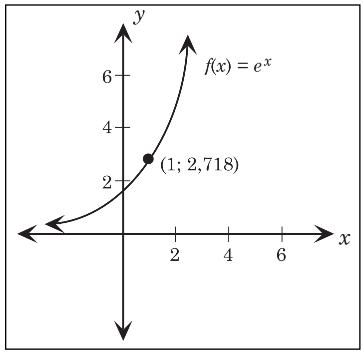
Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir la fonction exponentielle naturelle**

  La fonction exponentielle, $f(x) = e^x$, dont la base est le nombre naturel e, est illustrée ci-dessous.

  La fonction $f(x) = e^x$ est appelée la fonction ***exponentielle naturelle***.

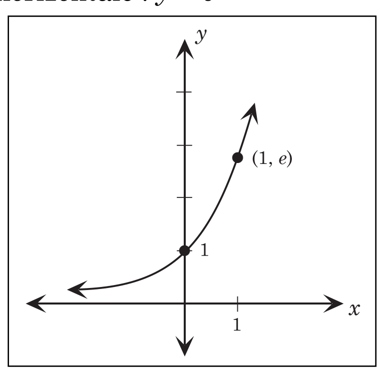


- **étudier les propriétés de la fonction exponentielle naturelle $y = e^x$**

  Présentez les propriétés suivantes aux élèves :

Propriétés de $y = e^x$

1. Domaine : $\Re$
2. Image : $y > 0$
3. Fonction croissante
4. La courbe est ouverte vers le haut
5. La fonction est biunivoque : si $e^{x} = e^{x2}$, alors $x_1 = x_2$
6. $0 < e^x < 1$ pour $x < 0$; $e^x > 1$ pour $x > 0$
7. $e^{\ln x} = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote horizontale : $y = 0$



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Dans $f(x) = e^{x-h}$, l'ordonnée à l'origine est e; trouve la valeur de h.
2. Trouve $f^{-1}(x)$ si $f(x) = 10e^x$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer les graphiques des transformations des fonctions exponentielles naturelles**

  Les transformations suivent le même modèle pour $y = e^x$ et pour $y = a^x$.

  Exemple

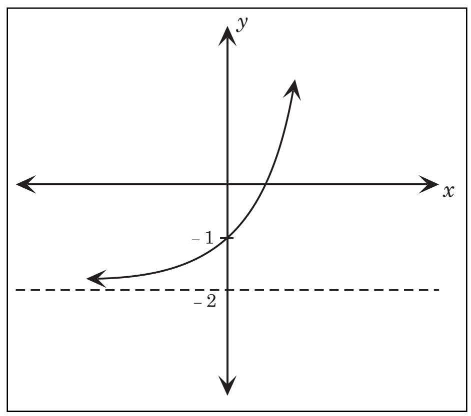
  Trace le graphique de chacune des fonctions exponentielles suivantes et indique le domaine, l'image, l'ordonnée à l'origine et l'équation de l'asymptote.

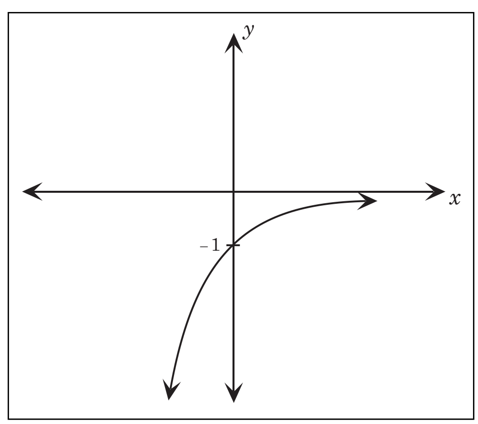
  a) $y = e^x - 2$

  b) $y = -e^{-x}$

  c) $y = |e^x - 1|$

  Solution

  a)


  b)


– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

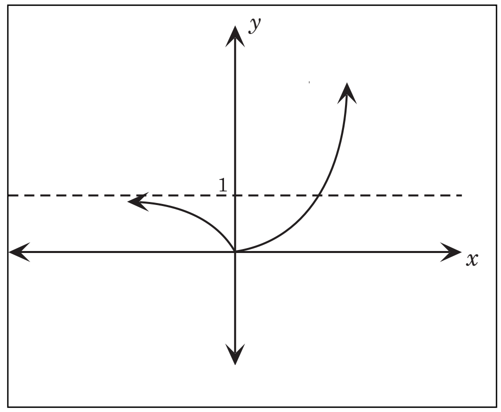
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique des transformations des fonctions exponentielles naturelles (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite

c)

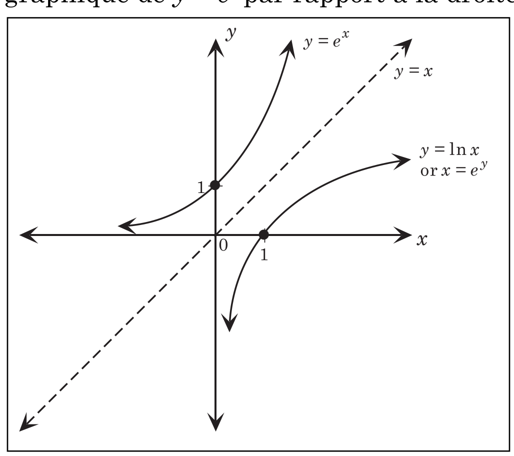


Question	Domaine	Image	Ordonnée à l'origine	Asymptote
(a)	$\Re$	$]-2, \infty[$	-1	$y = -2$
(b)	$\Re$	$]-\infty, 0[$	-1	$y = 0$
(c)	$\Re$	$[0, \infty[$	0	$y = 1$

- **présenter la fonction logarithmique naturelle**

La réciproque de la fonction exponentielle $y = e^x$ est $y = \log_e x$. La fonction logarithmique naturelle est en règle générale exprimée sous la forme $y = \ln x$, où « ln » est l'abréviation de logarithme naturel.

Ainsi, $x = e^y$ et $y = \ln x$ sont équivalents et, comme ci-dessus, on obtient le graphique de $y = \ln x$ en faisant une réflexion du graphique de $y = e^x$ par rapport à la droite $y = x$.



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

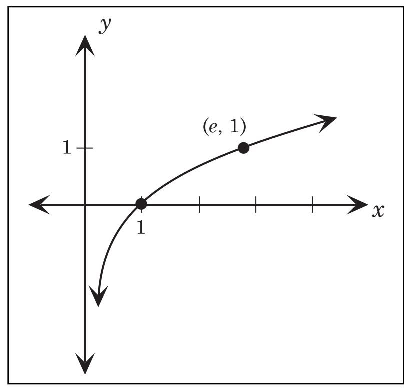
D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

- **étudier les propriétés de $y = \ln x$**

  Présentez les propriétés suivantes de $y = \ln x$.

Propriétés de $y = \ln x$

1. Domaine : $x > 0$
2. Image : $\Re$
3. Fonction croissante
4. Courbe ouverte vers le bas
5. Fonction biunivoque : si $\ln x_1 = \ln x_2$, alors $x_1 = x_2$
6. Si $x < 0$ pour $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ pour $x > 1$
7. $\ln e^x = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote verticale : $x = 0$



- **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques naturelles transformées**

  Exemple

  Trace le graphique de la fonction logarithmique suivante et indique le domaine, l'image et l'équation de l'asymptote :

  a) $f(x) = \ln(-x)$

  b) $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

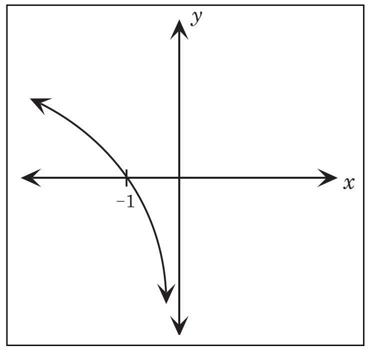
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques naturelles transformées (suite)**

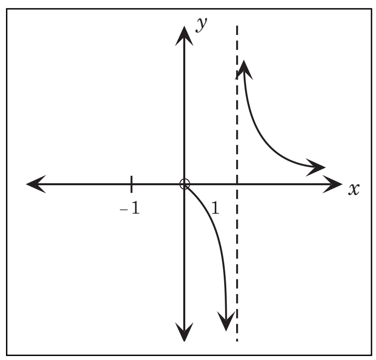
Exemple – suite

Solution – suite

a)



b)



Question	Domaine	Image	Asymptote
(a)	$]-\infty,\ 0[$	$\Re$	$x = 0$
(b)	$]0,\ 1[\ \cup\ ]1,\ \infty[$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$x = 1$

- **appliquer les théorèmes des logarithmes aux logarithmes naturels**

Présentez des questions sur les logarithmes naturels qui ressemblent aux questions sur les logarithmes décimaux.

Exemple 1

Développe $\ln \dfrac{x^2y^3}{\sqrt{z}}$.

Solution

$$\ln \frac{x^2y^3}{\sqrt{z}} = 2\ln x + 3\ln y - \frac{1}{2}\ln z$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications / Liens / Estimation et Calcul Mental / Résolution / ✔ **Raisonnement** / ✔ **Technologie** / Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **appliquer les théorèmes des logarithmes aux logarithmes naturels (suite)**

Exemple 2

Écris sous forme d'un seul logarithme :

$$\ln(x-1) + 3\ln(x+3) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$$

Solution

$$\ln\frac{(x-1)(x+3)^3}{\sqrt{x^2+2}}$$

Exemple 3

Utilise ta calculatrice pour trouver les logarithmes :

a) $\log_7 e$

b) $\ln 100$

c) $\ln e^3$

Solution

a) 0,51390

b) 4,60517

c) 3

- **résoudre des équations exponentielles et logarithmiques naturelles**

Exemple 1

Trouve la valeur de x : $e^x = 2x + 1$

Solution

$$x \ln e = (x+1)\ln 2$$
$$x(1) = x\ln 2 + 1\ln 2$$
$$x - x\ln 2 = \ln 2$$
$$x(1-\ln 2) = \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{1-\ln 2}$$

Exemple 2

Trouve la valeur de t : $e^{\ln(2t-1)} = 5$

Solution

$e^{\ln(2t-1)} = 5$

$2t - 1 = 5$ (puisque $e^{\ln x} = x$, où $x = 2t - 1$)

$t = 3$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $a > 1$, la plus petite valeur dans l'ensemble $\{\ln a, \log_2 a, e^a, 2^a\}$ est :

a) $\ln a$

b) $\log_2 a$

c) e^a

d) 2^a

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **résoudre des équations exponentielles et logarithmiques naturelles (suite)**

Exemple 3

Trouve la valeur de t : $e^{(2t-1)} = 5$

Solution

$e^{(2t-1)} = 5$

$2t - 1 = \ln 5$ (prends le logarithme naturel de chaque membre)

$$t = \frac{1}{2}(1 + \ln 5)$$

Vérifie

$$e^{2\left[\frac{1}{2}(1+\ln 5)\right]-1} = e^{1+\ln 5-1} = e^{\ln 5} = 5$$

Exemple 4

Trouve la valeur de x : $\ln(x + 1) = 1 + \ln x$

Solution

$$\ln(x + 1) - \ln x = 1$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$$

$$e = \frac{x+1}{x}$$

$$ex = x + 1$$

$$ex - x = 1$$

$$x(e - 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{e-1}$$

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

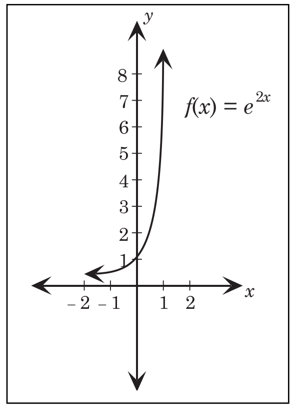
D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — ✔ **Technologie** — Visualisation

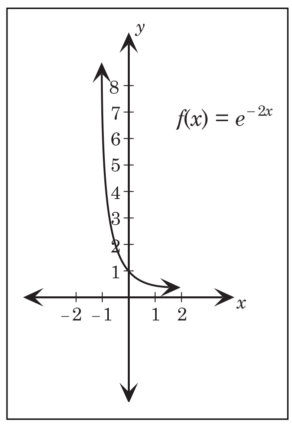
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner le modèle de la croissance et de la décroissance exponentielle**

  Le graphique de $f(x) = e^{ax}$, où $a > 0$, représente une ***croissance exponentielle***, ex. $y = e^{2x}$, et il a l'apparence suivante :



  Le graphique de $f(x) = e^{ax}$, où $a < 0$, représente une ***décroissance exponentielle***, ex. $y = e^{-2x}$, et il a l'apparence suivante :



Exemple 1

Une substance radioactive se désintègre selon la formule suivante :

$$y = Ae^{-0,2x}$$

où A correspond à la quantité de matière à l'origine et y à la quantité de matière résiduelle après x années.

a) Si A = 80 grammes, quelle est la quantité de matière radioactive résiduelle après 3 années?
b) Quelle est la demi-vie de cette substance?

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Joe a investi 50 000 $ à un taux d'intérêt annuel de 7 %, composé mensuellement. Laura a pour sa part investi 40 000 $ à un taux de 9,5 % par année, composé annuellement. Après combien d'années les deux placements auront-ils une valeur égale?

   Combien faudra-t-il de temps pour que l'investissement de Joe double?

2. Quelque 24 heures après que Sam a inhalé des vapeurs nocives, son échantillon de sang affiche une concentration de poison de 3,69 microgrammes par centimètre cube. Un deuxième échantillon de sang, prélevé 10 heures plus tard, affiche une concentration de 2,25 microgrammes par centimètre cube.

   Si le niveau de concentration est revenu à la normale 15 heures après le deuxième prélèvement, quelle était la concentration de poison à ce moment? Arrondis ta réponse à deux décimales près.

   (Considère que la diminution suit la formule $Q = Q_0e^{rt}$, où t représente le nombre d'heures écoulées depuis le premier échantillon, Q est la concentration de poison finale et Q_0 est la concentration initiale.)

3. Les ventes d'une nouvelle gamme de caméras vidéo suivent la relation suivante :

$$\mathrm{V}(n) = \frac{10\ 000}{1 + 100e^{-n}}$$

   où V(n) est le nombre total de caméras vidéo vendues durant les premières n années. Combien de temps faudra-t-il pour que 4 000 caméras vidéo aient été vendues (arrondis ta réponse à 4 décimales près).

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner le modèle de la croissance et de la décroissance exponentielle (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution

a) $y = 80e^{-0,2(3)} = 80\ (0,5488) = 43,9049$ grammes

b) $0,5 = e^{-0,2x}$

$\ln 0,5 = -0,2x \cdot \ln e$

$x = \dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$

$= 3,4657$ années

- **étudier le concept des intérêts composés**

Développez la formule en vous fondant sur une somme d'argent investie à un taux d'intérêt donné; démontrez aux élèves pourquoi les intérêts sont composés.

Les formules utilisées dans l'évaluation des ***intérêts composés*** sont des applications de la croissance exponentielle. Si un placement de C dollars rapporte un taux d'intérêt de i % chaque année, et si les intérêts sont composés annuellement, voici la formule de l'augmentation du placement après 1 année :

$$C + Ci = C(1 + i)$$

Après une deuxième année, la valeur totale du placement est $C(1 + i)$ plus les intérêts générés par ce montant, soit $C(1 + i)i$. Par conséquent, la valeur finale du placement après deux années est :

$$C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

En règle générale, la valeur finale, VF, après t années, de C dollars investis à un taux annuel de i %, composé annuellement, est :

$$VF = C(1 + i)^t$$

Les périodes d'intérêt pour les intérêts composés sont en règle générale inférieures à une année. Si les intérêts sont composés k fois par année, et si le taux d'intérêt annuel ou nominal est i %, alors le taux d'intérêt par période est $\dfrac{i}{k}$. Par conséquent, après une année, le placement vaut :

$$VF = C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

Quand une somme de C dollars est placée pendant t années à un taux nominal de i %, composé k fois par année, le placement vaut :

$$VF = C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Fais une recherche sur la force des tremblements de terre et compare-les en utilisant l'échelle de Richter.

Problèmes

1. Un pays a une population de 28 millions d'habitants, qui croît à un taux de 3 % par année. Si on suppose que la croissance est continue, la population P, en millions, dans t années d'ici, sera exprimée par la formule $P = 28e^{0,03t}$.
   a) Dans combien d'années la population aura-t-elle atteint 40 millions d'habitants?
   b) Quels facteurs peuvent contribuer à la rupture de ce modèle?
   c) Depuis combien d'années la population a-t-elle dépassé les 8 millions d'habitants?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 1 – suite

Un montant de 5 000 $ est placé à un taux d'intérêt annuel de 8,4 %, composé mensuellement.

a) Quelle est la valeur du placement après une année?

b) Quelle est sa valeur après dix années?

c) Combien d'intérêts auront été accumulés dans dix ans?

Solution

a) $VF = 5\,000\left(1+\frac{0{,}084}{12}\right)^{12} = 5\,000\,(1{,}007)^{12} = 5\,436{,}55$ $

b) $VF = 5\,000\left(1+\frac{0{,}084}{12}\right)^{12\times 10} = 5\,000\,(1{,}007)^{120} = 11\,547{,}99$ $

c) 11 547,99 $ – 5 000 $ = 6 547,99 $

Plus le nombre de périodes d'intérêts composés augmente, plus l'expression $\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k}$ se rapproche de e^{i}.

Remarque :

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}}\right)^{i} = e^{i}$$

Cela nous mène à la formule suivante pour calculer les intérêts composés de façon continue :

$$\boxed{VF = Ce^{it}}$$

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — ✔ **Technologie** — Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Un compte d'épargne rapporte des intérêts de 6 %, composés trimestriellement.
   a) Si le compte contient actuellement 5 000 $, combien d'argent contiendra-t-il dans 5 ans?
   b) Combien de temps faudra-t-il pour doubler le montant original?
2. Quel taux d'intérêt permettrait de faire passer un montant de 1 000 $ à 2 500 $ dans 8 années?
3. Quel taux d'intérêt permettrait de doubler un montant en dix ans si le taux est composé :
   a) annuellement?
   b) deux fois par année?
   c) mensuellement?
   d) hebdomadairement?
   e) quotidiennement?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 2

Quelle sera la valeur d'un placement de 5 000 $ après 10 années si le taux de 8,4 % est composé de façon continue?

Solution

$VF = 5\ 000\ (e)^{0{,}084 \times 10} = 5\ 000\ (2{,}316367) = 11\ 581{,}84$ $

Remarque qu'on obtient 33,85 $ de plus que si on avait investi cette somme à un taux de 8,4 % composé mensuellement.

Étant donné que la différence entre la capitalisation quotidienne et la capitalisation à l'heure est négligeable, les institutions financières n'offrent pas les taux d'intérêt composés de façon continue. Cette formule est appliquée plutôt aux populations ou à la croissance biologique, où le cumul se fait « en continu ». Dans ces circonstances, on écrit souvent la formule comme suit :

$y_t = y_0e^{kt}$ où : y_0 est la quantité originale
y_t est la quantité après un temps t
t est le nombre d'unités de temps écoulées
k est le taux de croissance

Cette formule est appelée la ***loi de la croissance naturelle***. Si une substance se désintègre selon la formule $y_t < y_0$, on pourrait appeler cette loi la ***loi de la décroissance naturelle***. Dans ce dernier cas, on pose $k < 0$, ou on peut considérer que la question porte sur la valeur actuelle.

Exemple 3

Actuellement, on compte 1 000 bactéries de type A. Si le taux de croissance à l'heure est de 0,025, combien devrait-on trouver de bactéries dans 24 heures?

Solution

Utilise la formule $y_t = y_0e^{kt}$.

$y_{24} = 1000e^{0{,}025(24)} = 1000e^{0{,}6} = 1000(1{,}8221188) = 1822$ bactéries

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une substance radioactive se désintègre de telle sorte que la quantité actuelle équivaudra à A grammes après t années, où $Q = 50e^{-0,0135t}$. Combien de temps faudra-t-il pour que la désintégration ait atteint un stade où il ne restera plus que 10 grammes de substance radioactive?
2. Quand on a mesuré pour la première fois la croissance de la population d'une ville, on avait dénombré 22 000 habitants. On avait alors établi que la population, P, augmentait selon la formule $P = 22\,000\ (10^{0,0163t})$. Si t est mesuré en années, combien de temps faudra-t-il pour que la population de la ville double?
3. James a tenté d'augmenter la valeur de son placement en augmentant le nombre de périodes de capitalisation. Si le meilleur taux que James a pu obtenir est 6 %, est-il possible qu'il obtienne un nombre de périodes de capitalisation suffisant pour que le taux équivaille à 7 %? Explique ta réponse.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 4
La désintégration d'une substance radioactive atteint un taux quotidien de 0,13. Combien de temps faudra-t-il pour que la substance soit désintégrée de moitié?

Solution

Méthode 1
(accent sur la désintégration)

$$y_t = y_0 e^{-kt}$$
$$x = (2x)e^{-0,13t}$$
$$0,5 = e^{-0,13t}$$
$$\ln(0,5) = -0,13t(\ln e)$$
$$t = \frac{\ln(0,5)}{-0,13} = 5,332$$

Méthode 2
(accent sur la valeur actuelle)

$$y_t = y_0 e^{kt}$$
$$2x = (x)e^{0,13t}$$
$$2 = e^{0,13t}$$
$$\ln 2 = 0,13t(\ln e)$$
$$t = \frac{\ln 2}{0,13} = 5,332$$

Il faudra environ cinq jours et un tiers pour que la substance soit désintégrée de moitié - pour que l'activité radioactive soit ***réduite à la moitié de sa valeur initiale (demi-vie)***.

Définition : La période radioactive (parfois appelée demi-vie) d'une substance correspond au temps nécessaire à la réduction de son activité à la moitié de sa valeur initiale.

Exemple 5
Quel montant d'argent dois-tu investir aujourd'hui à un taux d'intérêt de 6 % composé annuellement si tu as besoin de 5 000 $ dans 7 ans?

Solution

$$VF = C(1 + i)^n$$
$$5000 = C(1 + 0,06)^7$$
$$C = \frac{5000}{(1,06)^7} = 3325,29$$

Tu dois investir 3 325,29 $ maintenant.

Remarque : Les 3 325,29 $ représentent la valeur actualisée de 5 000 $.

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 6

Si tu peux investir de l'argent à un taux d'intérêt de 6 %, combien de temps faudra-t-il pour que ton investissement double?

Solution

Pour que l'argent double de valeur, x \$ doivent devenir $2x$ \$. Ainsi,

$$VF = C(1+i)^n$$
$$2x = x\,(1+0{,}06)^n$$
$$2 = (1{,}06)^n$$
$$\log 2 = n\log(1{,}06)$$
$$n = \frac{\log 2}{\log(1{,}06)} \approx 11{,}9$$

Il faudra environ 11,9 années.

Souvent, les intérêts sont calculés plus d'une fois par année. Dans ces cas, le nombre de calculs augmente dans une année et les intérêts accumulés à chaque période de capitalisation diminuent.

Exemple 7

Dans un champ, on trouve 500 chiens de prairie le 31 mai. Le 20 juin, on en trouve 800. Combien y en aura-t-il le 28 juin? (La croissance est exponentielle).

Solution

$$Q = Pe^{it}$$
$$800 = 500e^{i(20)}$$
$$1{,}6 = e^{20i} \Rightarrow i = 0{,}023500181$$
$$Q = 500e^{i(28)} = 965$$

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

La période radioactive du sodium-24 est de 14,9 heures. Suppose qu'un hôpital achète un échantillon de 40 mg de sodium –24.

a) Combien restera-t-il de sodium après 48 heures?

b) Combien de temps faudra-t-il avant qu'il n'en reste plus que 1 mg?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des logarithmes pour résoudre des problèmes**

Exemple 1

L'ionisation de l'eau pure est démontrée par les équations suivantes :

$[H+]\ [OH–] = 1{,}0 \times 10^{-14}$ et
$[H+] = [OH–]$

Si le pH d'une solution est défini par pH = –log10 [H+], quel est le pH de l'eau pure?

Solution : 7

Exemple 2

Le tremblement de terre qui a eu lieu en Arménie avait une intensité de 6,9 sur l'échelle Richter; l'énergie produite a atteint 3,5 × 1013 J. Quelle quantité d'énergie le tremblement de terre qui a eu lieu en Alaska, dont l'intensité était de 8,2, a-t-il produit?

Solution

Échelle de Richter = logarithme de la gravité

$$8{,}2 = \log x$$
$$10^{8{,}2} = x$$
$$158489319{,}2 \text{ joules} = x$$

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le pH d'un acide est exprimé par la formule pH = –log 10[H+], où [H+] correspond à la concentration en ions hydrogène, exprimée en moles par litre. Quelle est la concentration en ions hydrogène d'une solution de vinaigre pauvre dont le pH = 3,1?

Annexe D-1

Exercice d'algèbre

- **simplifier des exposants rationnels et fractionnaires**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des expressions qui comprennent des exposants rationnels et fractionnaires dont les dénominateurs sont inférieurs ou égaux à 5.

  Exemple

  Évalue :

  a) 2^{-2}

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

  c) $8^{\frac{2}{3}}$

  d) $27^{\frac{-4}{3}}$

  e) $32^{\frac{3}{5}}$

  Solutions

  a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

  c) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

  d) $27^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

  e) $32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

- **utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions**

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x},\ h(x) = \sqrt{3x}$, trouve les réponses suivantes :

a) $f(4)$

b) $g(-2)$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

d) $h(3)$

e) $g(h(27))$

f) $g(f(0))$

Solutions

a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$

b) $g(-2) = \dfrac{1}{-2}$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$

e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \dfrac{1}{9}$

f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \dfrac{1}{2}$

Vue d'ensemble du concept

Annexe D-2

Concept

Logarithmes naturels

Caractéristiques

- les logarithmes de base « e » sont appelés des *logarithmes naturels* (ou *népériens*)
- ils sont similaires aux logarithmes décimaux
- $e^{\ln u} = u$ et $\ln e^u = u$, alors $\ln e = 1$

Exemples

Simplifie :

$$e^{6+5\ \ln t}$$
$$= e^6 \cdot e^{5\ \ln t}$$
$$= e^6 \cdot t^5$$
$$= e^6 t^5$$

À quoi ça ressemble?

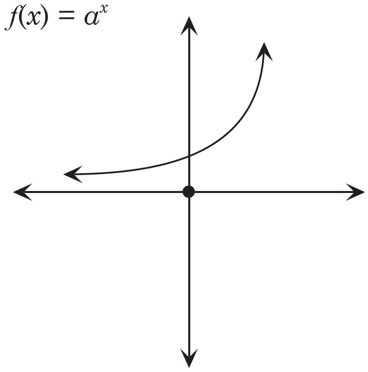
- Ça ressemble à un logarithme décimal dont il faut résoudre l'équation logarithmique.

À quoi ça ne ressemble pas?

- Un logarithme naturel ne ressemble pas à une transformation parce que les règles de résolution sont différentes.

Peux-tu l'illustrer?

$f(x) = a^x$



- Le graphique illustré ci-dessus découle de la fonction de base $f(x) = a^x$. Cela représente la fonction exponentielle.

Définition

Un logarithme naturel est un logarithme élémentaire de base « e ».
$e^{\ln u} = u$ et $\ln e^u = u$ (alors $\ln e = 1$). Tu peux utiliser cette règle de base pour résoudre l'équation.

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley, nº 27.

Mise en correspondance

Annexe D-3

Application des logarithmes

Intérêts composés

On les calcule annuellement (1 fois par année), trimestriellement (4 fois par année), mensuellement)12 fois par année) ou hebdomadairement (52 fois par année).

Formule : $VF = C\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^{kt}$

VF = valeur finale
k = nombre de paiements ou de calculs par année
C = placement
i = taux (d'intérêt en %)
t = temps

Désintégration radioactive

On calcule la quantité résiduelle d'une substance en désintégration après une période de temps donnée.

Formule : $y = Ae^{kx}$ ou $y = y_0e^{-kt}$

y = masse de matière au moment « t »
y_0 = masse originale quand $t = 0$
t = temps; k est une constante
e = la constante naturelle (2,71828)

Exemples

Un compte d'épargne rapporte un taux d'intérêt de 6 %, composé trimestriellement.

a) Si le compte contient 5 000 $ actuellement, combien d'argent contiendra-t-il dans 5 ans?

$$VF = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt}$$
$$= 5000\ \$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{(4)(5)}$$
$$= 6734{,}28\ \$$$

b) Combien de temps faudra-t-il pour que le montant original double ?

$$10\ 000\ \$ = 5000\ \$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4t}$$
$$2 = (1{,}015)^{4t}$$
$$\log 2 = t(4\log(1{,}015))$$
$$\frac{\log 2}{4\log(1{,}015)} = t$$
$$11{,}64 \text{ années} = t$$

a) En utilisant la formule des intérêts composés, remplace les valeurs données, soit P = 5 000 $, i = 0,06 et n = 4, t = 5. Effectue les calculs pour trouver le montant que contiendra le compte après 5 ans.

b) Remplace les valeurs connues dans l'équation. Simplifie l'équation. Prends le logarithmes des deux membres pour trouver la valeur de « t ». En appliquant la règle du logarithme aux exposants, place le 4 de « t » devant le logarithme. Isole t dans l'équation. Effectue les calculs et utilise les unités appropriées (ici, les années).

Annexe D-4

Mise en correspondance

Logarithmes

Logarithmes décimaux

Exposants

- une équation qui contient une inconnue en exposant est appelée une équation exponentielle, soit $y = 2^{x+1}$

Lois des exposants

1. $\frac{1}{x} = x^{-1}$
2. $(x^m)^n = x^{mn}$
3. $x^m x^n = x^{m+n}$
4. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
5. $\left(\frac{x}{m}\right)^n = \frac{x^n}{m^n}$

Exemple

Trouve la valeur de x :

$$5^{3(x-2)} = 125$$

- exprime les deux côtés dans le même système de base

$$5^{3(x-2)} = 5^3$$

- met les exposants en équation

$$3(x-2) = 3$$
$$3x - 6 = 3$$
$$3x = 9$$
$$x = 9$$

Logs

- une équation qui contient une inconnue sous la forme d'un logarithme
- la réciproque de l'équation exponentielle,soit $\log_2 x = 4$

Propriétés des logarithmes

1. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$
2. $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
3. $\log_b N^y = y \log_b N$
4. $\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$

Exemple

Trouve la valeur de x puis vérifie :

$$\log_5(2x - 3) = 2$$

- reformule l'équation sous forme exponentielle

$$5^2 = 2x - 3$$

- trouve la valeur de x

$$25 = 2x - 3$$
$$28 = 2x$$
$$14 = x$$

- vérifie : $\log_5(2x-3) = 2$

$$\log_5(2(14)-3) = 2$$
$$\log_5(25) = 2$$

- nous savons que c'est correct

Logarithmes naturels

Logarithmes

- les logarithmes naturels de base « e », soit $\ln_e x = \ln x$
- $y = \ln x$ seulement si $e^y = x$ pour $x > 0$

Règles des logarithmes naturels

$\ln e^u = u$ pour $u \in \Re$
Quand on trace le graphique, les logarithmes naturels sont la réciproque de $y = e^x$.

Exemple de base

Simplifie

$\ln e^{x^2+3x}$

$= x^2 + 3x$

Nous savons que $\ln e^u = u$ alors

$\ln e^{x^2+3x} = x^2 + 3x$.

Exposants

- la valeur de « e » est 2,71828
- "e" est la valeur obtenue quand la pente de la tangente au graphique d'une fonction exponentielle est 1

Règles des exposants naturels

$e^{\ln u} = u$ pour $u > 0$
$\ln e = 1$

Exemple de base

Simplifie

$e^{4\ln(3s+5)}$

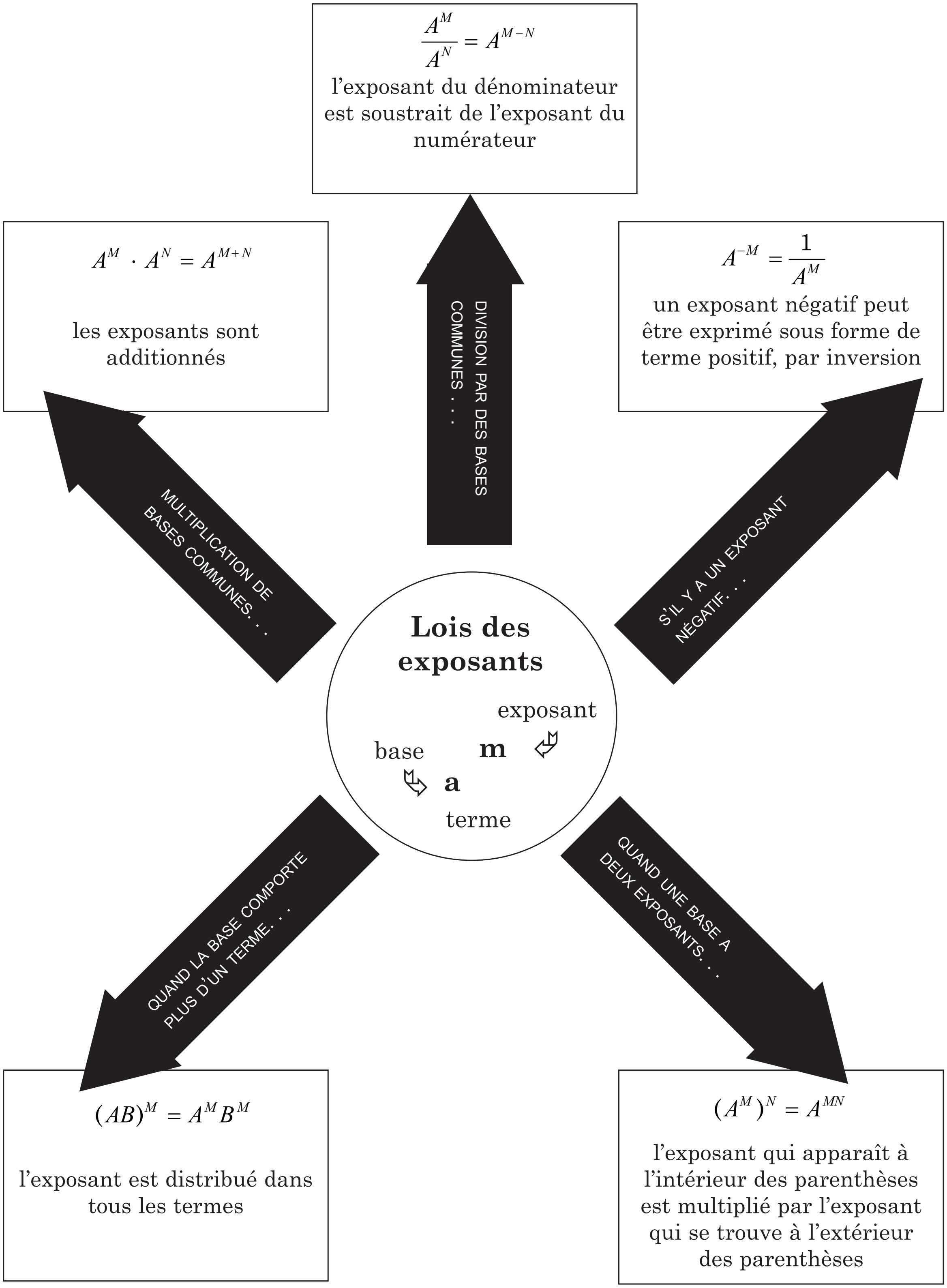
$= e^{\ln(3s+5)^4}$

$= (3s+5)^4$

1. Applique la règle des logarithmes aux exposants pour prendre le 4 à l'avant et mettre en exposant.
2. Nous savons que $e^{\ln u} = u$ alors $e^{\ln(3s+5)^4} = (3s+5)^4$.

Mise en correspondance

Annexe D-5



Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-6

Concept
Résolution d'équations logarithmiques élémentaires

Problème

$\log_{10}x + \log_{10}(x + 3) = 1$

Étape 1
Écris sous la forme d'une somme ou d'une différence et transforme-la en un seul logarithme.

exemple

$\log_{10}(x)(x + 3) = 1$

Étape 2
Transforme-la en une forme exponentielle.

exemple

$10 = (x)(x + 3)$

Étape 3
Trouve la valeur des inconnues à l'aide de techniques algébriques de base.

exemple

$0 = x^2 + 3x – 0$
$0 = (x + 5)(x – 2)$
$x = –5,\ x = 2$

Étape 4
Vérifie les racines de l'équation originale.

exemple

$\log_{10}(–5)(–5 – 3) = 1$
$1 = 1$
$\log_{10}(2)(2 – 3) = 1$
c'est impossible parce qu'on ne peut trouver le logarithme d'un nombre négatif

Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-7

Concept
Résolution d'équations exponentielles dont les bases sont différentes

Problème
Quand les bases d'une équation exponentielle ne sont pas les mêmes, et s'il n'est pas facile d'exprimer chaque membre dans le même système de base, suis les étapes suivantes :

Étape 1
Prends les logarithmes de chaque membre de l'équation

Étape 2
Utilise les propriétés des logarithmes pour écrire sous forme d'un seul logarithme.

Étape 3
Transforme les exposants en coefficient des logarithmes.
Conseil : Utilise les propriétés des logarithmes

Étape 4
Développe.

Étape 5
Rassemble les variables inconnues d'un côté de l'équation.

Étape 6
Décompose en facteurs les variables inconnues.

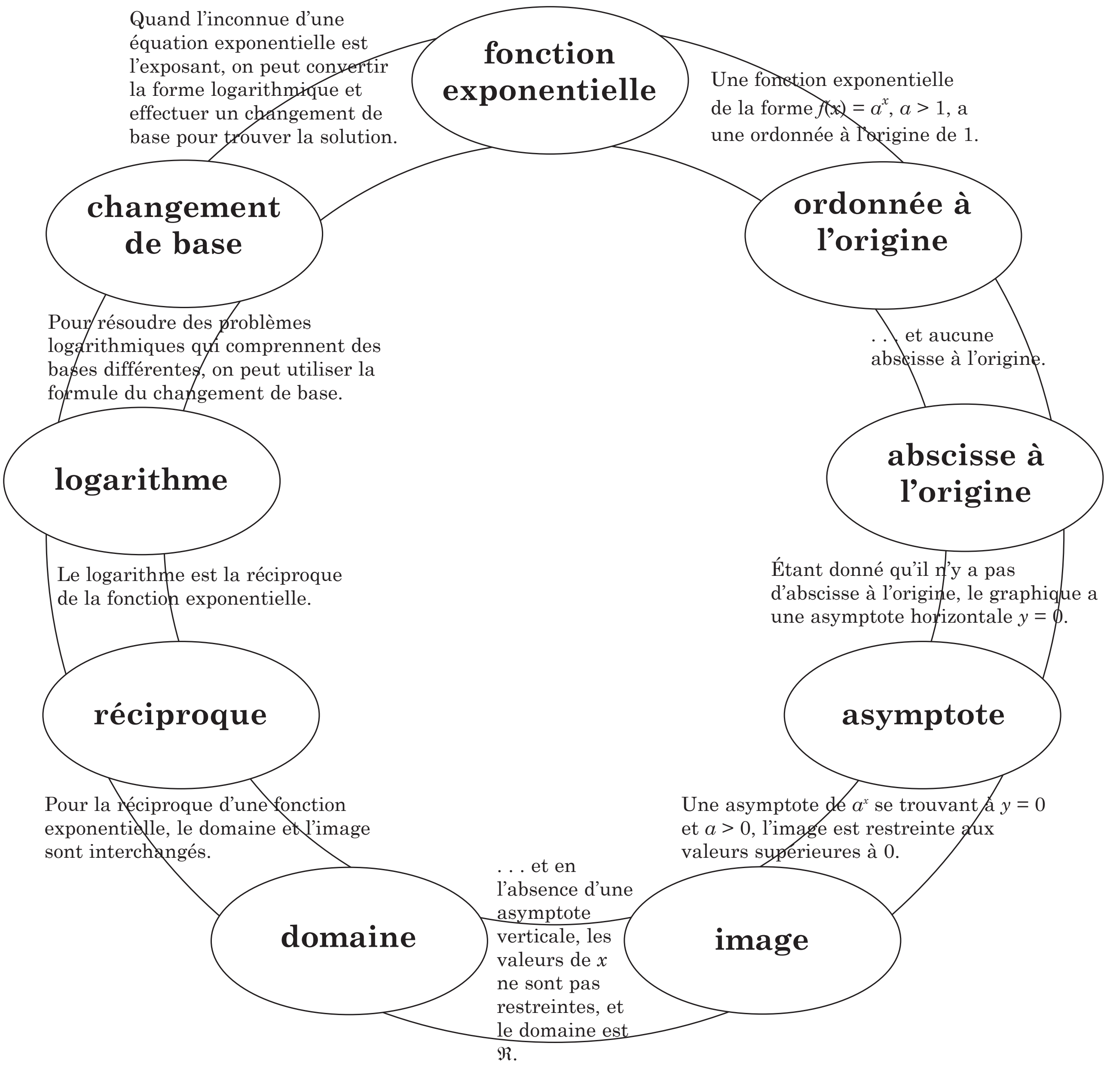
Étape 7
Effectue les calculs.

Exemple

$$
\begin{aligned}
3^{3x+6} &= 5^{x-5} \\
\log 3^{3x+6} &= \log 5^{x-5} \\
(3x+6)\log 3 &= (x-5)\log 5 \\
3x\log 3 + 6\log 3 &= x\log 5 - 5\log 5 \\
3x\log 3 - x\log 5 &= 5\log 5 - 6\log 3 \\
x(3\log 3 - \log 5) &= -5\log 5 - 6\log 3 \\
x &= \frac{-5\log 5 - 6\log 3}{3\log 3 - \log 5} \\
x &= -8{,}7
\end{aligned}
$$

Cycle du mot

Annexe D-8



Cycle du mot – Adapté (Word Cycle) : Extrait de *Reading — A Novel Approach*, texte de Janice Szabos, illustrations par Vanessa Filkins, © 1984 par Frank Schaffer Publications. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.

Unité E
Permutations, combinaisons et théorème du binôme

PERMUTATIONS, COMBINAISONS ET THÉORÈME DU BINÔME

Dans cette unité, les élèves :

- utilisent la notation factorielle ainsi que les principes du dénombrement pour résoudre des problèmes;
- déterminent le nombre de permutations de n objets distincts pris r à la fois et utilisent le résultat pour résoudre des problèmes;
- déterminent le nombre de combinaisons de n objets distincts pris r à la fois, et utilisent le résultat pour résoudre des problèmes;
- font la distinction entre les permutations et les combinaisons;
- utilisent le développement du binôme pour résoudre des problèmes.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'expliquer les principes de l'addition et de la multiplication et de faire des liens avec les diagrammes de Venn et les diagrammes en arbre;
- de faire le lien entre ces concepts et la résolution de probabilités théoriques;
- d'analyser des situations qui leur permettent de faire la différence entre les permutations et les combinaisons;
- de démontrer les divers types de permutations (circulaire, répétition du même objet);
- de faire le lien entre les permutations et les combinaisons et les principes fondamentaux du dénombrement;
- d'organiser des développements de binômes;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples, qui fait appel à un « calcul mental », les enseignants devraient réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe E-1) :

- la multiplication de polynômes

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

Durée

- 15 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Résoudre des problèmes de dénombrement d'ensembles, en utilisant des techniques telles que le principe fondamental du dénombrement, les permutations et les combinaisons

Résultat(s)d'apprentissage spécifique(s)

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes E-2 à E-6, p. E-40 à E-44).

- **utiliser les principes du dénombrement pour résoudre des problèmes**

Les méthodes de dénombrement sont utilisées pour compter les éléments d'un ensemble donné et les résultats d'un événement. Il s'agit d'un concept fondamental de la résolution des probabilités théoriques.

Les élèves ont déjà abordé certains problèmes de dénombrement dans le cours Mathématiques pré-calcul - Secondaire 3 quand ils ont utilisé les diagrammes de Venn. Ils verront ici une autre technique, soit le diagramme en arbre. L'exemple suivant permettra de présenter des notions élémentaires.

Exemple

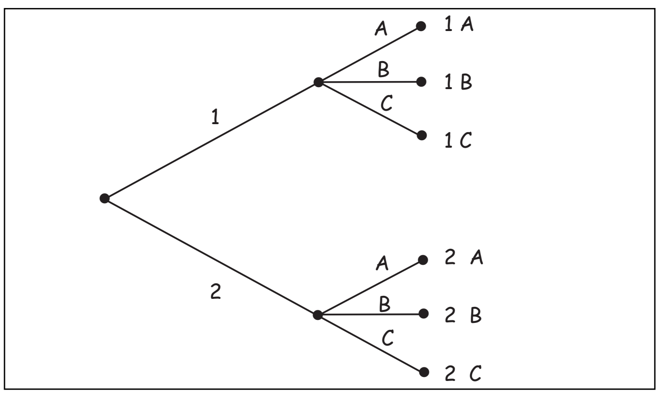
Un magasin qui vend des armoires de cuisine propose deux styles d'armoires et trois finis. Combien d'ensembles d'armoires différents sont possibles?

Solution

Discutez avec les élèves du fait qu'ils ont deux décisions à prendre :

1. Quel style choisir? Le style 1 ou le style 2? Il existe deux choix possibles pour cette décision.
2. Quel fini choisir? Le fini A, le fini B ou le fini C? Il existe trois choix possibles pour cette décision.

Le diagramme en arbre est très couramment utilisé pour illustrer les choix possibles :



Le dénombrement des points aux extrémités des branches de droite nous donne les six choix possibles pour les deux décisions.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscription au journal

Explique ce que représente un diagramme en arbre et pourquoi il nous aide à dénombrer le nombre de façons dont une série d'événements se produit.

Problème

Résous le problème suivant en utilisant un diagramme en arbre.

Mélissa envisage de se rendre de Winnipeg à Vancouver en passant par Calgary. Elle sait qu'elle peut emprunter trois routes différentes entre Winnipeg et Calgary, et deux routes entre Calgary et Vancouver. Combien existe-t-il de routes « aller-retour » différentes entre Winnipeg et Vancouver, en passant par Calgary, et combien de routes permettent de retourner à Winnipeg en passant par Calgary si on utilise une route seulement une fois?

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs, Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçons 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir le principe fondamental du dénombrement (multiplication)**

Cette méthode illustre le principe fondamental du dénombrement. On peut aussi l'appeler le principe de la multiplication, qui suppose des énoncés « ET ».

Définition : Supposons qu'un événement K puisse se produire de k façons et que, après la réalisation de cet événement, l'événement M puisse se produire de m façons. Le nombre de façons dont les événements K et M peuvent se produire équivaut à km façons.

On peut étendre cette formule pour ***inclure*** un nombre quelconque de décisions successives. Dans l'exemple ci-dessus, les élèves peuvent illustrer les deux décisions liées aux armoires par deux espaces vides.

$\underline{\quad 2 \quad}$ $\underline{\quad 3 \quad}$ = 6 styles et finis différents

Décision 1 Décision 2
2 choix 3 choix

Exemple

a) Combien de nombres à 3 chiffres différents peut-on construire en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sans les répéter?
b) Combien de nombres à trois chiffres seront pairs?
c) Combien de nombres à trois chiffres seront impairs?
d) Combien de nombres à trois chiffres seront supérieurs à 300?

Solution

a) $\underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } = 210$

b) Rappelez aux élèves qu'ils doivent tout d'abord tenir compte des restrictions en premier lieu : le dernier chiffre devant être pair, il y a 3 choix (2, 4, 6).

$\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\ 3\ }$

Il faut placer six chiffres dans deux espaces.

$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 90$

c) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Amenez les élèves à découvrir qu'ils auraient pu, pour trouver le nombre de nombres impairs, soustraire du total obtenu en (a) le nombre de nombres pairs trouvé en (b). Cette méthode est possible quand des événements complémentaires se produisent.

Le diagramme de Venn qui suit illustre les propriétés de la complémentarité. Les éléments inscrits dans le cercle A ont la propriété A, alors que ceux qui sont à l'extérieur du cercle A mais à l'intérieur de l'ensemble de tous les éléments possibles n'ont pas la propriété A.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Tu achètes une voiture chez un concessionnaire qui t'offre sept couleurs différentes, trois modèles de moteur et deux types de transmission. Combien de voitures le concessionnaire doit-il garder en stock pour être à même d'offrir un modèle de chaque type?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

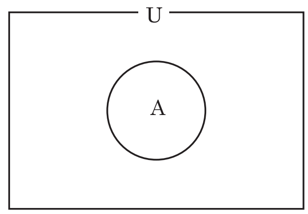
Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir le principe fondamental du dénombrement (multiplication) (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite



d) $\underline{5} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} = 150$

- **présenter la notation factorielle**

Exemple 1

Dans combien d'ordres différents peux-tu faire jouer quatre disques compacts?

Solution

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$

Ce schéma de multiplication qui commence par 4 est exprimé par la formule 4!, et se lit « factorielle 4 ».

En règle générale, la factorielle n est donnée par la formule $n! = (n)(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Exemple 2

Démontre que :

a) $5! + 4! = 6 \cdot 4!$

b) $(k + 1)! + k! = (k + 2)k!$

Solution

a) Membre gauche : $5! + 4! = 120 + 24 = 144$

Membre droite : $6 \cdot 4! = 6\,(24) = 144$

b) Membre gauche : $(k + 1)! + k!$

$(k + 1)k! + k!$

$k!\,(k + 1 + 1)$

$(k + 2)k!$

$\therefore$ membre gauche = membre droite

Remarque : $0! = 1$.

Utilise la calculatrice à affichage graphique pour calculer les factorielles qui sont des grands nombres. Sur la calculatrice TI-83, sélectionne $\boxed{\text{MATH}} \rightarrow \boxed{\text{PRB}}\ \boxed{4}$.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Simplifie : $\dfrac{11!}{9!}$
2. $\dfrac{8!}{9!}$
3. De combien de façons différentes deux personnes peuvent-elles être assises sur sept chaises?
4. De combien de façons trois pièces de monnaie peuvent-elles être choisies parmi cinq pièces? (Exprime la réponse sous forme factorielle).

Problème

Combien de multiples de 5 comportant 4 chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 5, 7, 9, 0 si aucune répétition n'est permise?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **expliquer le principe de dénombrement par addition, qui suppose des énoncés « OU »**

  Quand deux événements se produisent de façon indépendante, il faut additionner les résultats pour obtenir le nombre total de façons dont un événement peut se produire. Pour ce faire, il faut illustrer les deux situations de façon distincte et faire l'addition pour obtenir le nombre total.

Exemple 1

Combien de nombres entiers sont inférieurs à 300? (Aucune répétition possible)

Solution

Nombres à 3 chiffres $\underline{2} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 144$
(2 ou 1)
(2, 9, et 8 représentent le nombre de choix parmi les chiffres pour chacune des positions possibles) ***ou***

Nombres à 2 chiffres $\underline{9} \cdot \underline{9} = 81$ ***ou***

Nombres à 1 chiffre $\underline{10} = 10$

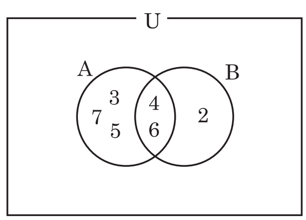
Total : 144 + 81 + 10 = 235 nombres (principe de l'addition)

Exemple 2

Combien de nombres à 3 chiffres différents, pairs et supérieurs à 300, peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7?

Solution

Le diagramme de Venn ci-dessous illustre pourquoi cette question exige un dénombrement cas par cas. Le cercle A contient tous les chiffres pouvant occuper la première position qui sont une solution possible du problème, alors que le cercle B contient tous les chiffres pouvant occuper la dernière position qui sont une solution possible du problème. Étant donné que les cercles contiennent les éléments 4 et 6 en commun, le dénombrement devrait être effectué pour trois cas distincts.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Simplifie : $\dfrac{7!(r+1)!}{6!(r-1)!r}$

2. Simplifie : $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

3. $\dfrac{(a-1)!}{(a+1)!}$

Problèmes

1. Combien de nombres entiers ne contenant pas de chiffres répétés y a-t-il entre 1 et 1000 inclusivement?

2. Prouve :
$$\frac{k!}{(r-1)!(k-(r-1))!} + \frac{k}{r!(k-r)!} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

2. Démontre que $\dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{(n-r+1)}{r} \cdot \dfrac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-1 utiliser la notation factorielle et le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **expliquer le principe du dénombrement par addition, qui suppose des énoncés « OU » (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

Cela illustre le principe de l'addition : le problème comporte deux restrictions et il faut établir des cas.

Cas 1 : Le dernier chiffre est 2.

$\underline{\;5\;} \cdot \underline{\;5\;} \cdot \underline{\;1\;} = 25$

Cas 2 : Le dernier chiffre est 4.

$\underline{\;4\;} \cdot \underline{\;5\;} \cdot \underline{\;1\;} = 20$

Cas 3 : Le dernier chiffre est 6.

$\underline{\;4\;} \cdot \underline{\;5\;} \cdot \underline{\;1\;} = 20$

Total : 25 + 20 + 20 = 65 nombres (principe de l'addition)

E-2 déterminer le nombre de permutations possibles de *n* objets distincts pris *r* à la fois, et utiliser le résultat pour résoudre des problèmes

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental
Technologie
✔ **Visualisation**

- **définir une permutation**

Une permutation d'un ensemble d'objets distincts est un arrangement ordonné de ces objets. Pour effectuer la permutation d'un ensemble d'objets, il faut les réorganiser.

Ainsi, si on fait une permutation des lettres CAT, on obtient les six permutations suivantes : CAT, CTA, ACT, ATC, TAC et TCA.

Le nombre de façons dont on peut placer *n* objets dans *r* positions disponibles, soit ${}_nP_r$ ou $P(n, r)$, est donné par la formule suivante :

$${}_nP_r \text{ ou } P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple 1

Des lettres sont inscrites sur des fiches. Eva a tiré les lettres A, W, L, N, S, O et D. Combien de permutations de quatre de ces lettres sont possibles?

Solution

Il faut trouver le nombre de permutations de 7 objets distincts pris 4 à la fois, soit 7P4 ou P(7, 4), qui peut être évalué dans le menu $\boxed{\text{MATH}}$ → $\boxed{\text{PRB}}$ de la calculatrice TI-83 ou avec les factorielles.

$${}_7P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. De combien de façons trois élèves peuvent-ils être assis devant six pupitres?
2. Le restaurant Pizzas Poppies offrent deux choix de salades, quatre choix de desserts et huit choix de pizzas. Combien de repas de trois services sont possibles?

Inscriptions au journal

1. Explique la signification de ${}_8P_3$. Pourquoi ${}_3P_8$ n'aurait-il aucun sens?
2. Que représente ${}_nP_n$? Explique pourquoi ${}_nP_n = n!$.
3. Janice a remarqué que, si elle ajoute un s à la fin d'un mot qui n'avait pas de s auparavant, le nombre de permutations reconnaissables triple. Que peut-on déduire au sujet du mot original?

Problèmes

1. De combien de façons cinq personnes peuvent-elles s'asseoir dans trois pupitres?
2. De combien de façons quatre couples mariés peuvent-ils être assis sur un banc de parc si les conjoints doivent être assis côte à côte?
3. Trouve algébriquement la valeur de n : ${}_{(n-1)}P_2 = 72$.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçons 2, 3 et 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents pris r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes - suite

Communications — ✔ **Résolution**
Liens — ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental — Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **définir une permutation (suite)**

Remarque : On peut aussi utiliser le principe élémentaire du dénombrement, p. ex., $\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4}$ = 840 permutations.

Exemple 2

De combien de façons 3 élèves de 4e secondaire, 3 élèves de 3e secondaire, 4 élèves de 2e secondaire et 2 élèves de 1re secondaire peuvent-ils être assis en rangée, si un élève de 4e secondaire doit être assis à chaque extrémité de la rangée?

Solution

$$\underline{3}\ \underbrace{\underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}_{\text{10 personnes à asseoir}}\ \underline{2}$$

Nombre de façons = 3 · 2 · 10! = 21 772 800

Remarque : Encouragez les élèves à utiliser la méthode des espaces vides quand les permutations comportent des restrictions.

• **résoudre des équations sur les permutations**

Exemple

Résous ${}_nP_2 = 30$.

Solution

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$n^2 - n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow$$

$(n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow n = 6,\ n = -5$ (rejeté car $n \geq 0$)

alors, ${}_6P_2 = 30$

ou

$${}_nP_2 = n(n-1)$$

$$n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n+5) = 0$$

$n = 6$ ou $n = -5$ (rejeté parce que $n \geq 0$)

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calculs mentaux

1. Évalue ${}_{100}P_2$.
2. Si on veut former des « mots » de trois lettres avec le mot OLYMPIQUE, combien a-t-on de choix pour la troisième lettre?

Problèmes

1. Pendant que Jeanne mange son sandwich au fromage, elle feuillette distraitement son dictionnaire. Son regard s'arrête sur un mot et elle se rend compte qu'elle pourrait arranger les lettres du mot de $\frac{6!}{3!}$ façons. Trouve un mot qui a cette propriété.
2. Trouve le nombre de façons dont on peut placer huit livres différents sur une tablette si trois de ces livres doivent être placés ensemble.
3. Trouve la valeur de n :

$$\frac{(n+3)!}{n!} = 24$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents pris r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental   Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **compter le nombre d'arrangements possibles de certains objets**

  En règle générale, s'il faut placer des objets ensemble, on peut compter les arrangements possibles en multipliant la factorielle du nombre de groupes par la factorielle de chacun des groupes.

  Exemple

  Cinq personnes, nommées A, B, C, D, E, sont assises sur un banc. De combien de façons peuvent-elles être assises si :

  a) les personnes A et B veulent être assises ensemble?

  b) les personnes A et B ne doivent pas être assises ensemble?

  c) les personnes A et C sont assises ensemble, de même que les personnes B et E?

  Solution

  a) Il y a quatre groupes : AB, C, D et E. Par conséquent, 4!2!1!1!1! ou 4!2! = 48 façons.

  Remarque : 1! représente un groupe d'une seule personne, on ne l'exprime pas en règle générale.

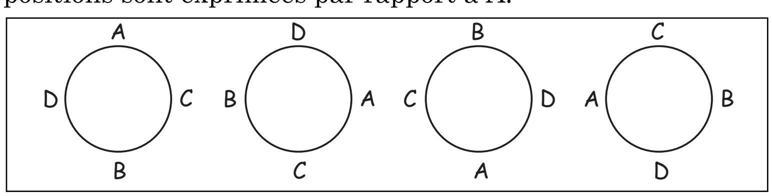
  b) Tous les groupes possibles – A et B ensemble = 5! – 4!2! = 120 – 48 = 72 façons.

  Remarque : Ces permutations du type « pas possible » sont importantes!

  c) Il y a trois groupes : AC, BE et D. Par conséquent, 3!2!2!1! = 24 façons.

- **dénombrer des permutations circulaires**

  Dans les permutations circulaires, il n'existe pas de première et de dernière position. Dans un cercle, la position est toujours déterminée par rapport aux autres éléments contenus dans le cercle. Par conséquent, toutes les permutations suivantes sont les mêmes, parce que B est à l'opposé de A, C est à droite de A et D est à gauche de A. Faites remarquer que toutes les positions sont exprimées par rapport à A.



  Pour trouver toutes les permutations possibles de quatre personnes désignées par les lettres A, B, C et D, il faut considérer que la personne A, par exemple, se déplace vers l'aire désignée et qu'elle est au début du cercle. Cette personne a un seul choix : commencer le cercle. À mesure que les autres personnes entrent dans le cercle, elles peuvent choisir une position par rapport à la personne A (elles peuvent se placer à l'opposé de A, à sa droite ou à sa gauche).

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

De combien de façons différentes quatre filles et deux garçons peuvent-ils être assis autour d'une table ronde?

Problème

De combien de façons différentes cinq personnes peuvent-elles être assises autour d'une table ronde si on compte sept chaises?

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dénombrer des permutations circulaires (suite)**

  Supposons que la personne A commence le cercle et que les autres personnes entrent dans le cercle par ordre alphabétique. Ainsi, la personne B peut choisir parmi les trois positions énoncées ci-dessus. Une fois que la personne B s'est placée dans le cercle, il reste deux positions possibles pour la personne C par rapport à la personne A. Une fois que B et C se sont placées, il ne reste plus qu'une position pour la personne D.

  Le nombre de permutations de n objets dans un cercle est $(n – 1)!$.

  Exemple 1

  Combien de permutations circulaires peux-tu former (laisse les réponses sous forme factorielle) :
  a) avec 10 objets?
  b) avec 100 objets?

  Solution

  a) (10 – 1) = 9!

  b) (100 – 1) = 99!

  Exemple 2
  De combien de façons différentes cinq personnes, nommées A, B, C, D et E, peuvent-elles être assises autour d'une table ronde si :
  a) A et B doivent être assises l'une à côté de l'autre?
  b) A et B ne peuvent être assises l'une à côté de l'autre?
  c) A et B doivent être assises ensemble, de même que C et D?

  Solution
  c) Il y a 4 groupes, soit AB, C, D, E, qui doivent s'asseoir autour d'une table ronde : (4 – 1)! = 3!.

  Une fois que les positions des groupes ont été décidées, les personnes A et B peuvent changer de place.

  Par conséquent, on compte 3!2! = 6 (2) = 12 façons.

  b) Toutes les positions possibles – le nombre de façons dont A et B peuvent être assises ensemble = 4! – 3!2! = 24 – 12 = 12 façons.

  c) On compte trois groupes, soit AB, CD et E qui doivent s'asseoir en cercle, avec deux paires.

  Il y a 2!2!2! = 8 façons.

  Cet exemple nous donne une combinaison de permutations circulaires et groupées.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents pris r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dénombrer le nombre de permutations d'objets identiques**

  Soit un ensemble de n objets parmi lesquels on trouve j exemplaires d'un type, k exemplaires d'un second type et m exemplaires du troisième type. Le nombre de permutations reconnaissables est

$$\frac{n!}{j!k!m!}\,.$$

Exemple 1

Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former avec les chiffres 46164?

Solution

$$\frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ nombres}$$

Exemple 2

Combien de permutations sont possibles avec les lettres du mot MISSISSIPPI?

Solution

$$\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$$

Exemple 3

Dans un test contenant 12 questions à choix multiples, trois réponses sont A, trois sont B, trois sont C et trois sont D. Combien de corrigés différents sont possibles?

Solution

$$\frac{11!}{3!3!3!3!} = 369\,600$$

Exemple 4

Combien de nombres comprenant au plus 3 chiffres différents peuvent être formés avec les chiffres 0 à 9 inclusivement?

Solution

Nombres à 1 chiffre :	$\underline{10}$	= 10
Nombres à 2 chiffres :	$\underline{9}\ \underline{10}$	= 90
Nombres à 3 chiffres :	$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}$	= 900
Total :		= 1000

Remarque : Le chiffre zéro ne peut être placé au début des nombres à deux et à trois chiffres.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Combien d'arrangements différents peut-on former avec les lettres du mot RELEVEUR? Exprime la réponse sous forme de factorielle.

2. Combien de permutations sont possibles avec les lettres du mot BARABABYBAR, si on n'utilise pas l'un des B?

Choix multiples

Trouve le nombre de façons dont huit livres différents peuvent être placés sur une tablette si trois des livres doivent se trouver ensemble.

a) 4 320

b) 40 320

c) 241 920

d) 6 720

Problèmes

1. Soit les lettres du mot ÉLÉMENTS. Combien de « mots » de cinq lettres peux-tu former en faisant alterner les voyelles et les consonnes?

2. Henri, Pierre et quatre filles sont assis en rangée. Henri ne peut pas s'asseoir au bout de la rangée. De combien de façons peuvent-ils être placés?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-2 déterminer le nombre de permutations de n objets différents pris r à la fois, et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

- **dénombrer le nombre de permutations d'objets identiques (suite)**

  Exemple 5

  Combien de porte-clés différents peut-on former avec quatre clés de couleurs différentes?

  Solution

  $$\frac{3!}{2!}$$

  Il faut diviser par deux parce que la face arrière et la face avant du porte-clés représentent un seul arrangement possible.

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de n objets distincts pris r à la fois et utiliser le résultat pour résoudre des problèmes

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

- **définir une combinaison**

  Toute sélection dans laquelle l'ordre n'intervient pas est appelée une ***combinaison***.

  On pourrait utiliser la notation C(n, r), ${}_nC_r$, ou $\binom{n}{r}$ pour indiquer des combinaisons de n objets pris r à la fois.

- **faire la distinction entre le nombre de permutations et celui de combinaisons**

  Le nombre de choix et d'arrangements possibles parmi des objets s'appelle une ***permutation*** (deux actions).

  Le nombre de choix possibles parmi des objets s'appelle une ***combinaison*** (seulement une des deux actions ci-dessus est effectuée).

  Il y a $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ permutations de n objets pris r à la fois.

  Étant donné qu'on peut arranger un groupe de r objets de $r!$ façons, chaque combinaison d'objets pris r à la fois donne $r!$ permutations.

  Pour déterminer le nombre de combinaisons possibles de n objets pris r à la fois, il faut diviser le nombre de permutations de n objets pris r à la fois par $r!$.

  Voici une formule générale qui donne le nombre de combinaisons de n objets distincts pris r à la fois :

  $$C(n,\ r) \text{ ou } {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} \text{ ou } {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. De combien de façons peut-on choisir trois pièces de monnaie parmi cinq pièces? (Exprime la réponse sous forme de factorielle).
2. De combien de façons trois élèves peuvent-ils être assis devant six pupitres?
3. Un comité de trois personnes est formé parmi trois garçons et trois filles. Combien de façons sont possibles si le comité doit comprendre deux garçons et une fille?
4. Évalue $({}_4C_3)^2$.

Choix multiples

1. Laquelle des formules suivantes est toujours correcte si $r > 1$ et $n > r$?

   a) ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ c) ${}_nC_n = 1$

   b) ${}_nC_n = 0$ d) ${}_nC_1 = n!$

2. De combien de façons quatre élèves peuvent-ils être assis dans une rangée de sept pupitres?

   a) ${}_7P_4$ b) ${}_7C_4$ c) 7! d) 4!

Inscription au journal

Explique la différence entre la valeur de ${}_nC_5$ et celle de ${}_nP_5$.

Problèmes

1. Trouve la valeur de n : ${}_nC_3 = 3({}_nP_2)$.

2. Démontre le lien : ${}_nC_{r+1} = \dfrac{n-r}{r+1}\,{}_nC_r$, où $0 \le r \le n$.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance,Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de n objets différents pris r à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental Technologie ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre le nombre de permutations et le nombre de combinaisons (suite)**

Exemple 1

Dans un groupe de cinq représentants des élèves, trois seront choisis pour siéger au Comité des fêtes.

a) Dresse la liste de toutes les possibilités pour la composition des comités.

b) Calcule ${}_5C_3$ et compare ta réponse à celle obtenue en (a).

c) Si Jeanne, l'une des élèves, doit être la présidente, combien de comités sont possibles?

Solution

a) Les élèves sont représentés par A, B, C, D, E.

Comités possibles : ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

b) Le nombre de permutations des personnes prises 3 à la fois est ${}_5P_3 = \frac{5!}{2!}$ = 60 façons. Cependant, une permutation comporte deux actions : (i) ***choisir trois personnes*** et (ii) ***les classer de façon différente***. Cependant, la tâche consiste uniquement à choisir trois personnes. L'ordre n'est pas important parce que les permutations ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA formeront le même comité. Par conséquent, le nombre de choix correspond au nombre de façons de choisir et de classer les personnes, divisé par le nombre de façons de classer trois personnes.

$$\frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{\overset{\text{(choix et classement)}}{60}}{\underset{\text{(classement)}}{6}} = \underbrace{10}_{\text{(choix seulement)}}$$

c) Pour résoudre ce problème, il suffit de placer Jeanne dans tous les comités (soit 1C1), puis de choisir 2 autres personnes parmi les quatre élèves qui restent : 4C2 = 6 comités.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Combien de mots de quatre lettres peuvent être formés avec les lettres du mot ALGÈBRE?

2. Montre comment tu pourrais calculer le nombre de bracelets différents que tu peux créer en choisissant cinq perles parmi huit perles de couleurs différentes.

3. Tu dois asseoir douze personnes autour de deux tables circulaires; autour de la première table se trouvent sept chaises et cinq chaises entourent l'autre table. De combien de façons peux-tu y arriver?

4. Joan organise un dîner où elle invitera six de ses neuf meilleurs amis.
   a) De combien de façons peut-elle choisir six invités?
   b) De combien de façons peut-elle choisir six invités si Bill et Marie refusent d'assister au dîner ensemble?

5. Combien de « mots » de trois lettres peuvent être formés avec les lettres du mot OCTOBRE?

6. Combien de jeux de 5 cartes peuvent être formés avec un paquet de 52 cartes, si les jeux contiennent 1 paire et 3 cartes de la même valeur?

7. Évalue : ${}_{(n+1)}C_{(n-1)} = 28$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de *n* objets différents pris *r* à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes
– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre le nombre de permutations et le nombre de combinaisons (suite)**

Exemple 2

Au cribbage, une main comporte six cartes si deux personnes jouent.

a) Combien de mains différentes sont possibles?

b) Combien de mains comportent trois rois?

c) Combien de mains ne contiennent aucune figure?

Solution

a) ${}_{52}C_6$

b) Un jeu comporte 4 rois et 48 autres cartes. Par conséquent, la réponse est ${}_4C_3 \cdot {}_{48}C_3$.

c) Un jeu comporte 12 figures et 40 autres cartes. Par conséquent, ${}_{40}C_6$ mains sont possibles.

- **utiliser des combinaisons et le principe élémentaire du dénombrement pour résoudre des problèmes**

Exemple 1

On veux diviser un groupe de 20 élèves en trois sous-groupes. Si le groupe A doit compter cinq élèves, le groupe B huit et si le restant des élèves se retrouvent dans le groupe C, de combien de façons peut-on y arriver?

Solution

$$\underbrace{{}_{20}C_5}_{\text{groupe A}} \cdot \underbrace{{}_{15}C_8}_{\text{groupe B}} \cdot \underbrace{{}_{7}C_7}_{\text{groupe C}}$$

Exemple 2

Combien existe-t-il d'arrangements possibles si 12 personnes doivent s'asseoir autour de 2 tables rondes dans un restaurant? On trouve cinq chaises autour d'une table et sept autour de l'autre.

Solution

$$\underbrace{{}_{12}C_5}_{\text{choisir}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{placer}} \cdot \underbrace{{}_{7}C_7}_{\text{choisir}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{placer}}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

2. Pour laquelle des expressions suivantes θ est-il défini?

   a) $\sin\theta = \dfrac{{}_nP_r}{{}_nC_r}$

   b) $\csc\theta = \dfrac{{}_nC_r}{{}_nP_r}$

   c) $\sec\theta = \dfrac{{}_nC_r}{{}_nP_r}$

   d) $\tan\theta = \dfrac{{}_nP_r}{{}_nC_r}$

2. Un comité comptant quatre garçons et trois filles doit être formé parmi six garçons et sept filles. Combien de comités sont possibles?

   a) $\dfrac{6!7!}{4!2!3!4!}$ b) $\dfrac{13!}{4!3!}$

   c) $\dfrac{13!}{7!6!}$ d) $\dfrac{13!}{4!2!3!4!}$

Problèmes

1. Quatre garçons et quatre filles ont décidé de sortir dîner dans un restaurant du coin. Il reste deux tables rondes de libres, l'une étant placée près de la fenêtre et l'autre au centre du restaurant. Chaque table compte quatre places.

   a) De combien de façons les huit personnes peuvent-elles être assises de façon aléatoire?

   b) De combien de façons peuvent-elles être assises si tous les garçons doivent s'asseoir à une table et toutes les filles à l'autre?

2. Un jeu ordinaire compte 52 cartes. Combien de mains de cinq cartes peuvent être formées si une main doit contenir deux paires de valeurs différentes? La cinquième carte doit être différente des deux paires.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

E-3 déterminer le nombre de combinaisons de n objets différents pris r à la fois et utiliser cette formule pour résoudre des problèmes – *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

- **utiliser des combinaisons et le principe du dénombrement fondamental pour résoudre des problèmes (suite)**

Exemple 3

Un comité de quatre personnes doit être formé parmi quatre filles et cinq garçons. De combien de façons la sélection peut-elle être effectuée si :

a) chaque comité doit compter au moins une fille?

b) chaque comité doit compter plus de filles que de garçons?

Solution

a) toutes les combinaisons possibles – aucune fille dans le comité

$= {}_9C_4 - {}_5C_4 = \dfrac{9!}{5!4!} - \dfrac{5!}{4!1!} = 126 - 5 = 121$

b) *Cas 1*, 4 filles

${}_4C_4 = \dfrac{4!}{0!4!} = 1$

Cas 2, 3 filles et 1 garçon

${}_4C_3 \cdot {}_5C_1 = \dfrac{4!}{1!3!} \cdot \dfrac{5!}{4!1!} = 4(5) = 20$

On peut former 1 + 20 = 21 comités où les filles sont en majorité.

E-4 résoudre des problèmes en utilisant le théorème du binôme pour $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

- **étudier les développements de binômes**

Demandez aux élèves de développer et de simplifier les binômes suivants :

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Amenez-les à tirer les conclusions suivantes sur les développements :

a) La somme des exposants est toujours égale à la puissance du binôme.

b) L'exposant du premier terme commence avec la même valeur que la puissance du binôme et décroît de 1 dans chacun des termes suivants.

c) L'exposant du deuxième terme figure dans le deuxième terme du développement et augmente de 1 jusqu'à ce que la puissance du binôme soit atteinte.

d) Le développement comporte un terme de plus que la puissance du binôme.

e) Les coefficients sont des combinaisons de la puissance qui commence à C(n, 0) et qui se termine à C(n, n), et ils sont symétriques.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trouve les valeurs de a et de b si, dans le développement de $(ax + b)^5$, le coefficient du deuxième terme est 8 et celui du troisième terme est 1,5.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner les développements de binômes (suite)**

Exemple 1

Développe $(x + y)^7$ en utilisant le théorème du binôme.

Solution

a) Exprime le modèle des variables :

$$\_\_x^7y^0 + \_\_x^6y^1 + \_\_x^5y^2 + \_\_x^4y^3 + \_\_x^3y^4 + \_\_x^2y^5 + \_\_x^1y^6 + \_\_x^0y^7$$

b) Intègre les coefficients :

$$\begin{array}{cccccccc}
{}_7C_0 + & {}_7C_1 + & {}_7C_2 + & {}_7C_3 + & {}_7C_4 + & {}_7C_5 + & {}_7C_6 + & {}_7C_7 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
__x^7y^0 + & __x^6y^1 + & __x^5y^2 + & __x^4y^3 + & __x^3y^4 + & __x^2y^5 + & __x^1y^6 + & __x^0y^7 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1x^7 + & 7x^6y + & 21x^5y^2 + & 35x^4y^3 + & 35x^3y^4 + & 21x^2y^5 + & 7xy^6 + & 1y^7
\end{array}$$

- **présenter le théorème du binôme**

$(x + y)^n = {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^1 + \ldots\ {}_nC_nx^1y^{n-1} + {}_nC_nx^0y^n$

où n est tout nombre entier positif.

ou

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots$$

$$+\binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Voici des observations supplémentaires très importantes :

a) L'exposant du deuxième terme du binôme, dans le développement, correspond au nombre d'objets choisis pour former une combinaison. Par exemple,

$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ Ces nombres sont toujours les mêmes.

b) L'exposant du deuxième terme du binôme développé est un de moins que la position du terme. Par exemple :

p^e terme du développement de $(x + y)^n$ est $\binom{n}{p-1}x^{n-p+1}y^{p-1}$

c) Il faut se rappeler que la somme des exposants de tous les termes du développement de $(x + y)^n$ est n. Par exemple,

$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \qquad n - k + k = n$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calculs mentaux

1. Exprime le binôme suivant sous forme de développement complet : $(x + y)^3$.

2. Quel est l'avant-dernier terme du développement de $(x + y)^7$?

3. Écris une expression qui constituerait le septième terme de $(2x - 3y)^8$.

Problèmes

1. Trouve le terme du développement x^5 de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^7$ qui contient x^5 et simplifie.

2. Résous : ${}_nC_4 = 35$.

3. Trouve et simplifie le troisième terme à partir de la fin du développement de $(2a - b)^{15}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **présenter le théorème du binôme (suite)**

Exemple 1

Développe et simplifie $(2x - y)^4$.

Solution

$${}_4C_0(2x)^4(-y)^0 + {}_4C_1(2x)^3(-y)^1 + {}_4C_2(2x)^2(-y)^2 + {}_4C_3(2x)^1(-y)^3 + {}_4C_4(2x)^0(-y)^4$$
$$= 1 \cdot 16x^4 \cdot 1 + 4 \cdot 8x^3(-y) + 1 \cdot 4x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot 2x(-y)^3 + 1 \cdot 1 \cdot y^4$$
$$= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

Remarque : Les élèves doivent savoir que la symétrie des coefficients est annulée et que les signes alternent.

- **trouver et simplifier un terme quelconque du développement d'un binôme**

Exemple 1

Trouve le onzième terme du développement de $(x - 2)^{13}$.

Solution

$${}_{13}C_{10}x^{13-10}(-2)^{10} = {}_{13}C_{10}x^3(-2)^{10} = 29\ 2864x^3$$

Demandez aux élèves de trouver un terme précis dans une expression binomiale.

Exemple 2

Trouve le terme du développement de $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^5$ qui contient x^4.

Solution 1

Les élèves n'ont pas à tenir compte des coefficients au début parce qu'ils doivent tout d'abord trouver le modèle de la variable. Une fois qu'ils ont trouvé le terme correct, ils peuvent résoudre l'ensemble du terme.

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$$

$${}_5C_0(x^2)^5 \Rightarrow x^{10}$$

$${}_5C_1(x^2)^4\left(-\frac{2}{x}\right)^1 \Rightarrow x^7$$

$${}_5C_2(x^2)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2 \Rightarrow x^4$$

Modèle : les exposants de la variable diminuent de 3 dans chaque terme.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Le $n^{\text{ième}}$ terme dans $(a^3 - c^5)^7$ a un coefficient numérique équivalant à ${}_7C_3$. Quelle est la valeur de n?

Problèmes

1. Trouve le coefficient numérique du terme qui contient x^{51} dans le développement de $\left(\dfrac{x^6}{2} - \dfrac{2}{x}\right)^{12}$.

2. a) Quel terme du développement de $\left(x^5 - \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ contient x^{15}?

   b) Simplifie le terme qui contient x^{15}.

3. Calcule le terme dans le développement de $\left(3x^2 - \dfrac{1}{3x}\right)^9$ qui ne contient pas de variable x.

4. Trouve la forme simplifiée du cinquième terme du développement de $(3x^2 - y)^8$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– suite

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver et simplifier un terme quelconque du développement du binôme (suite)**

  Exemple 2 – suite

  Solution 1 – suite

  Le troisième terme contient x^4.

  $${}_5C_2(x^3)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 40x^4$$

  Solution 2

  $${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$$

  si on ne tient pas compte des coefficients

  $$(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = x^4$$

  $$\frac{x^{10-2r}}{x^r} = x^4$$

  $$10 - 3r = 4$$

  $$r = 2$$

  $$\therefore\ {}_5C_2(x^2)^3\left(\frac{-2}{x}\right)^2$$

- **utiliser le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients numériques**

  Les coefficients numériques du développement binomial de $(x + y)^n$ peuvent être exprimés au moyen d'un tableau triangulaire. Ce tableau est appelé ***triangle de Pascal***, d'après le réputé mathématicien Blaise Pascal. Pour former ce triangle, arrange dans un tableau triangulaire les coefficients numériques des développements binomiaux de $(x + y)^n$ pour les valeurs croissantes de n.

n	$(x+y)^n$	Coefficients
0	$(x+y)^0$	1
1	$(x+y)^1$	1 1
2	$(x+y)^2$	1 2 1
3	$(x+y)^3$	1 3 3 1
4	$(x+y)^4$	1 4 6 4 1
5	$(x+y)^5$	1 5 10 10 5 1
6	$(x+y)^6$	1 6 15 20 15 6 1
7	$(x+y)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Écris une expression pour le quatrième terme de $(x + y)^8$. Ne la simplifie pas.

Inscription au journal

1. Pour toute paire de nombres adjacents dans le triangle de Pascal, que remarques-tu au sujet de la valeur qui figure entre les deux mêmes nombres dans la rangée suivante? De quelle façon cela peut-il t'aider à ajouter des rangées au triangle de Pascal?

2. Décris deux modèles que tu peux remarquer dans un triangle de Pascal écrit selon la notation ${}_nC_r$.

3. Décris le lien qui existe entre le théorème du binôme et le triangle de Pascal.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

E-4 résoudre des problèmes en appliquant le théorème du binôme à $(a + b)^n$, où n appartient à l'ensemble des nombres naturels
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients numériques (suite)**

Un modèle intéressant émerge.

- La première et la dernière entrée sont toujours 1.
- Les coefficients sont les mêmes dans toutes les rangées, qu'on les lise de gauche à droite ou de droite à gauche.
- À partir de la deuxième rangée du triangle, la somme de toute paire d'entrées adjacentes correspond à l'entrée qui figure « entre ces deux entrées » dans la rangée suivante.

  Par exemple, le 4 et le 6 dans la 5e rangée produisent le nombre 10 dans la 6e rangée; le 1 et le 5 dans la 6e rangée produisent le 6 dans la 7e rangée. Cependant, pour trouver une rangée de nombres, tu dois connaître les entrées de la rangée précédente dans le triangle. Cette méthode demeure toutefois assez efficace pour les binômes de petit exposant.

Exemple

Utilise le triangle de Pascal pour développer $(a + b)^5$.

Solution

Les coefficients numériques sont : 1 5 10 10 5 1

Si on intègre les modèles d'exposants de a et de b, on obtient :

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Annexe E-1

Exercice d'algèbre

- **multiplication de polynômes**

  Les élèves devraient être à même de multiplier deux binômes sans effectuer d'étapes intermédiaires.

  Exemple

  Multiplie et regroupe les termes semblables :

  a) $(x + 2)(x - 1)$

  b) $(x + 3)(x - 3)$

  c) $(x + 4)(x + 4)$

  d) $(x - 9)^2$

  Solutions

  a) $x^2 + x - 2$

  b) $x^2 - 9$

  c) $x^2 + 8x + 16$

  d) $x^2 - 18x + 81$

- **décomposer en facteurs des trinômes qui sont des carrés parfaits**

  Exemple

  Décompose entièrement en facteurs les expressions suivantes :

  a) $x^2 - 2x + 1$

  b) $x^2 + 6x + 9$

  c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

  Solution

  a) $(x - 1)^2$

  b) $(x + 3)^2$

  c) $(x - \sqrt{2})^2$

- **compléter le carré**

  Exemple

  Pour quelles valeurs de k le trinôme sera-t-il un carré parfait?

  a) $x^2 - 10x + k$

  b) $x^2 + 12x + k$

  c) $x^2 + 3x + k$

  Solution

  a) 25

  b) 36

  c) $\frac{9}{4}$

Développement du concept selon Frayer

Annexe E-2

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles — Toujours

- il s'agit d'une sélection de nombres pour laquelle l'ordre est ***important***
- les objets sont classés dans un ***certain ordre*** ou dans une rangée

Caractéristiques non essentielles — Parfois

- permutations avec des restrictions
- permutations avec des répétitions et des restrictions
- permutations circulaires
- notation factorielle

Caractéristiques non pertinentes — Jamais

- l'ordre n'intervient pas
- ce n'est pas une combinaison

Sujet - Concept

Permutations

Exemples

On doit placer huit garçons dans une rangée. Deux garçons particulièrement difficiles n'ont pas la permissions de s'asseoir ensemble, ou ils peuvent s'asseoir à l'une des extrémités de la rangée. De combien de façons peut-on les placer?

1. $\underbrace{\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{5}}_{}$ $= 6 \cdot 5 \cdot 6! = 21\,600$

   Deux autres garçons que les garçons difficiles

   S'assoient ensemble (les autres garçons)
2. Grouper les garçons ensemble :
   $6! \cdot 5 \cdot 2 = 7200$
   Ils peuvent s'asseoir à cinq autres places (pas un à côté de l'autre), et il faut multiplier par deux parce qu'ils peuvent échanger leur place.
3. $21\,600 - 7200 = 14\,400$

Exemple non pertinent

Un groupe de 15 chasseurs de trésors arrivent dans une clairière dans la forêt, où ils voient cinq sorties. On décide que sept iront à gauche, quatre sortiront par le centre et les autres iront par la droite. De combien de façons cela peut-il être réalisé?

$${}_{15}C_7 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4 = 45\,045$$

Faire un dessin ou un diagramme en arbre

${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$: « n » objets pris « r » à la fois

« $n!$ » est un entier positif appelé « factorielle n »

$\dfrac{{}_nP_r}{n} = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ Permutations circulaires

$\dfrac{n!}{j!k!l!\ldots}$ Permutations comprenant des répétitions

Définition

Arrangement d'un ensemble d'objets dans un ordre particulier. Pour n objets, le nombre de permutations est (n!). Si « r » objets doivent être choisis parmi un ensemble de « n » objets au total, le nombre de permutations est calculé selon la formule $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Développement du concept selon Frayer

Annexe E-3

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles — Toujours

- l'orde est toujours important
- selon la formule

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Caractéristiques non essentielles — Parfois

- peuvent être disposées en rangée ou en cercle
- les principes de l'addition ou de la multiplication peuvent s'appliquer

Caractéristiques non pertinentes — Jamais

- on ne peut remplacer des combinaisons par des permutations

Sujet - Concept

Permutations

Exemples

Combien de « mots » de quatre lettres peut-on former avec les lettres du mot DIMANCHE?

Solution

<u>8</u> <u>7</u> <u>6</u> <u>5</u> = 1680 ways

Processus

Pour former des mots de quatres lettres, tu dois insérer des espaces vides. Le mot *dimanche* comprenant huit lettres, tu peux placer huit lettres dans le premier espace. Il reste sept lettres pour le deuxième espace, six pour l'espace suivant et cinq pour le dernier. Il s'agit d'une permutation parce que l'ordre est important.

Exemple non pertinent

Quand tu joues à la Loto 6-49, tu peux choisir 6 nombres de 1 à 49. De combien de façons peux-tu faire ce choix?

Solution

${}_{49}C_6$ = 13 938 816 façons

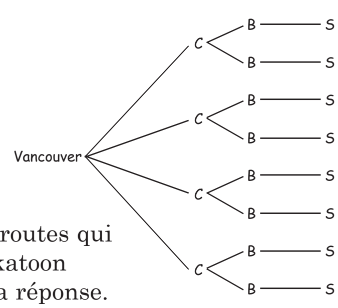
Processus

Utilise la calculatrice pour trouver la réponse.

Cet exemple n'est pas pertinent parce qu'il illustre une combinaison; l'ordre n'intervenant pas dans le choix des six chiffres, ce n'est pas une permutation.

Trace un dessin ou un diagramme en arbre

À partir de l'aéroport international de Vancouver, quatre corridors aériens mènent à Calgary, deux corridors mènent de Calgary à Brandon, et un corridor mène de Brandon à Saskatoon. Combien de corridors aériens différents conduisent de Vancouver à Saskatoon?



Dénombre les routes qui mènent à Saskatoon pour trouver la réponse.

Définition

Une permutation est un arrangement ***ordonné*** d'objets distincts, en rangée ou en cercle.

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-4

À quoi ça ressemble?	**À quoi ça ne ressemble pas?**
➢ Les combinaisons sont comme le théorème du binôme, qui utilise des combinaisons. ➢ Le théorème du binôme utilise l'équation $(r+1)^e$ terme = $_nC_r a^{n-r} b^r$ pour obtenir le n^e terme du développement d'un binôme.	➢ Les combinaisons ne sont pas des permutations. ➢ Dans les permutations, l'ordre est important et les problèmes ont plus de résultats possibles.

Combinaisons

Caractéristiques

- Le nombre de combinaisons est donné par l'équation $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- n représente le nombre d'objets parmi lesquels on fait un choix
- r représente le nombre d'objets choisis

Exemple

Un club de placement compte quatre membres féminins et six membres masculins. Un comité de recherche composé de trois personnes doit être formé. De combien de façons peux-tu y arriver si :

a) le comité doit compter deux femmes et un homme;
b) il doit y avoir au moins une femme dans le comité;
c) les trois membres doivent être du même sexe.

Solutions et Processus

a) $({}_4C_2 \cdot {}_6C_1) = 36$ façons
- — Utilise la formule $_nC_r$.
- — $_4C_2$ représente la sélection de deux femmes parmi un total de cinq, et $_6C_1$ représente la sélection d'un homme parmi un total de six.
- — Les deux événements doivent se produire en même temps, ce qui t'oblige à les multiplier ensemble selon le principe du dénombrement factoriel.

b) $({}_4C_1 \cdot {}_6C_2) + ({}_4C_2 \cdot {}_6C_1) + ({}_4C_3 \cdot {}_6C_0) = 100$ façons
- — Il y a trois scénarios possibles : 1 femme, 2 hommes
2 femmes, 1 homme
3 femmes, 0 homme
- — Dans chaque scénario, applique la formule $_nC_r$ comme tu l'as fait dans la partie (a), puis additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent.

c) $({}_4C_3 \cdot {}_6C_0) + ({}_6C_3 \cdot {}_4C_0) = 24$ façons
- — Il y a deux scénarios possibles : 2 femmes, 0 homme
0 femme, 3 hommes
- — Applique la formule $_nC_r$ pour chaque scénario et additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent.

Définition	**Questions pratiques**
Une combinaison est une sélection parmi un certain nombre d'objets, dans laquelle ***l'ordre n'intervient pas.***	Exercice 33, N^os 1–11 Exercice 34, N^os 1–5

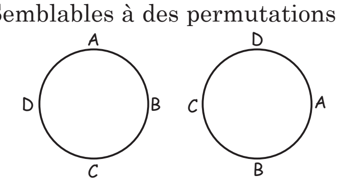
Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley nº 27.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-5

À quoi ça ressemble?

- Semblables à des permutations



- Ils semblent différents, mais on a tout simplement avancé chaque lettre d'un espace (chacune des quatre lettres occupe la même position par rapport aux autres).

À quoi ça ne ressemble pas?

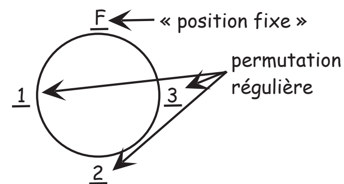
- Elles sont différentes des permutations parce que, dans les permutations circulaires, l'ordre est important (l'arrangement des objets autour du cercle influe sur le nombre possible d'arrangements).

Permutations circulaires

Caractéristiques

- une permutation ciculaire de n éléments peut être calculée à l'aide de la formule : $\frac{{}_nP_r}{n} = (n-1)!$ (p.ex., 10 personnes peuvent être assises de $(10-1)! = 362\,880$ façons autour d'une table).

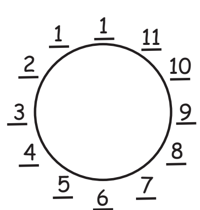
Illustration



Exemple 1

De combien de façons les douze chevaliers du roi Arthur peuvent-ils être placés autour de la table ronde?

Solution



(12 – 1)! ou 11! façons = 39 916 800 façons

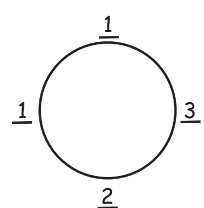
Processus

1. Commence par insérer un espace autour de la « table » — la position fixe — où tu peux placer un seul objet.
2. Remplis tous les autres espaces en appliquant la formule de la permutation régulière.

Exemple 2

De combien de façons quatre perles de couleurs différentes peuvent-elles être arrangées pour créer un bracelet.

Solution



(4 – 1)! = 6 façons
6 ÷ 2 = 3 bracelets

Processus

1. Dispose les perles en cercle et, au moyen de permutations circulaires, calcule le nombre de bracelets possibles.
2. Divise par deux parce que le bracelet serait le même si les perles étaient placées dans l'ordre inverse.

Définition

Les permutations ciculaires sont effectués sur des objets placés en cercle (non linéaires).

Questions pratiques

Exercice 31, n^os 1(a), 2
Exercice 32, n° 4

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-6

Théorème du binôme

Caractéristiques

- utilise la formule : ${}_nC_r a^{n-r} b^r$
- utilise les combinaisons
- n est un nombre entier positif
- x et y sont deux nombres quelconques
- r doit être égal au n^e terme -1

Illustration

```
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
         etc
```

Le triangle de Pascal suit un modèle similaire au modèle du théorème du binôme.

Exemple 1

Trouve le terme qui contient x^{20} dans$(2x - x^4)^{14}$.

Solution

$r = 0$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$

Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le premier terme.

$$\begin{aligned} 1^{er} \text{ terme } (0+1) &= {}_{14}C_0(2x)^{14}(-x^4)^0 \\ &= 1(16384x^{14})1 \\ &= 16384x^{14} \end{aligned}$$

$r = 1$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$

Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le deuxième terme.

$$\begin{aligned} 2^{e} \text{ terme } (1+1) &= {}_{14}C_1(2x)^{13}(-x^4)^1 \\ &= 14(8192x^{13})(-x^4) \\ &= -114688x^{17} \end{aligned}$$

Compare les exposants de x dans les deux premiers termes. Tu constateras qu'ils augmentent de 3. Par conséquent, le troisième terme contiendra l'expression x^{20}.

$r = 2$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$

Insère les nombres dans l'équation et simplifie pour obtenir le troisième terme.

$$\begin{aligned} 3^{e} \text{ terme } (2+1) &= {}_{14}C_2(2x)^{12}(-x^4)^2 \\ &= 91(4096x^{12})(x^8) \\ &= 372\,736x^{20} \end{aligned}$$

Exemple 2

Trouve le dixième terme dans le développement de $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^{12}$.

Solution

$r = 9,\ n = 12,\ a = x,\ b = -\frac{1}{2}y$

Insère les nombres dans l'équation.

$$(9+1) = {}_{12}C_9 x^3 \left(-\frac{1}{2}y\right)^9$$

Simplifie l'équation.

$$(9+1) = 220x^3\left(-\frac{1}{512}y^9\right)$$

Multiplie les termes ensemble pour obtenir le dixième terme.

$$(9+1) = \frac{-220x^3y^9}{512}$$

Définition

Le théorème du binôme permet de trouver le n^e terme du développement d'un binôme quelconque quelle que soit sa puissance.

Questions pratiques

Exercice 34, n^os^ 6–12
Exercice 35, n^os^ 1–7

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec la permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley nº 27.

Unité F
Sections coniques

SECTIONS CONIQUES

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- classent les coniques selon leur forme;
- étudient et examinent la forme générale d'une conique;
- classent, tracent et décrivent un cercle sous sa forme générale et canonique;
- classent, tracent et décrivent une ellipse sous sa forme générale et canonique;
- classent, tracent et décrivent une hyperbole sous sa forme générale et canonique;
- classent, tracent et décrivent une parabole sous sa forme générale et canonique;
- convertissent l'équation d'une conique de la forme générale à la forme canonique, et vice-versa.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'utiliser la calculatrice ou un logiciel graphique pour explorer l'effet sur une conique de la variation des valeurs de A, C, D, E et F dans l'équation $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$;
- d'établir les liens entre les propriétés algébriques des coniques et leur tracé;
- d'écrire les équations de coniques à partir du graphique et vice-versa;
- d'effectuer des activités appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir annexe F-1) :
- la notation fonctionnelle;
- la décomposition en facteurs de trinômes qui sont des carrés parfaits;
- la complétion du carré.

Matériel

- calculatrice et logiciel graphique
- papier quadrillé

Durée

- 11 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Classer les sections coniques selon la forme et l'équation.

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe de symétrie vertical ou horizontal seulement

✔ **Communications** Résolution
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental Technologie
✔ **Visualisation**

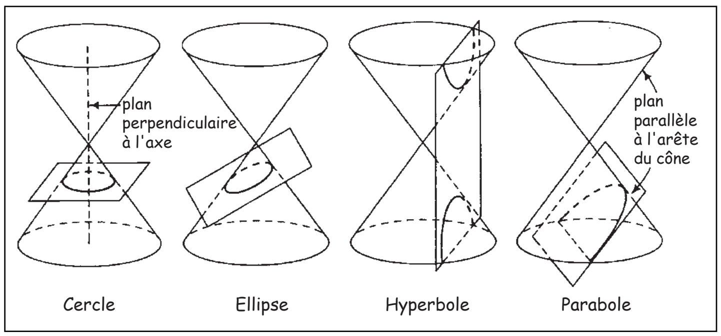
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes F-2 à F-4, p. F-60 à F-62).

- **classer les sections coniques selon la forme**

  Visualise les formes générées par l'intersection d'un cône à deux nappes et un plan. Pour chacune des sections coniques (parabole, cercle, ellipse, hyperbole), décris le lien entre le plan, l'axe central du cône et la génératrice.

  Si un plan coupe un cône à deux nappes et qu'on l'incline à différents angles, les sections transversales qui en résultent sont appelées des sections coniques. Le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des sections coniques.



Le ***cercle*** est l'intersection d'un cône à deux nappes et d'un plan perpendiculaire à l'axe du cône. Si le plan est incliné mais qu'il n'est pas parallèle à une génératrice tel qu'il coupe seulement l'une des nappes du cône, l'intersection est une ***ellipse***. L'hyperbole est l'intersection d'un cône à deux nappes et d'un plan incliné tel qu'il coupe les deux nappes sans passer par le sommet du cône. La ***parabole*** est formée quand le plan est parallèle à une génératrice d'un cône et qu'il croise une nappe.

Il est aussi possible de couper le cône double pour obtenir un point unique, une droite ou une paire de droites. Ces cas extrêmes sont appelés des ***sections coniques dégénérées***.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressources imprimées :

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.
– Module 8, Leçons 1, 2, 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe vertical ou horizontal de symétrie seulement
– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

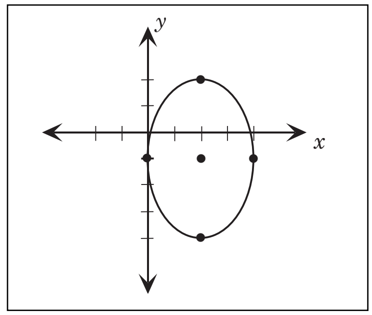
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **classer les sections coniques selon la forme (suite)**

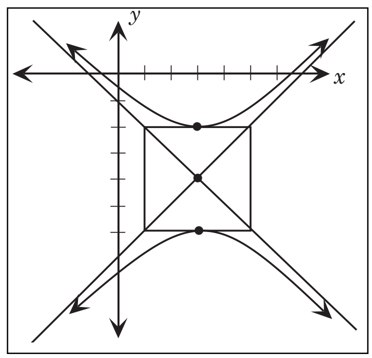
Exemple

Identifie les coniques suivantes à partir de leur forme :

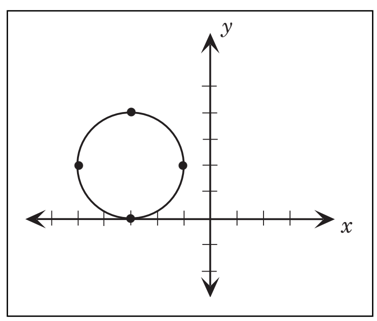
a)



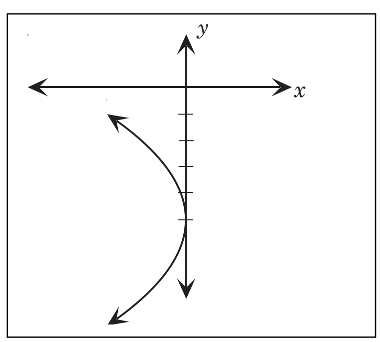
b)



c)



d)



– suite

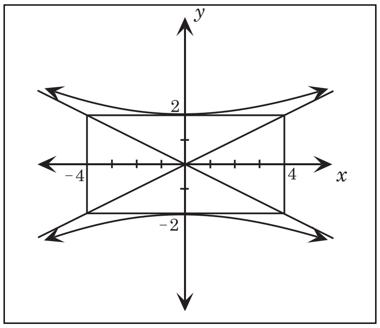
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

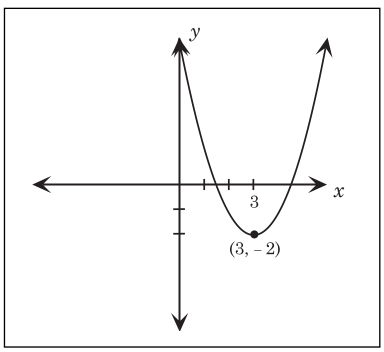
Calcul mental

Identifie les coniques à partir de leur graphique :

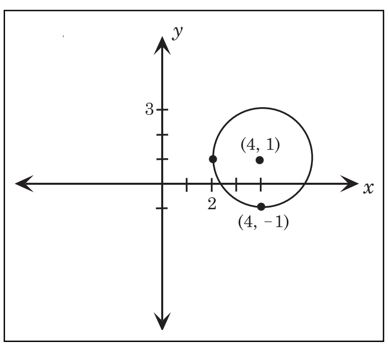
a)



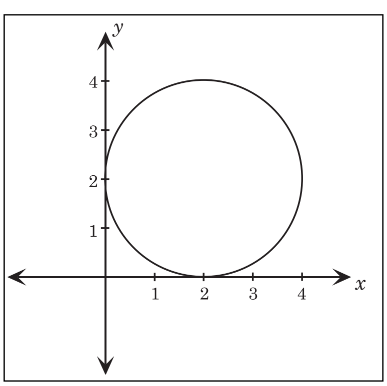
b)



c)



d)



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

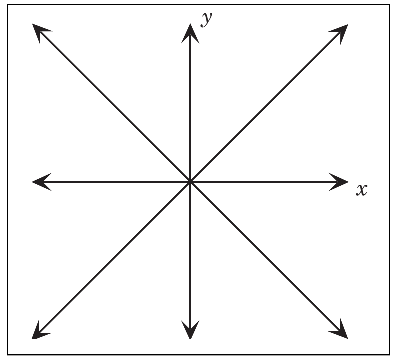
F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe vertical ou horizontal de symétrie seulement
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

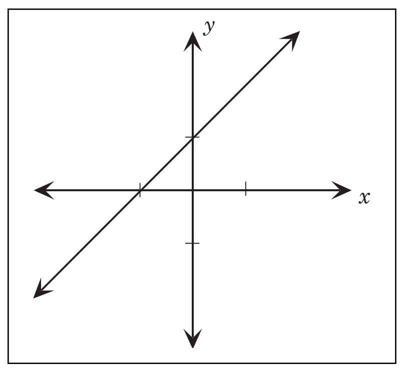
- classer les sections coniques selon la forme (suite)

Exemple – suite

e)



f)



Solution

a) ellipse

b) hyperbole

c) cercle

d) parabole

e) deux droites qui se coupent

f) une droite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe vertical ou horizontal de symétrie seulement
– *suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner la forme générale d'une conique**

La forme générale d'une conique est exprimée comme suit :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si $B \neq 0$, les axes de symétrie de la conique ne sont ni horizontaux ni verticaux. Dans cette unité, nous limiterons notre étude aux sections coniques où B = 0, soit aux équations de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

- **étudier l'effet sur la conique non dégénérée de la variation des valeurs de A, C, D, E et F**

Posons que ni A ni C n'est égal à 0. Par conséquent,
a) si A = C, l'équation définit un cercle.
b) si A et C ont le même signe, et si $A \neq C$, l'équation définit une ellipse.
c) si A et C ont des signes opposés, l'équation définit une hyperbole.
d) si A ou C = 0, l'équation définit une parabole.

Notez que certaines équations, notamment $x^2 + y^2 + 4 = 0$, ne sont vérifiées par aucune paire de nombres réels. Elles n'ont pas de graphique.

Certains logiciels qui permettent de tracer le graphique d'une équation accepteront des données de la forme $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Au moment de mettre sous presse, la plupart des calculatrices à affichage graphique acceptaient des entrées du type $y = f(x)$. Si les élèves ont accès à un logiciel graphique où ils peuvent utiliser des équations générales de conique, proposez-leur de s'exercer avec des équations telles que les suivantes :

a) $x^2 + y^2 + F = 0$. Pourquoi F doit-il être négatif pour qu'on obtienne un graphique? Que se passe-t-il si $|F|$ augmente?
b) $Ax^2 + 4y^2 - 36 = 0$. Posons A un nombre positif. Que se passe-t-il si $|A|$ augmente? Si $|A|$ devient très petit? Posons A un nombre négatif. Que se passe-t-il quand $|A|$ augmente? Quand $|A|$ diminue?
c) Répète ce que tu as fait en (*b*) avec la fonction $4x^2 + Cy^2 - 36 = 0$, en utilisant cette fois-ci différentes valeurs de C.
d) $x^2 - y^2 + k = 0$. Fais des essais avec des valeurs positives et négatives de k. Posons k un nombre très large et un nombre très petit. Que se passe-t-il si $k = 0$?
e) Si le logiciel graphique accepte les équations de la forme $x^2 + Bxy + y^2 - 1 = 0$, les élèves pourront faire des expériences avec diverses valeurs de B. On peut leur montrer que les sections coniques n'ont pas toujours des axes de symétrie parallèles à l'axe de coordonnées.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe vertical ou horizontal de symétrie seulement
– suite

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **classer un cercle selon l'équation générale**

  Quand A = C dans l'équation générale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, l'équation définit un cercle.

  Exemple

  Étant donné la forme générale de l'équation, identifie la conique et donne les valeurs de A, C, D, E et F :

  a) $x^2 + y^2 - 8 = 0$

  b) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y - 32 = 0$

  Solution

  a) cercle; A = 1, C = 1, D = 0, E = 0 et F = –8

  b) cercle; A = 2, C = 2, D = 4, E = –2 et F = –32

- **classer une ellipse selon l'équation générale**

  Quand A ≠ C et que A et C sont positifs dans l'équation générale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, l'équation définit une ellipse.

  Exemple

  Étant donné la forme générale de l'équation, identifie la conique et donne les valeurs de A, C, D, E et F.

  a) $x^2 + 49y^2 - 49 = 0$

  b) $4x^2 + 9y^2 - 3x + 2y = 0$

  Solution

  a) une ellipse; A = 1, C = 49, D = 0, E = 0, F = –49

  b) une ellipse; A = 4, C = 9, D = –3, E = 2, F = 0

- **classer une hyperbole selon l'équation générale**

  Quand A et C ont des signes opposés dans l'équation générale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, l'équation représente une hyperbole.

  Exemple

  Étant donné la forme générale de l'équation, identifie la conique et donne les valeurs de A, C, D, E et F :

  a) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

  b) $-3x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 2 = 0$

  Solution

  a) une hyperbole; A = 9, C = –4, D = 0, E = 0 et F = –36

  b) une hyperbole; A = –3, C = 3, D = –2, E = –12 et F = 2

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Identifie la section conique définie par les équations suivantes :

a) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

b) $y^2 - 2y - 9x^2 + 36x = 39$

c) $2x^2 + 4x - 9y + 20 = 0$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-1 classer les sections coniques selon la forme ou l'équation donnée sous la forme générale ou canonique - (carré complété) axe vertical ou horizontal de symétrie seulement
– suite

✔ **Communications** Résolution
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **classer une parabole selon l'équation générale**

Si A ou C égale zéro dans l'équation générale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, l'équation définit une parabole.

Exemple

Étant donné la forme générale de l'équation, identifie la conique et donne les valeurs de A, C, D, E et F :

a) $y^2 - 4x = 0$

b) $3x^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

Solution

a) parabole; A = 0, C = 1, D = –4, E = 0 et F = 0

b) parabole; A = 3, C = 0, D = –2, E = 5 et F = –3

F-2 convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique, et vice-versa

Communications Résolution
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

- **convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique**

Pour convertir une équation générale exprimée au second degré à la forme canonique, utilise la méthode de la complétion du carré.

Exemple

Convertis l'équation suivante à la forme canonique et identifie la section conique définie :

a) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 11$

b) $x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 33 = 0$

c) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$

d) $9x^2 - 24x + 72y + 16 = 0$

Solutions

a)
$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 8y) = 11$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 11 + 9 + 16$$
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$$

cercle

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit l'équation $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$; écris l'équation sous sa forme canonique.

2. Soit la conique dont l'équation est $5x^2 + 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$; écris l'équation sous sa forme canonique et trouve les coordonnées du centre.

3. Trouve le centre de l'hyperbole suivante :
   $9x^2 - 54x - 4y^2 - 16y + 101 = 0$.

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001
– Module 8, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-2 convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique, et vice-versa – *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique (suite)**

Exemple – suite

Solution (suite)

b)
$$(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 6y) = -33$$
$$(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 6y + 9) = -33 + 1 + 36$$
$$(x-1)^2 + 4(y+3)^2 = 4$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

ellipse

c)
$$4(x^2 - 2x) - (y^2 + 4y) = 16$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 16 + 4 - 4$$
$$4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 16$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

hyperbole

d)
$$9\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) = -72y - 16$$
$$9\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right) = -72y - 16 + 16$$
$$9\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -72y$$
$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -8y$$

parabole

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

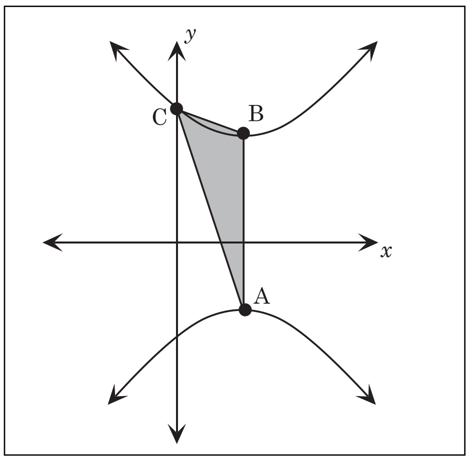
NOTES

Problèmes

1. Soit la parabole $x^2 + 8x - 2y + 26 = 0$; trouve la distance entre le sommet et l'origine.

2. L'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est πab. Trouve l'aire de l'ellipse d'équation $9x^2 + 4y^2 + 72x - 16y + 124 = 0$.

3. A et B sont les sommets de l'hyperbole $-x^2 + y^2 + 4y - 2x - 7 = 0$, et C est l'une des ordonnées à l'origine. Trouve l'aire du ΔABC.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-2 convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique, et vice-versa
– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **convertir une équation de la forme canonique à la forme générale**

  Pour transformer une équation du second degré de la forme canonique à la forme générale, il faut éliminer les dénominateurs et simplifier l'équation, en multipliant tous les facteurs et en regroupant les termes semblables.

  Exemple

  Convertis à la forme générale les équations suivantes et trouve les sections coniques définies :

  a) $\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

  b) $\dfrac{(x+3)^2}{25}-\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$

  c) $(x+3)^2+(y-2)^2=25$

  d) $(y-3)^2=-4(x+1)$

  Solution

  a) Ellipse

  $$\begin{aligned}\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}&=1\\ 16(x-4)^2+9(y+2)^2&=144\\ 16(x^2-8x+16)+9(y^2+4y+4)&=144\\ 16x^2-128x+256+9y^2+36y+36&=144\\ 16x^2+9y^2-128x+36y+148&=0\end{aligned}$$

  b) Hyperbole

  $$\begin{aligned}\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{16}&=1\\ 16(x+3)^2-25(y-4)^2&=400\\ 16(x^2+6x+9)-25(y^2-8y+16)&=400\\ 16x^2+96x+144-25y^2+200y-400&=400\\ 16x^2-25y^2+96x+200y-650&=0\end{aligned}$$

  c) Cercle

  $$\begin{aligned}(x+3)^2+(y-2)^2&=25\\ x^2+6x+9+y^2-4y+4&=25\\ x^2+y^2+6x-4y-12&=0\end{aligned}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trace le graphique de $y^2 - 12x - 4y + 40 = 0$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

F-2 convertir l'équation d'une section conique de la forme générale à la forme canonique, et vice-versa – *suite*

Communications — Résolution
✔ **Liens** — Raisonnement
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

• **convertir une équation de la forme canonique à la forme générale (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite

d) parabole

$$(y-3)^2 = -4(x+1)$$
$$y^2 - 6y + 9 = -4x - 4$$
$$y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$$

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

Communications — Résolution
✔ **Liens** — Raisonnement
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

• **utiliser la forme canonique de l'équation d'un cercle pour tracer et analyser son graphique**

La forme canonique de l'équation d'un cercle de rayon r centré à l'origine est :

$x^2 + y^2 = r^2$, où C(0, 0) et rayon = r

La forme canonique de l'équation d'un cercle transformé à partir de l'origine est :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, où C (h, k) et le rayon = r

Exemple

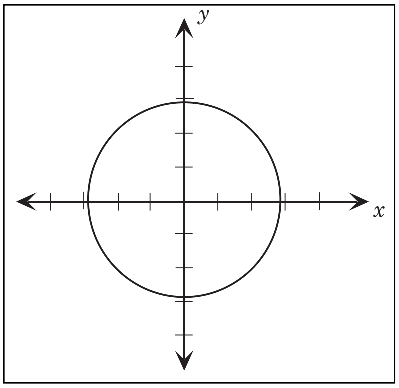
Soit les cercles suivants exprimés sous leur forme canonique; trace le graphique et donne le centre, le rayon, le domaine et l'image :

a) $x^2 + y^2 = 8$

b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

Solution

a)



Centre : C (0, 0)

Rayon : $r : 2\sqrt{2}$

Domaine : $\{-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}\}$

Image : $[-2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\ ]$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

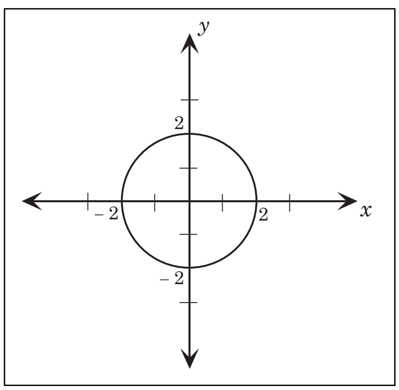
1. Trouve le centre du cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$.
2. Écris l'équation du cercle qui passe par l'origine et qui a son centre à (7, 0).
3. Identifie la section conique définie par l'équation suivante :
   $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 10 = 0$

Inscription au journal

Explique pourquoi l'équation d'un cercle est une relation du deuxième degré. Explique pourquoi l'équation est du deuxième degré et pourquoi ce n'est pas une fonction.

Problèmes

1. Trouve la longueur du segment de la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$ et le point (5, 12).
2. Si le cercle ci-dessous est étiré horizontalement d'un facteur de 2, quelle sera l'équation du graphique résultant?



3. Trouve la conique et donne 2 caractéristiques descriptives que tu peux déduire de l'équation $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.
4. Un cercle de centre (2, k) est tangent aux droites $y = -4$ et $y = 2$. Trouve les valeurs possibles de k.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– *suite*

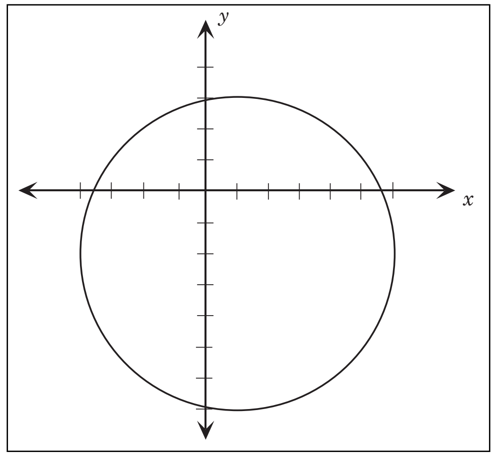
Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'un cercle pour tracer et analyser son graphique (suite)**

  Exemple – suite

  Solution – suite

b) 

Centre : C(1, –2)

Rayon : r : 5

Domaine : $\{-4 \leq x \leq 6\}$

Image : $\{-7 \leq x \leq 3\}$

- **résoudre des problèmes qui mettent en cause des cercles**

  Exemple

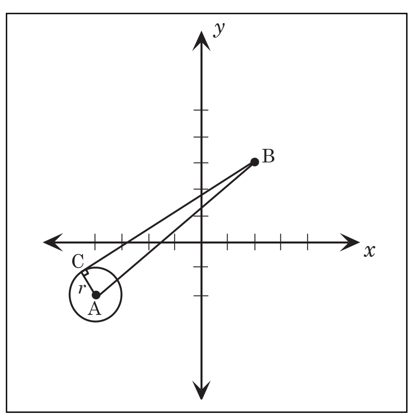
  Trouve la longueur du segment à partir du point (2, 3) au point qui est tangent au cercle d'équation $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

  Solution

  La distance entre le centre et le point (2, 3) est calculée comme suit :

$$\sqrt{(2+4)^2+(3+2)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$$

  La longueur du rayon est 1. Si on applique le théorème de Pythagore :



$(BC)^2 = (\sqrt{61}\,)^2 - 1^2 = 60$

Alors, $BC = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Un cercle est défini par l'équation $x^2 + y^2 + 8x - 12y + k = 0$. Trouve la valeur de k si le rayon est 7.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man. : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001
– Module 8, leçons 1 à 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique**

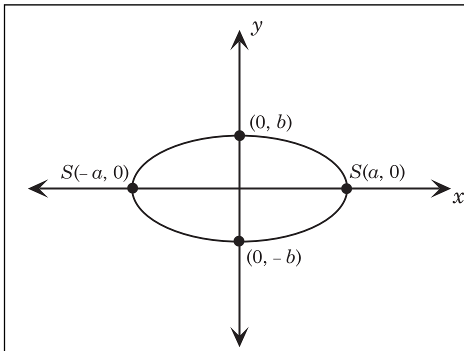
La forme canonique de l'équation d'une ellipse centrée à l'origine est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ où } a > b$$

Une ellipse a deux axes de symétrie. L'axe le plus long, qui lie les sommets entre eux, est appelé le ***grand axe***. Le plus petit est appelé le ***petit axe***. L'intersection du grand et du petit axe est le centre de l'ellipse.

La distance entre les sommets, soit la longueur du grand axe, est $2a$. La longueur du petit axe est $2b$ (a équivaut à la longueur du demi grand axe; b est la longueur du demi petit axe).

Si le grand axe est horizontal (axe des x) et que le centre est (0, 0), les coordonnées des sommets sont S(a, 0) et S($-a$, 0). Les extrémités du petit axe (axe des y) sont (0, b) et (0, $-b$).



Le grand axe est horizontal.

Figure 1

Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | Raisonnement | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Décris une façon de déterminer, à partir de l'équation canonique d'une ellipse, si le grand axe est vertical ou horizontal.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

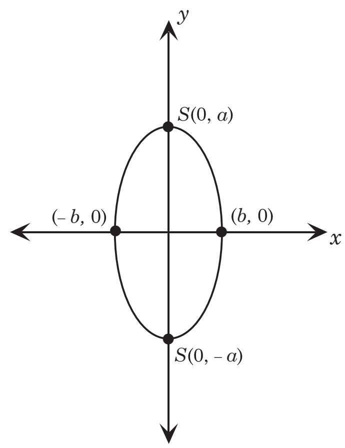
– *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Si le grand axe est vertical (axe des y) et que le centre est situé à (0, 0), les coordonnées des sommets sont S(0, a) et S(0, $-a$). Les extrémités du petit axe (axe des x) sont (b, 0) et ($-b$, 0).



Le grand axe est vertical.

Figure 2

La forme canonique de l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et dont le grand axe est l'axe des y est

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ où } a > b.$$

Exemple 1

Étant donné les ellipses suivantes, exprimées sous leur forme canonique, trace et analyse le graphique.

a) $\frac{x^2}{49} + y^2 = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Solution

a) Le grand axe est l'axe des x : $2a = 2 \cdot 7 = 14$.

Sommets : (±7, 0)

Centre : (0, 0)

Extrémités du petit axe : (0, ±1)

Domaine : [–7, 7]

Image : [–1, 1]

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Quelle est la longueur du grand axe de la conique
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$?

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

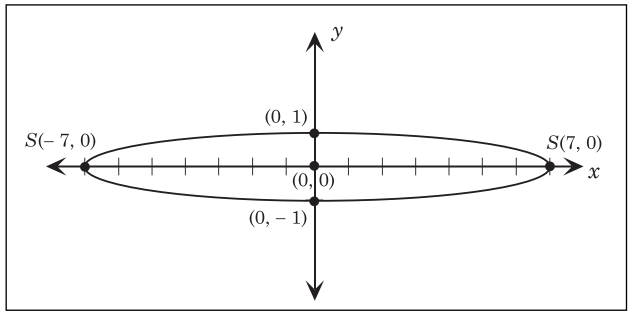
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite



b) Le grand axe est l'axe des y : $2a = 2 \cdot 5 = 10$

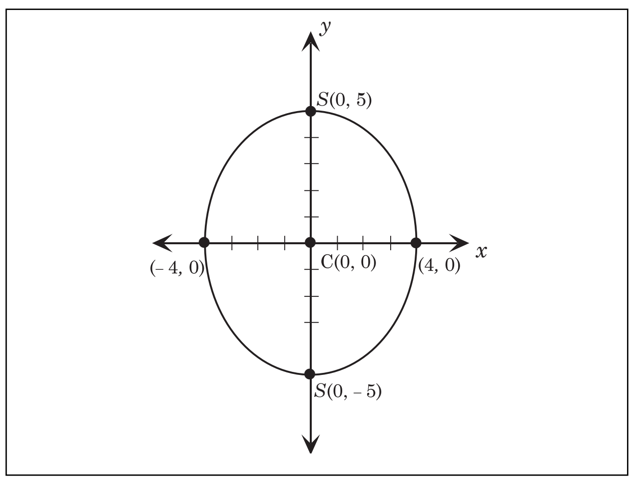
Sommets : (0, ±5)

Centre : (0, 0)

Extrémités du petit axe : (±4, 0)

Domaine : [–4, 4]

Image : [–5, 5]



Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | Raisonnement | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

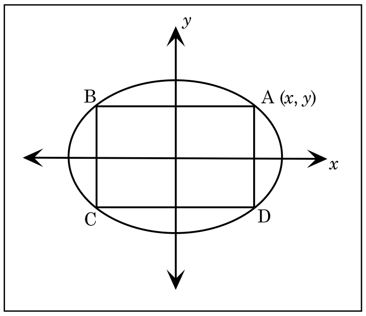
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Dans la figure ci-dessous, le rectangle ABCD est inscrit dans l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



   a) Démontre que l'aire du rectangle est $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$.
   b) Utilise un outil technologique pour trouver la valeur approximative de l'aire maximale au dixième près d'une unité au carré.

2. Trace le graphique des coniques suivantes et trouve les points d'intersection des graphiques de :

   $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

   $x^2 + 4y - 4 = 0$

3. Trace le graphique de $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$.

4. Trouve les coordonnées du ou des point(s) d'intersection de :

   $9x^2 + 2y^2 = 18$

   $3x + y = -3$

5. Détermine l'équation de l'ellipse $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$, après avoir effectué les transformations suivantes :
   a) translation de deux unités vers la droite;
   b) translation de trois unités vers le bas;
   c) étirement d'un facteur de deux le long de l'axe horizontal;
   d) étirement d'un facteur de ¼ le long de l'axe vertical.

6. a) Trace le graphique de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.
   b) Trouve l'aire du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection de l'ellipse avec les axes de coordonnées.
   c) Quelles sont les abscisses à l'origine de $4x^2 + 25y^2 = 100$?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique (suite)**

La forme canonique de l'équation d'une ellipse centrée à (h, k), avec des sommets à $(h \pm a, k)$ et un grand axe horizontal (parallèle à l'axe des x) est :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ où } a > b.$$

La forme canonique de l'équation d'une ellipse centrée à (h, k), avec des sommets à $(h, k \pm a)$ et un grand axe vertical (parallèle à l'axe des y) est :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \text{ où } a > b.$$

Remarque : Faites remarquer aux élèves que la lettre du numérateur au-dessus du plus grand dénominateur indique le grand axe.

Exemple 2

Posons les ellipses suivantes exprimées sous leur forme canonique. Trace le graphique de l'ellipse et indique le domaine, l'image, les longueurs du grand et du petit axe, les coordonnées des sommets et du centre, et trace son graphique :

a) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Solution

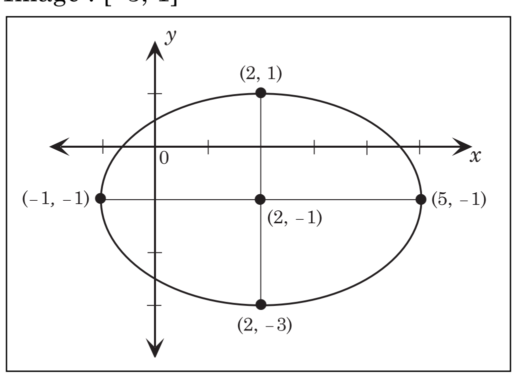
a) Centre : (2, –1)

Grand axe $2a = 6$ et petit axe $2b = 4$

Sommets : (5, –1) et (–1, 1)

Domaine : [–1, 5]

Image : [–3, 1]



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Quel type de conique est défini par l'équation suivante :

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1?$$

Problèmes

1. Trace et analyse le graphique de la conique définie par l'équation suivante :

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

2. Soit l'équation $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$; écris l'équation sous sa forme canonique et trace le graphique. Trouve les coordonnées du centre et des sommets.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

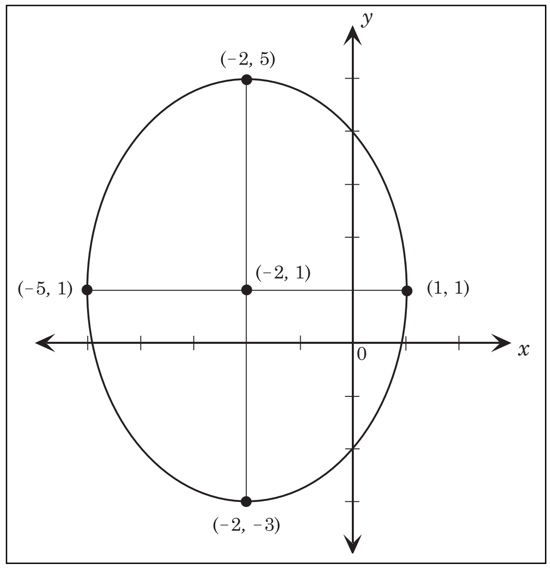
b) Centre : (2, –1)

Grand axe 2a = 8; petit axe 2*b* = 6

Sommets : (–2, 5) et (–2, 3)

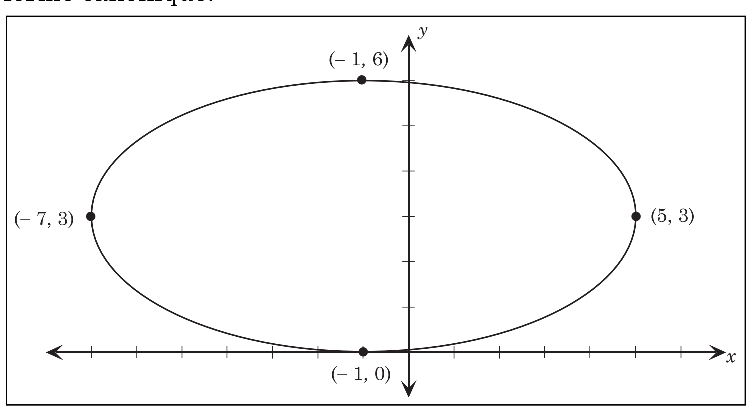
Domaine : [–5, 1]

Image : [–3, 5]



Exemple 3

Soit le diagramme suivant; écris l'équation de l'ellipse sous sa forme canonique.



Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | Raisonnement | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

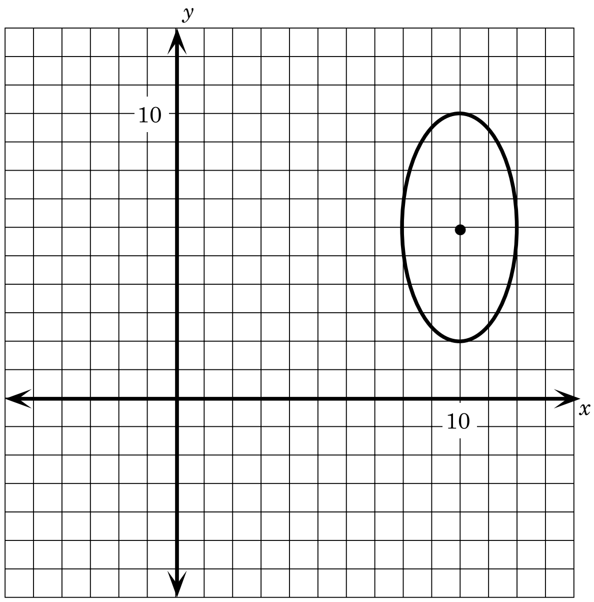
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Écris une équation qui définit l'ellipse illustrée ci-dessous.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une ellipse pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 3 – suite

Solution

L'axe horizontal étant parallèle à l'axe des x, sa forme est :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$2a = 12$ $\quad$ $2b = 6$

$a = 6$ $\quad$ $b = 3$

Le centre est le point milieu du grand ou du petit axe : C (–1, 3).

$$\therefore\ \frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique**

La forme canonique de l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine et dont l'axe horizontal est l'axe des x est :

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, où a n'est pas nécessairement plus grand que b.

Une hyperbole a deux axes : l'***axe transversal*** et l'***axe conjugué***, qui passe par le centre. L'axe transversal joint les sommets. L'axe conjugué est perpendiculaire à l'axe transversal et l'axe transversal ***n'est pas*** toujours plus long que l'axe conjugué.

Les lignes pointillées qui passent par le centre d'une hyperbole sont appelées les asymptotes de l'hyperbole. L'hyperbole se rapproche de plus en plus de ces asymptotes, mais ne les touchent jamais. L'axe transversal et l'axe conjugué définissent un rectangle dont les asymptotes sont les diagonales.

La longueur de l'axe transversal est $2a$. La longueur de l'axe semi-transversal est a. La longueur de l'axe conjugué est $2b$. La longueur de l'axe semi-conjugué est b.

Quand l'axe transversal est horizontal (par rapport à l'axe des x) et qu'il est centré à l'origine, C(0, 0), les coordonnées des sommets sont S(a, 0) et S($-a$, 0). Les extrémités de l'axe conjugué (axe des y) sont (0, b) et (0, $-b$).

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

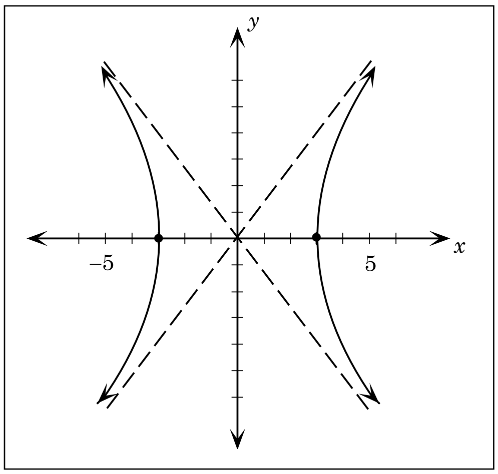
NOTES

Inscriptions au journal

1. Décris brièvement les différences entre l'équation canonique d'une hyperbole et l'équation canonique d'une ellipse.
2. Décris une façon de déterminer, à partir de l'équation canonique d'une hyperbole, si l'axe transversal est vertical ou horizontal.

Problèmes

1. Écris l'équation de l'hyperbole illustrée ci-dessous.



2. Décris la première équation comme un cercle, une parabole, une ellipse ou une hyperbole. Décris ensuite comment le graphique de la deuxième équation peut être obtenu à partir du graphique de la première.

   a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

   b) $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– *suite*

Communications | **✔ Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | Raisonnement | **✔ Technologie** | **✔ Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

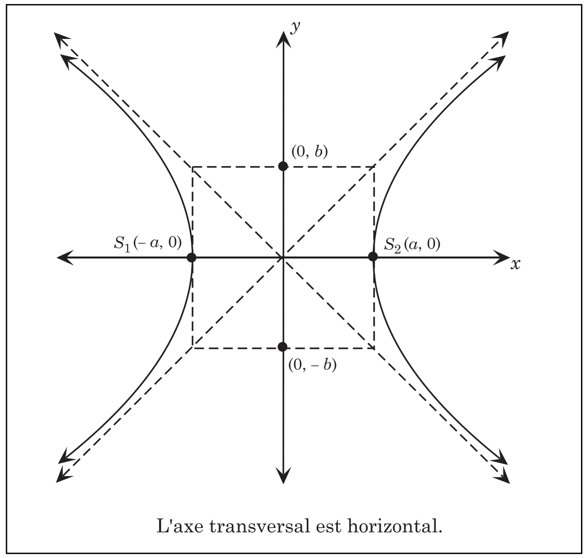


Figure 1

Quand l'axe transversal est vertical (axe des y) et que le centre est (0, 0), les coordonnées des sommets sont S(0, a) et S(0, –a). Les extrémités de l'axe conjugué (axe des x) sont (b, 0) et (–b, 0).

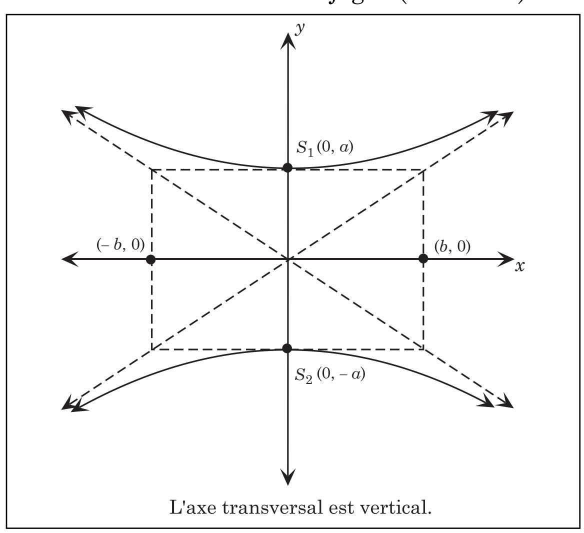


Figure 2

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouve les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de :
   $x^2 - y^2 = 16$
   $x + y = 5$

2. Trouve les sommets de la conique $y^2 - x^2 = 9$.

3. Trace le graphique de l'équation suivante et ajoute les asymptotes, si elles existent :
   $$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Voici la forme canonique de l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine et dont l'axe vertical est l'axe des y :

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, où a n'est pas nécessairement plus grand que b.

Exemple 1

Étant donné les hyperboles suivantes, exprimées sous leur forme canonique, trace et analyse leur graphique :

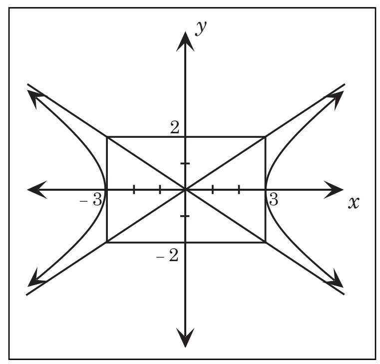
a) $4x^2 - 9y^2 = 36$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

Solution

a) $\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



Domaine :]–∞, –3] 4 [3, ∞[

Image : $\{y \in \Re\}$

Centre : (0, 0)

Sommets : (–3, 0) et (3, 0)

Longueur de l'axe transversal : 6

Longueur de l'axe conjugué : 4

Équation des asymptotes : Utilise l'équation de l'hyperbole et remplace la valeur de la constante par 0.

$4x^2 - 9y^2 = 36$ est remplacée par $4x^2 - 9y^2 = 0$. Trouve ensuite la valeur de y.

$$4x^2 - 9y^2 = 0$$
$$4x^2 = 9y^2$$
$$\pm 2x = 3y$$
$$y = \pm \frac{2}{3}x$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

1. a) Trace la courbe définie par l'équation $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

   b) Trouve les coordonnées des points A(x_1, 3) et B(x_2, 3) qui appartiennent à la courbe ci-dessus. Trouve la longueur de AB.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

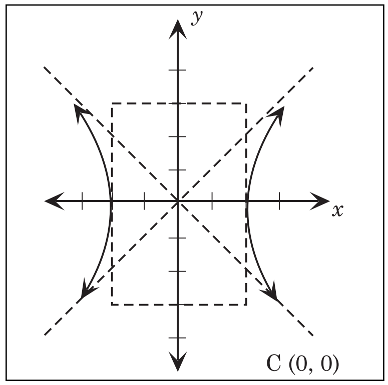
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

b)



Domaine :]–∞, –2] ∪ [2, ∞[

Image :]–∞, ∞[

Centre : (0, 0)

Sommets : (–2, 0) et (2, 0)

Longueur de l'axe transversal : 4

Longueur de l'axe conjugué : 6

Équation des asymptotes : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$

$$9x^2 - 4y^2 = 0$$

$$9x^2 = 4y^2$$

$$\pm\frac{3}{2}x = y$$

Voici la forme canonique de l'équation d'une hyperbole centrée à (h, k), dont les sommets se trouvent à $(h \pm a, k)$ et dont l'axe transversal est horizontal (parallèle à l'axe des x) :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Voici la forme canonique de l'équation d'une hyperbole centrée à (h, k), dont les sommets se trouvent à $(h, k \pm a)$ et dont l'axe transversal est vertical (parallèle à l'axe des y) :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Remarque : Soulignez aux élèves que le dénominateur du terme positif contient a^2 et que la lettre dans le numérateur indique l'axe transversal.

Exemple 2

Étant donné les hyperboles suivantes, exprimées sous leur forme canonique; trace le graphique et donne le centre :

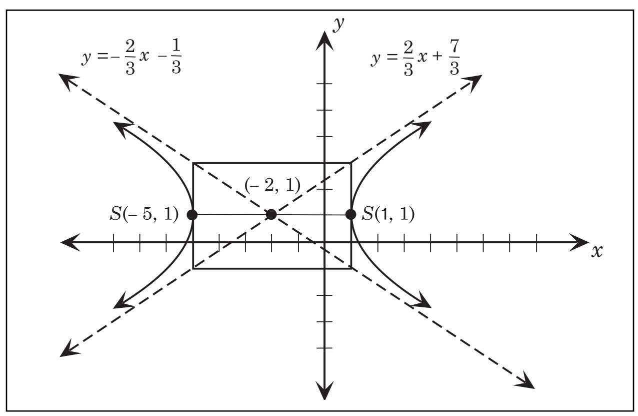
a) $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

b) $-\dfrac{(x+3)^2}{1} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

Solution

a) Il s'agit de la forme canonique d'une hyperbole centrée à (–2, 1). Étant donné que $a^2 = 9$, $a = 3$ et les sommets sont situés à trois unités du centre, à (–5, 1) et (1, 1).

Pour tracer le graphique d'une hyperbole, il faut tout d'abord tracer un rectangle de 6 sur 4 centré à (–2, 1), tel qu'illustré. Trace les asymptotes en prolongeant les diagonales, puis trace les branches.



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace l'hyperbole d'équation $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y-8)^2}{64} = 1$ et trouve les équations des asymptotes.

2. Trouve les équations des asymptotes de $16x^2 - 9y^2 - 32x - 54y - 209 = 0$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– *suite*

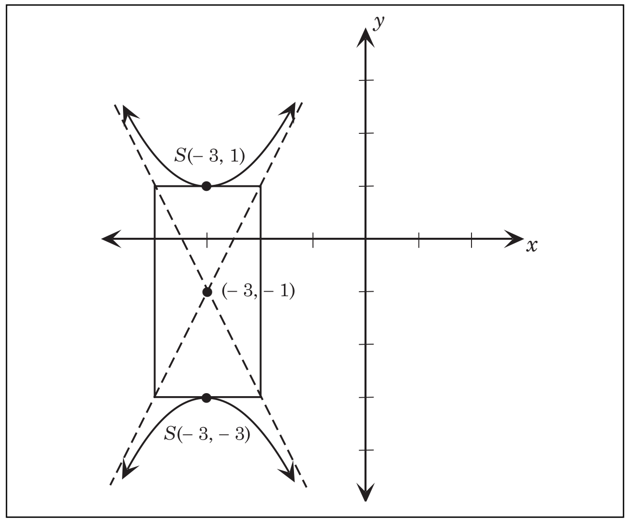
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 2 – suite

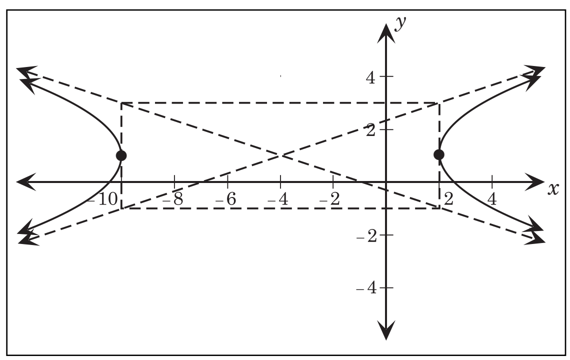
Solution – suite

b)



Exemple 3

Soit le graphique ci-dessous; écris l'équation de la conique sous sa forme canonique.



Solution

Le centre de l'hyperbole, (h, k), est (–4, 1). Le terme en y étant négatif, l'axe transversal est horizontal.

Étant donné que $2a = 12$, $a = 6$. Par conséquent, les coordonnées des sommets se trouvent à 6 unités vers la gauche et à 6 unités vers la droite du centre, (–4, 1).

$$(-4 - 6, 1) = (-10, 1)$$

$$(-4 + 6, 1) = (2, 1)$$

– *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique de l'équation d'une hyperbole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 3 – suite

Solution – suite

Étant donné que $2b = 4$, $b = 2$. Par conséquent, les extrémités de l'axe conjugué se trouvent à 2 unités au-dessus et à 2 unités au-dessous du centre (–4, 1).

$$(-4,\ 1 + 2) = (-4,\ 3)$$
$$(-4,\ 1 - 2) = (-4,\ -1)$$

L'équation est : $\dfrac{(x+4)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$.

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique**

La forme canonique de l'équation d'une parabole dont le sommet se trouve à l'origine et dont l'axe de symétrie est vertical est $y = ax^2$. L'axe est l'axe des y et le sommet se trouve à (0, 0).

Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut (figure 1).

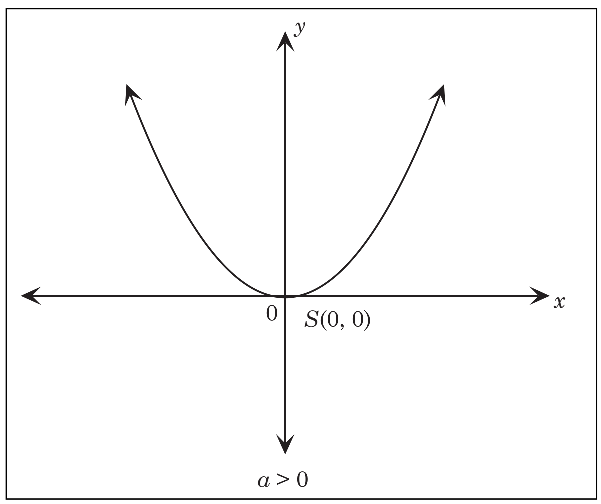


Figure 1

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Pour trouver les coordonnées en x du sommet d'une parabole, il faut appliquer la formule $x = \frac{-b}{2a}$. Trouve la coordonnée en x du sommet de $y = 2x^2 - 3x - 5$.
2. Trouve la conique définie par $5y^2 + 8x - 17y - 35 = 0$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas (figure 2).

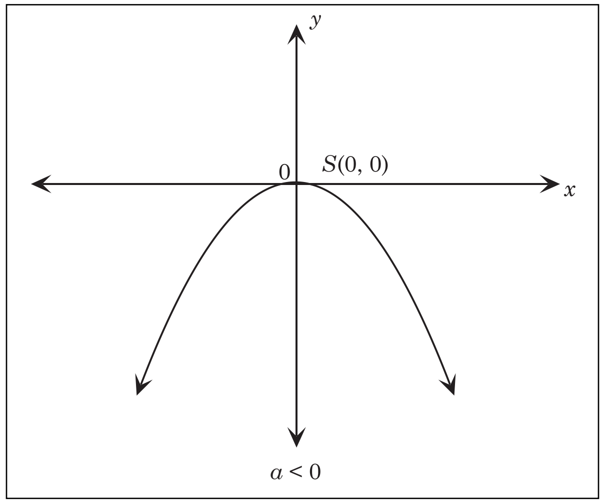


Figure 2

La forme canonique de l'équation d'une parabole dont le sommet se trouve à l'origine et dont l'axe de symétrie est horizontal est $x = ay^2$. L'axe est l'axe des x et le sommet se trouve à (0, 0).

Si $a > 0$, la parabole s'ouvre vers la droite (figure 3).

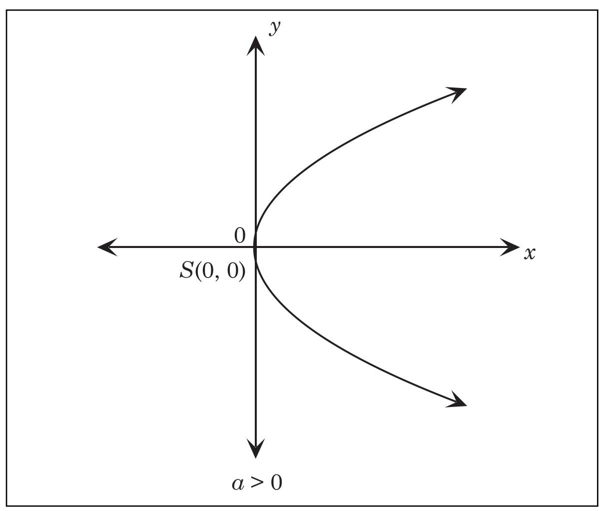


Figure 3

Communications	Résolution
✔ **Liens**	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Explique pourquoi $x = ay^2$ n'est pas une fonction. Comment peux-tu tracer le graphique de $x = ay^2$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique?
2. Comment peux-tu déterminer dans quel sens une parabole s'ouvre en examinant son équation?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– suite

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Si $a < 0$, la parabole s'ouvre vers la gauche (figure 4).

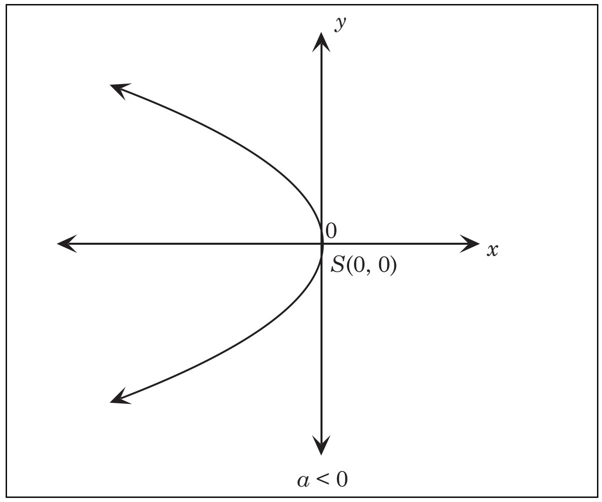


Figure 4

Exemple 1

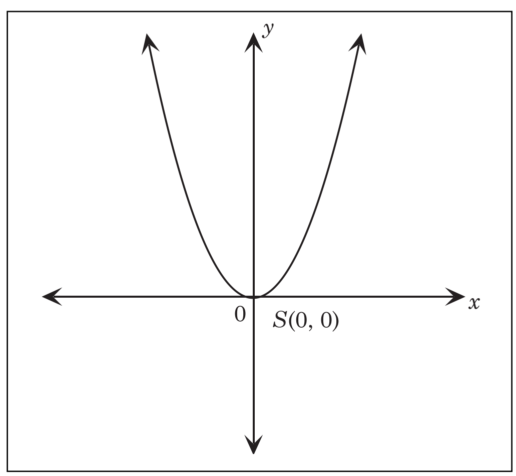
Soit l'équation d'une conique sous sa forme canonique; trace son graphique.

a) $y = 4x^2$

b) $x = -4y^2$

Solution

a)



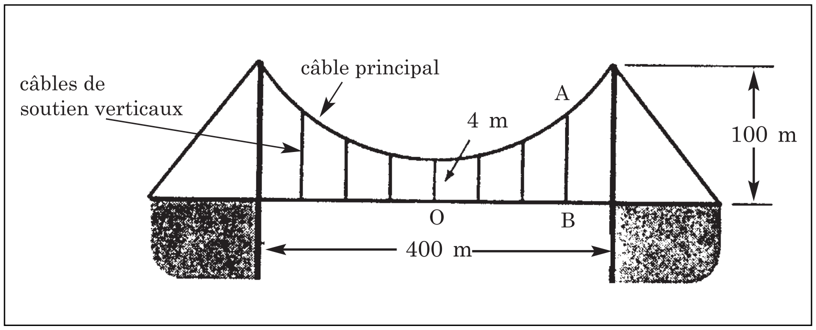
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Un pont de 400 m de long est soutenu par un câble principal de forme parabolique, dont l'équation est $y = ax^2 + 4$. Aux extrémités, le câble principal se trouve à 100 m au-dessus du pont et, au centre, il est à 4 mètres au-dessus du pont, comme l'illustre la figure. Sept câbles de soutien verticaux sont installés à des intervalles égaux tout le long du pont.



a) Construis un système de coordonnées dont l'origine se trouve à 0 et dont l'axe des x représente le pont.

b) Trouve la valeur de « a » dans l'équation $y = ax^2 + 4$.

c) Quelle distance sépare chacun des câbles de soutien verticaux?

d) Trouve la longueur du câble AB.

e) Trouve la longueur totale des sept câbles de soutien verticaux.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

– *suite*

Communications	Résolution
✔ **Liens**	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

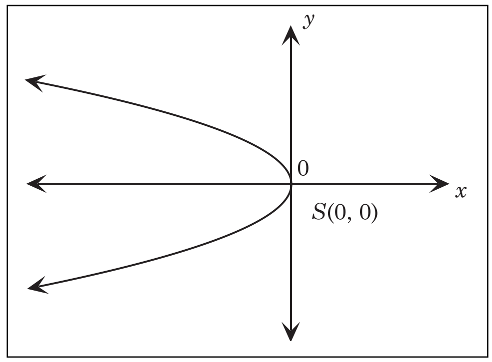
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

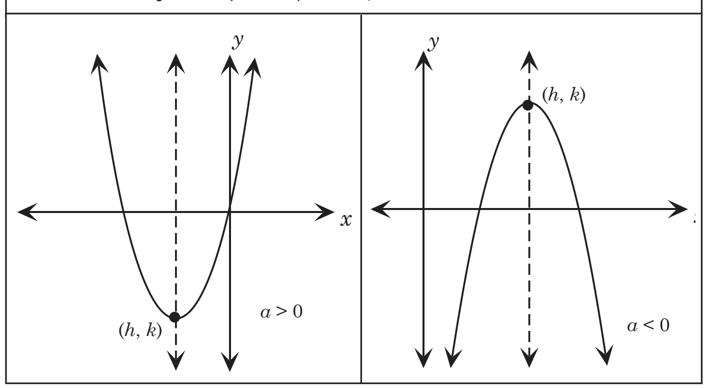
b)



Les fonctions quadratiques de la forme $f(x) = a(x - h)^2 + k$, où a est un nombre réel quelconque sauf 0, et où (h, k) est le sommet, représentent une translation du graphique de $y = ax^2$.

L'équation quadratique $y = a(x - h)^2 + k$ est la forme canonique d'une parabole dont l'axe de symétrie est vertical.

$\boldsymbol{y = a(x - h)^2 + k}$**, où** $\boldsymbol{a \neq 0}$



La forme canonique d'une parabole qui a un axe de symétrie ***horizontal*** est $x = a(y - k)^2 + h$.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Écris l'équation de la parabole qui a toutes les caractéristiques suivantes : axe de symétrie = 2; sommet sur l'axe des y, passe par le point (1, 2).
2. Trouve l'aire du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

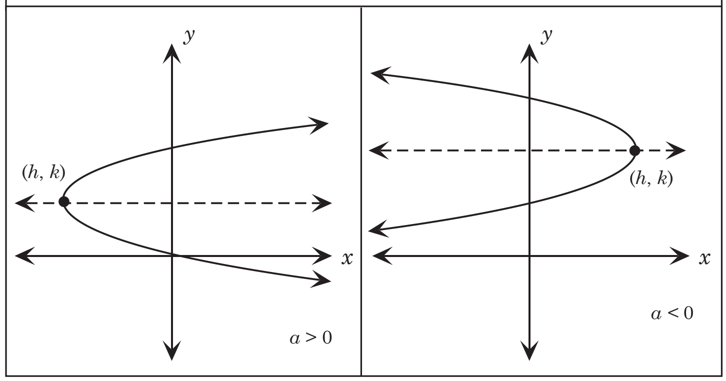
– *suite*

Communications | Résolution
✔ **Liens** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

$x = a(y - k)^2 + h$, où $a \neq 0$



Exemple 2

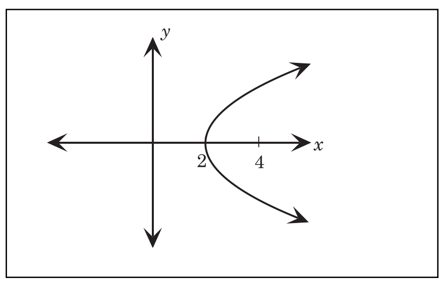
Soit les paraboles suivantes sous leur forme canonique; trace et analyse leur graphique.

a) $y^2 = x - 2$

b) $(x + 3)^2 = -2(y - 1)$

Solution

a)

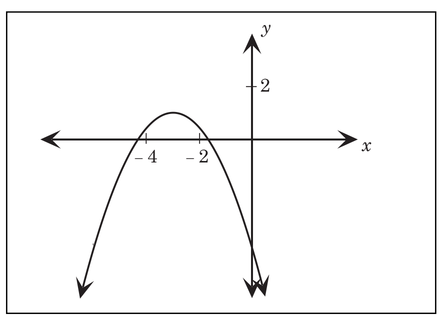


Sommet : (2, 0)

Domaine : [2, ∞[

Image :]–∞, ∞[

b)



Sommet : (–3, 1)

Domaine :]–∞, ∞[

Image :]–∞, 1]

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Décris la première équation comme un cercle, une parabole, une ellipse ou une hyperbole. Ensuite, indique comment le graphique de la deuxième équation peut être obtenu à partir du graphique de la première.

a) $x^2 = 8y$

b) $(x - 3)^2 = 8\ (y + 4)$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

F-3 tracer le graphique des sections coniques et l'analyser par rapport :
- au domaine et à l'image;
- aux asymptotes, si elles existent;
- le centre;
- aux sommets;
- aux axes de symétrie.

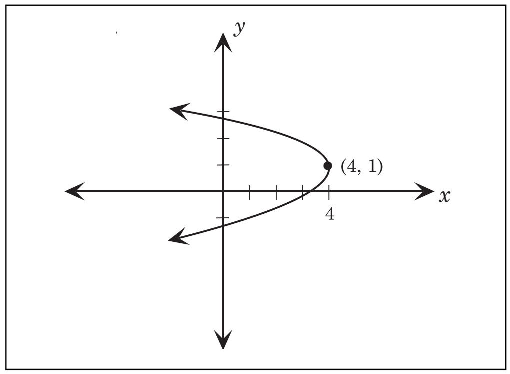
Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser la forme canonique d'une équation d'une parabole pour tracer et analyser son graphique (suite)**

Exemple 3

Écris l'équation de la parabole illustrée dans la figure ci-dessous.



Solution

$x = -(y - 1)^2 + 4$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Décris la première relation comme un cercle, une parabole, une ellipse ou une hyperbole. Explique comment le graphique de la deuxième relation peut être obtenu à partir du graphique de la première.

a) $x^2 = 16y$ $\quad\quad$ $(x - 3)^2 = 16(y + 2)$

b) $\dfrac{x}{16} + \dfrac{y^2}{49} = 1$ $\quad\quad$ $\dfrac{(x + 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 2)^2}{49} = 1$

Annexe F-1

Exercice d'algèbre

- **utilise la notation fonctionnelle pour évaluer les fonctions**

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{3x}$, trouve :

a) $f(4)$

b) $g(-2)$

c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

d) $h(3)$

e) $g(h(27))$

f) $g(f(0))$

Solutions

a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$

b) $g(-2) = \frac{1}{-2}$

c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$

e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \frac{1}{9}$

f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \frac{1}{2}$

- **décomposer en facteurs des trinômes qui sont des carrés parfaits**

  Exemple

  Décompose complètement en facteurs :

  a) $x^2 - 2x + 1$
  b) $x^2 + 6x + 9$
  c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

  Solution

  a) $(x-1)^2$
  b) $(x+3)^2$
  c) $(x-\sqrt{2})^2$

- **compléter le carré**

  Exemple

  Pour quelles valeurs de k le trinôme est-il un carré parfait?

  a) $x^2 - 10x + k$
  b) $x^2 + 12x + k$
  c) $x^2 + 3x + k$

  Solution

  a) 25
  b) 36
  c) $\frac{9}{4}$

Annexe F-2

Organigramme

Coniques

Cercle

Équation générale

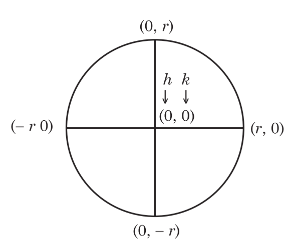
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Équation canonique

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(h, k) sont les coordonnées du centre

r est le rayon



Parabole

Équation générale

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

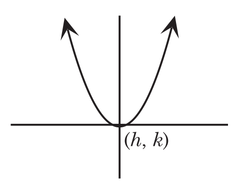
$By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Équation canonique

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

(h, k) sont les coordonnées du sommet



Ellipse

Équation générale

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $A \neq C$

Équation canonique

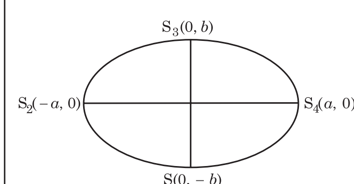
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(h, k) sont les coordonnées du centre

« a » unités dans la direction x

« b » unités dans la direction y



Hyperbole

Équation générale

$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Équation canonique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

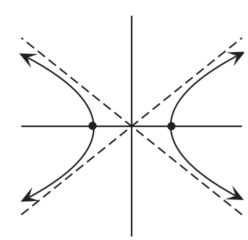
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

(h, k) sont les coordonnées du centre

sommets — dans le sens du terme positif

pente à l'asymptote $= \pm\dfrac{b}{-a}$



Similarités et différences

Annexe F-3

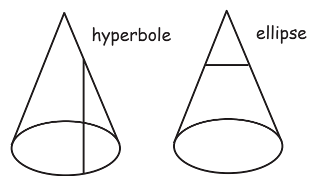
S I M I L A R I T É S

D I F F É R E N C E S

Similarités entre *l'Hyberbole* et *l'Ellipse*

- ce sont des sections coniques
- ce ne sont pas des fonctions
- elles ont un centre
- elles ont des sommets

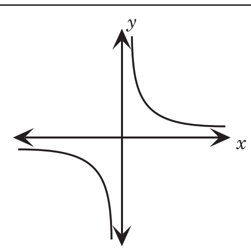
Diagramme

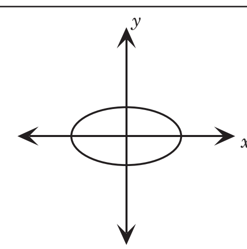


Différences entre *l'Hyberbole* et *l'Ellipse*

➢ elle a des asymptotes ➢ $c > a$ ➢ soustraction de termes	➢ elle n'a pas d'asymptotes ➢ $c < a$ ➢ addition de termes

Diagramme





Énonce les similarités et les différences entre les deux termes, les concepts ou les événements.

Bien que l'hyperbole et l'ellipse soient toutes deux des sections coniques, l'hyperbole a des asymptotes alors que l'ellipse n'en a pas.

Autres applications de ce cadre :

Permutations par rapport à combinaisons
Fonction inverse par rapport à fonction réciproque
Étirement horizontal par rapport à compression horizontal

Similarités et différences (Compare and Contrast Frame) : Utilisés avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Développement du concept selon Frayer

Annexe F-4

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles — Toujours

- termes x^2 et y^2 positifs
- coefficients toujours différents

Caractéristiques non essentielles — Parfois

- $(x - h)^2$ et $(y - k)^2$

Caractéristiques non pertinentes — Jamais

- termes x^2 et y^2 négatifs
- jamais les mêmes coefficients

Sujet - Concept

Ellipse

Exemples

Trace le graphique de :

$$25x^2 + 9y^2 - 200x + 18y + 184 = 0$$

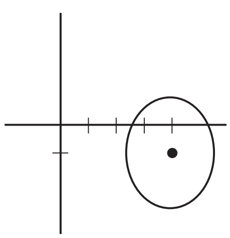
$$25x^2 - 200x + \_\_\_ + 9y^2 + 18y + \_\_\_ + 184 = 0$$

$$25(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 + 2y + 1) + 184 - 400 - 9 = 0$$

$$25(x-4)^2 + 9(y+1)^2 = 225$$

$$\frac{(x-4)^2}{3^3} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$$

$$c = (4, -1)$$



Exemples non pertinents

Trace le graphique de :

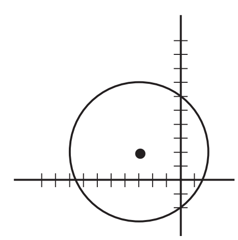
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 12 - 9 - 4 = 0$$

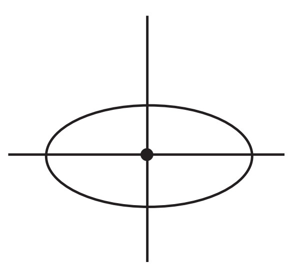
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

$$c = (-3, 2)$$

$$r = 5$$



Trace un graphique ou un diagramme



Définition

Une ellipse est l'ensemble de tous les points d'un plan tel que la ***somme*** des distances à 2 points fixes, soit F et F', est une constante ($2a$).

Développement du concept Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Unité G
Calcul des probabilités

CALCUL DES PROBABILITÉS

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- définissent des espaces d'échantillon pour calculer la probabilité de réalisation d'événements simples et multiples;
- étudient le rôle des lois de probabilités pour résoudre des problèmes de calcul des probabilités;
- font la différence entre des événements dépendants et indépendants, puis déterminent les probabilités de réalisation;
- résolvent des problèmes en déterminant les probabilités de réalisation d'événements mutuellement exclusifs et complémentaires;
- apprennent à reconnaître les problèmes de calcul des probabilités conditionnelles et déterminent les probabilités de réalisation;
- résolvent des problèmes de calcul des probabilités à l'aide de techniques de dénombrement par permutations et par combinaisons.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- de reconnaître l'importance de la définition des espaces d'échantillon;
- d'apprendre à lire les problèmes attentivement pour y reconnaître des concepts tels que les événements uniques, les événements multiples, les événements mutuellement exclusifs, les événements conditionnels et les événements complémentaires;
- d'établir les liens entre les techniques de dénombrement par permutations et par combinaisons et la résolution de problèmes de calcul des probabilités;
- d'effectuer des activités appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe G-1) :
- les fractions complexes

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

Durée

- 15 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Modéliser la probabilité de réalisation d'un événement composé et résoudre des problèmes en combinant des probabilités plus simples.

Résultat(s) d'apprentissage spécifiques(s)

G-1 définir un espace échantillonnal pour deux ou trois événements

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes G-2 à G-5, p. G-32 à G-35).

- **rappeler la définition de la probabilité classique**

  La probabilité qu'un événement A se produise est le rapport du nombre de résultats de l'événement A au nombre total de résultats possibles.

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n} \text{ où}$$

  $P(A)$ correspond à la probabilité d'un événement A

  $n(A)$ correspond au nombre de fois où l'événement A se réalise

  n correspond au nombre total de résultats possibles

- **définir un espace échantillonnal**

  Un espace échantillonnal est l'ensemble de tous les résultats possibles. Quand un dé non truqué est lancé 1 fois, le nombre total de résultats possibles est 6 (soit 1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

  Pour calculer la probabilité d'obtenir un deux, il faut poser $n(2) = 1$ et $P(2) = \frac{1}{6}$.

  On peut utiliser un diagramme de Venn pour illustrer qu'on peut obtenir 1 résultat favorable sur 6.

4	3	1
5	6	2

Exemple 1

Définis l'espace échantillonnal du lancer d'un dé à six faces et d'une pièce de monnaie.

Solution

L'espace échantillonnal est {(1, F) (2, F) (3, F) (4, F) (5, F) (6, F) (1, P) (2, P) (3, P) (4, P) (5, P) (6, P)}.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Combien trouve-t-on d'éléments dans l'espace échantillonnal suivant :

a) le lancer de deux pièces de monnaie?

b) le lancer de deux dés ordinaires?

Problèmes

1. Dessine le diagramme de l'espace échantillonnal du lancer de deux dés à cinq faces.
2. Utiliser un diagramme en arbre pour illustrer l'espace échantillonnal du sexe de trois enfants.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un trois ou un cinq si on lance un dé une seule fois?
4. Quelle est la possibilité de tirer un as ou une reine de cœur dans un paquet de 52 cartes?
5. Quelle est la probabilité de tirer un cinq avec un dé et d'obtenir le côté face d'une pièce de monnaie?
6. Quelle est la probabilité que deux enfants d'une famille soient des filles?
7. Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge puis une carte noire d'un paquet de 52 cartes si la première carte n'est pas replacée avant de tirer la deuxième?
8. Un entraîneur d'athlétisme achète trois chronomètres. Si 1 chronomètre sur 200 est défectueux, quelle est la probabilité que les 3 nouveaux chronomètres soient défectueux?

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 6, leçons 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

G-1 construire un espace échantillonnal pour deux ou trois événements
– suite

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

• **construire un espace échantillonnal (suite)**

Exemple 2

Illustre l'espace échantillonnal correspondant à la situation suivante : Un autobus doit arriver à la gare entre 7 h 05 et 7 h 15 inclusivement. Un train doit arriver entre 7 h 11 et 7 h 17 inclusivement. L'arrivée d'un autobus à 7 h 06 et d'un train à 7 h 14 est représentée par le point (6, 14). Le temps est exprimé en minutes entières.

a) Combien de points l'espace échantillonnal contient-il?

b) En combien de points l'autobus et le train arrivent-ils en même temps?

c) En combien de points l'autobus arrive-t-il après le train?

d) Quelle est la probabilité que l'autobus arrive après le train?

Solution

a) $11 \times 7 = 77$

b) (11, 11) (12, 12) . . . (15, 15) représentent 5 points

c) $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

d) $\frac{10}{77}$

G-2 résoudre des problèmes de calcul des probabilités d'événements indépendants et d'événements dépendants

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et	Technologie
Calcul Mental	Visualisation

• **expliquer les types d'événements**

Il y a deux types d'événements :

1. Un ***événement unique*** est constitué d'un espace échantillonnal qui ne peut être décomposé en des événements plus simples.
2. Un ***événement composé*** est constitué de deux événements ou plus.

Exemple

Si on lance un dé honnête, trouve la probabilité d'obtenir :

a) le nombre deux

b) un nombre pair

Solution

Quand on lance un dé, l'espace échantillonnal est constitué de l'ensemble $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Pour évaluer la probabilité d'obtenir un deux, tu poses l'ensemble des événements {2}. Il s'agit d'un événement simple où $P(2) = \frac{1}{6}$

b) Quand on évalue la probabilité d'obtenir un nombre pair, l'ensemble des événements comporte {2, 4, 6}, et on peut le décomposer en événements simples {2}, {4} et {6}. Il s'agit d'un événement composé, où $P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un deux ou un trois si on lance un dé à six faces une seule fois?
2. On tire une carte d'un paquet de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte soit un as rouge?
3. Tu choisis une carte dans un paquet de 52. Quelle est la probabilité d'obtenir une reine ou un trèfle?
4. Si on lance trois pièces de monnaie, quelle est la probabilité que chacune tombe sur le côté face?
5. Quatre autobus quittent Winnipeg pour arriver à Toronto au même moment. Si Marie a pris l'autobus n^{o} 803, quelle est la probabilité que Tom ait pris le même autobus?
6. Si une seule carte est choisie dans un paquet de 52, quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou une carte rouge?
7. Les nombres un à treize sont écrits sur treize feuilles de papier différentes. On choisit une de ces feuilles au hasard. Quelle est la probabilité que le nombre soit pair?
8. On choisit une balle au hasard dans une boîte qui contient six balles rouges, quatre balles blanches et trois balles bleues. Quelle est la probabilité que la balle choisie soit rouge?

Inscription au journal

Explique ce que signifient deux événements dépendants.

Problème

Rupert boit habituellement du lait ou du lait au chocolat pour son petit déjeuner, avec des crêpes ou du gruau. S'il boit du lait, alors la probabilité qu'il choisisse les crêpes est de deux sur trois. La probabilité qu'il boive du lait au chocolat est estimée à $\frac{1}{5}$. S'il boit du lait au chocolat, la probabilité qu'il mange des crêpes est de $\frac{6}{7}$.

a) Illustre l'espace échantillonnal des probabilités à l'aide d'un diagramme en arbre ou de toute autre méthode de ton choix.

b) Trouve la probabilité que Rupert mange du gruau et qu'il boive du lait au chocolat demain matin.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 7, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-2 résoudre des problèmes de calcul des probabilités d'événements indépendants et d'événements dépendants *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les lois de probabilités applicables aux événements composés**

Le lien entre un événement composé et ses composantes sont appelées les ***lois de probabilités***.

Loi d'addition (probabilités « ou »)
P(A ou B) = P(A) + P(B) - P(A et B)

Exemple 1

Si on lance une fois un dé honnête, trouve la probabilité d'obtenir un nombre pair ou un nombre premier.

Solution

A = {nombres pairs} = {2, 4, 6} et

B = {nombres premiers} = {2, 3, 5}

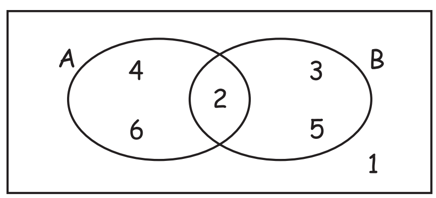
Par conséquent, {A ou B} = {2, 3, 4, 5, 6}. Ainsi, $P(A \text{ ou } B) = \frac{5}{6}$.

Si tu appliques la loi d'addition :

$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Remarque : Tu dois soustraire P(A et B) parce que le chiffre deux est à la fois pair et premier. Ainsi, il a été compté deux fois.

Un diagramme de Venn nous permet d'expliquer ce concept.



L'événement ***pair ou premier*** comprend tous les points dans le cercle A et dans le cercle B. Le chiffre deux se trouve dans l'intersection des cercles. Par conséquent, il a été inclus dans les calculs relatifs à $P(A)$ et à $P(B)$.

Loi de multiplication (probabilités « et »)
$\boldsymbol{P(A \text{ et } B) = P(A) \cdot P(B|A)}$

Remarque : $P(B|A)$ est la probabilité qu'un événement B se réalise après la réalisation d'un événement A. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle parce que le fait de savoir que A s'est produit nous donne une information additionnelle, ou une condition, que nous utiliserons pour calculer la probabilité de réalisation de l'événement B.

– suite

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Quelle est la probabilité d'obtenir un deux ou un trois quand on lance une fois un dé à huit faces, numérotées de un à huit?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-2 résoudre des problèmes de calcul des probabilités d'événements indépendants et d'événements dépendants *– suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les lois de probabilités applicables aux événements composés (suite)**

Exemple 2

Si on lance deux dés, trouve la probabilité que la somme soit paire et supérieure à dix.

Bien entendu, le seul résultat favorable est d'obtenir deux fois un six. La probabilité que cela se réalise est de $\frac{1}{36}$. Cependant, on peut résoudre ce problème en appliquant la théorie des événements composés, comme il est illustré dans les deux solutions ci-dessous.

Solution 1

$P(\text{paire et} > 10) = P(\text{paire}) \cdot P(> 10 \mid \text{paire})$

$= \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$

Remarque : L'espace échantillonnal de $P(> 10 \mid \text{paire})$ est réduit de 36 à 18 points, étant donné que tu sais que la somme est paire et qu'il peut y avoir seulement 18 sommes paires.

Solution 2

$P(\text{paire ou} > 10) = P(\text{paire}) + P(> 10) - \text{P}(\text{paire et} > 10)$

$$= \frac{18}{36} + \frac{3}{36} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{1}{36}$$

- **expliquer des événements indépendants**

Les événements A et B sont indépendants si la probabilité que A se produise n'est pas influencée par la probabilité que B se produise.

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A) = P(A \mid B)$ ou $P(B) = P(B \mid A)$.

Ainsi, la réalisation d'un événement B n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation d'un événement A.

On peut classer les événements selon qu'ils sont dépendants ou indépendants :

1. Les lancers d'une pièce de monnaie ou d'un dé sont indépendants.
2. Les tirages de deux cartes dans un paquet (si on ne replace pas la première carte tirée) ne sont pas des événements indépendants (ils sont dépendants) étant donné que le tirage de la deuxième carte a un espace échantillonnal de 51 et non de 52.

Remarque : Les élèves devraient comprendre que les événements sont dépendants s'il n'y a pas de remise, et qu'ils sont indépendants s'il y a remise.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

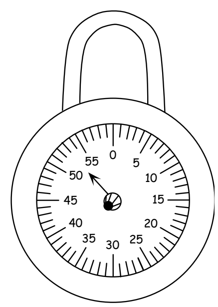
Un pot contient cinq billes rouges et sept billes bleues. Quelle est la probabilité de choisir deux billes bleues en succession si la première n'est pas remise dans le pot?

a) 0,090 b) 0,340

c) 0,318 d) 0,292

Problèmes

2. Tim, l'ami de Suzanne, semble soucieux. Quand elle lui demande ce qui ne va pas, Tim lui répond qu'il doit ouvrir le cadenas sur son casier et changer de vêtements dans les cinq prochaines minutes. Malheureusement, il a oublié la combinaison de son nouveau cadenas.



   Il sait que la combinaison comporte trois numéros différents. Il se souvient aussi que tous les nombres sont impairs, et qu'ils sont tous divisibles par sept. Il lui faut dix secondes pour composer la combinaison, et une minute et demie pour se changer de vêtements.

   Tim sera-t-il prêt pour sa classe d'éducation physique? Appuie ta réponse par un processus mathématique et décris ton travail.

2. Les lettres du mot SEQUOIA sont écrites sur des fiches. Deux fiches sont tirées au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux voyelles?

3. Dans la chambre bleue se trouvent douze garçons et huit filles. Dans la chambre verte se trouvent sept garçons et neuf filles. Si tu choisis un élève au hasard dans l'une des chambres, quelle est la probabilité que ce soit une fille?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-2 résoudre des problèmes de calcul des probabilités d'événements indépendants et d'événements dépendants – *suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **expliquer des événements indépendants (suite)**

Exemple

Classe les événements suivants selon qu'ils sont indépendants ou dépendants :

a) Lancer une pièce de monnaie et lancer un dé.

b) Tirer deux cartes sans les replacer.

c) Tirer deux cartes et les replacer dans le paquet.

Solution

a) Événements indépendants

b) Événements dépendants

c) Événements indépendants

- **déterminer la probabilité de réalisation d'événements indépendants**

La réalisation d'événements indépendants $P(A \text{ et } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemple

Une boîte contient deux billes rouges et trois billes blanches. On tire deux billes. Trouve la probabilité que les deux billes soient blanches si la première :
a) est replacée avant que la deuxième soit tirée.
b) n'est pas replacée avant que la deuxième soit tirée.

Solution

a) $P(BB) = P(B) \cdot P(B \mid B)$

$= P(B) \cdot P(B)$ étant donné que la bille est replacée avant que la deuxième soit tirée (***événements indépendants***).

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

b) $P(BB) = P(B) \cdot P(B \mid B)$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

Remarque : $P(B \mid B)$ en (b) est $\frac{2}{4}$ parce que, après qu'on a tiré la première bille blanche, la boîte contient quatre billes, soit deux blanches et deux rouges.

La distinction entre les deux parties de cet exemple est extrêmement importante dans l'étude des probabilités. On parle fréquemment de tirages ***avec remise (événements indépendants)*** et ***sans remise (événements dépendants).***

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Quelle est la probabilité d'obtenir un cinq si on lance un dé à six faces une fois, et d'obtenir un côté face si on lance une pièce de monnaie une seule fois?

Inscriptions au journal

1. Comment peux-tu déterminer si deux événements sont dépendants ou indépendants?

2. Trois boîtes identiques contiennent chacune deux tiroirs. Dans l'une d'elle, chaque tiroir contient une pièce en or. Dans une autre boîte, chaque tiroir contient une pièce d'argent. Dans la dernière boîte, on trouve une pièce d'argent dans un tiroir et une pièce d'or dans l'autre. Tu ouvres un tiroir et tu y trouves une pièce d'or. Quelle est la probabilité que l'autre tiroir de cette même boîte contienne une pièce d'or?

   Michel prétend que la probabilité est de $\frac{1}{3}$.

   Jessica prétend qu'elle est de $\frac{1}{2}$.

   Raymond déclare que la probabilité est de $\frac{2}{3}$.

   Explique comment chaque personne est arrivée à cette conclusion. Qui a raison? Justifie ta réponse.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-3 résoudre des problèmes en utilisant les probabilités d'événements mutuellement exclusifs et d'événements complémentaires

Communications
✔ **Liens**
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **introduire la notion d'événements mutuellement exclusifs**

  Quand deux événements ne peuvent se produire en même temps, on dit qu'ils sont mutuellement exclusifs. C'est une probabilité semblable à la probabilité « ou ».

  Voici la règle générale :

  $$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B)$$

  Si les événements A et B ne peuvent se produire en même temps (P(A ou B) = 0), la loi suivante s'applique :

  $$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

  Exemple

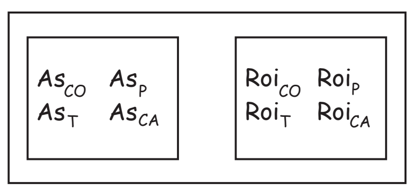
  On tire une carte d'un paquet de 52. Trouve la probabilité que la carte soit un as ou un roi.

  Solution

  Une carte ne peut être un as ou un roi en même temps. Par conséquent, on dit que les événements sont mutuellement exclusifs, et que P(as ou roi) = 0. Par conséquent,

  $$P(\text{as ou roi}) = P(\text{as}) + P(\text{roi}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{2}{13}$$

  Voici un diagramme de Venn qui illustre les événements mutuellement exclusifs :



  L'ensemble des as et l'ensemble des rois sont des ensembles disjoints (ils n'ont rien en commun). Par conséquent, P(as et roi) = 0.

- **appliquer la notion d'événements complémentaires à l'étude des probabilités**

  Si la réalisation d'un événement est certaine, alors la probabilité de cette réalisation est 1. Par conséquent, la probabilité qu'un événement A ne se réalise pas, exprimée par $P(\sim A)$, est la différence entre 1 et $P(A)$, soit,

  $$P(\sim A) = 1 - P(A)$$

  $P(A)$ et $P(\sim A)$ sont souvent appelés des ***événements complémentaires.***

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Si A et B sont des événements mutuellement exclusifs, quelle est la valeur de $P(A \cap B)$?
2. La probabilité que les Coréens fassent un lancer final est de 60 %. Quelle est la probabilité qu'ils manquent le but?
3. À chaque tentative, la probabilité d'atteindre la cible est 0,9. Si une personne a trois chances, quelle est la probabilité qu'elle manque trois fois la cible?

2. 4. Si la probabilité de perdre est de $\frac{2}{7}$, quelle est la probabilité de gagner?

Choix multiples

Un sac contient quatre billes rouges et cinq bleues. Si deux billes sont choisies sans être remplacées, quelle est la probabilité que les deux soient rouges?

a) $\frac{4}{27}$ b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{16}{81}$ d) $\frac{2}{9}$

Inscription au journal

Explique pourquoi il est toujours vrai que si *A* et *B* sont des événements mutuellement exclusifs, alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 7, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-3 résoudre des problèmes en utilisant les probabilités d'événements mutuellement exclusifs et d'événements complémentaires
– suite

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie | Visualisation

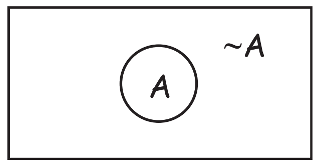
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des événements complémentaires pour étudier les probabilités (suite)**

Deux événements sont ***complémentaires***

- s'ils sont mutuellement exclusifs et
- si leur union vide l'espace échantillonnal

Illustration par un diagramme de Venn



A et ~A sont des événements complémentaires

Exemple 1

Si la probabilité de gagner une joute est de $\frac{1}{31}$, quelle est la probabilité de la perdre?

Solution

$1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$

Exemple 2

Dans une série de tirs au but, les équipes A et B tirent le ballon en alternance. La première équipe qui compte un but gagne. La probabilité que l'équipe A compte un but est de 0,3 pour tous les tirs. La probabilité que l'équipe B compte un but est de 0,4 pour tous les tirs.

a) Si l'équipe A lance en premier, quelle est la probabilité que l'équipe B gagne au premier lancer?

b) Si l'équipe A lance en premier, quelle est la probabilité qu'elle gagne au troisième tir?

Solution

a) $(1 – 0,3)(0,4) = 0,28$

b) $(0,7)(0,6)(0,7)(0,6)(0,3) = 0,05293$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Tu participes à un jeu dans lequel tu dois choisir des billes une à la fois dans un sac qui en contient cinq rouges, six bleues, onze vertes et trois blanches. Sauf mention contraire, les billes doivent être retournées dans le sac seulement après la fin de chaque jeu.
   a) Quelle est la probabilité de ne pas choisir une bille rouge?
   b) Quelle est la probabilité de choisir une bille bleue ou une bille verte?
   c) Quelle est la probabilité de ne pas choisir une bille rouge ni une bille blanche?
   d) Quelle est la probabilité de choisir une bille rouge et une bleue si tu as retourné la rouge dans le sac?
   e) Quelle est la probabilité de choisir deux billes rouges?
   f) Quelle est la probabilité de choisir une bille rouge suivie d'une bille blanche?
   g) Quelle est la probabilité de choisir deux billes bleues?

2. La probabilité que Floyd oublie son dîner est de 0,62. Quelle est la probabilité qu'il ne l'ait pas oublié?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-4 déterminer la probabilité conditionnelle de deux événements

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des problèmes de calcul des probabilités conditionnelles**

La loi générale de multiplication énonce que :

$$P(\text{A et } B) = P(A) \cdot P(B\,|\,A)$$

Cette loi est appliquée chaque fois que tu connais, ou que tu peux déduire, les valeurs de $P(A)$ et de $P(B\,|\,A)$ pour trouver la probabilité que A et B se produisent en même temps.

Parfois, tu connais la valeur de $P(A \text{ et } B)$ et $P(A)$, et tu dois déterminer la probabilité conditionnelle $P(B\,|\,A)$. Tu peux trouver la valeur de $P(B\,|\,A)$ en remplaçant directement $P(A \text{ et } B)$ et $P(A)$ dans la formule ci-dessus. Cependant, beaucoup d'auteurs présentent cette formule sous la forme suivante, qui est équivalente (sauf si ($P(A) = 0$)).

Formule des probabilités conditionnelles

$$P(B\,|\,A) = \frac{\text{P(A et B)}}{\text{P(A)}}$$

Les élèves devraient comprendre que, quand des questions portent sur le calcul de probabilités conditionnelles, l'espace échantillonnal est réduit parce qu'ils disposent d'une information supplémentaire.

La population d'une école secondaire est :

	Garçons	**Filles**	**Total**
Premier cycle	100	200	300
Deuxième cycle	150	75	225
Total	250	275	525

$$\text{P(premier cycle)} = \frac{300}{525}$$

$$\text{P(premier cycle | fille)} = \frac{200}{275}$$

L'espace échantillonnal est réduit de 525 à 275.

« La probabilité qu'une élève soit au premier cycle. »

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscriptions au journal

1. Explique la signification de $P(A \mid B)$.
2. Comment des événements A et B mutuellement exclusifs influencent-ils la formule des probabilités conditionnelles?
3. Explique la différence entre $P(A \text{ et } B)$ et $P(B \mid A)$.

Problèmes

1. Un sondage effectué auprès des élèves de l'École secondaire Rosier démontre que 65 % d'entre eux aiment les programmes de sport, que 40 % aiment les activités plus diversifiées et que 25 % aiment les 2 types d'activités. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette école aime les programmes d'activités diversifiées si on sait que la personne aime aussi les programmes de sport?

2. Un skieur vient tout juste d'atteindre le sommet de la montagne. Pour redescendre, il a le choix entre trois pistes. Si le skieur choisit la piste A, alors la probabilité qu'il se rende au bas de la pente est de $\frac{1}{4}$. S'il choisit la piste B, la probabilité qu'il arrive en bas est de $\frac{1}{5}$. Si la piste C est choisie, la probabilité qu'il arrive en bas est $\frac{1}{6}$. De plus, la probabilité qu'il choisisse l'une de ces pistes est $\frac{1}{3}$. Si le skieur atteint le bas de la pente, quelle est la probabilité qu'il a emprunté la piste B?

3. Tom, Joanne et Elsie sont candidats à la présidence d'une compagnie. La probabilité qu'ils soient élus est de 30 %, 20 % et 50 % respectivement. Si Tom est élu, la probabilité que la valeur des actions de la compagnie augmente est de 10 %. Si Joanne est élue, la probabilité que les actions augmentent est de 15 %, et elle est de 20 % si c'est Elsie qui est élue. Si les actions ont augmenté, quelle est la probabilité que Joanne ait été élue présidente?

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 7, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-4 déterminer la probabilité conditionnelle de deux événements
– suite

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des problèmes de calcul des probabilités conditionnelles (suite)**

Exemple

On sait qu'une famille de cinq enfants compte au moins deux filles. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement quatre filles dans cette famille?

Solution

$\frac{5}{26}$

L'échantillon de 32 est réduit à 26.

Remarque : $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \text{ et } B)}{P(B)}$

Une bonne méthode pour résoudre ce problème est de dessiner un diagramme en arbre et de déterminer le rapport des branches favorables au nombre de toutes les branches possibles.

La formule des probabilités conditionnelles nous permet de calculer la probabilité de réalisation d'un événement si un autre événement s'est déjà produit. Dans de nombreuses situations, cependant, nous connaissons le résultat d'une expérience et il faut déterminer la probabilité que le résultat soit dû à une cause donnée.

- **résoudre divers problèmes de calcul des probabilités**

Exemple 1

Un élève choisit au hasard une boîte parmi les trois suivantes, sur laquelle le nombre de billes colorées est inscrit.

I	II	III
3 rouges 2 bleues	3 rouges 3 bleues	2 rouges 3 bleues

L'élève choisit ensuite une bille dans la boîte choisie. Si la bille choisie est rouge, quelle est la probabilité que la dernière boîte ait été choisie?

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Jean prend l'autobus pour se rendre à l'école les deux premiers jours de la semaine, et il marche les autres trois jours. S'il prend l'autobus, il arrive en retard 10 % du temps, mais s'il marche, il arrive en retard 30 % du temps.

   a) Quelle est la probabilité que Jean arrive à l'heure?

   b) Si Jean est en retard ce matin, quelle est la probabilité qu'il ait pris l'autobus?

2. Trois boîtes contiennent des billes colorées; le contenu de chacune est indiqué dans le diagramme. André choisit une boîte au hasard, puis il choisit au hasard une bille dans cette boîte. Quelle est la probabilité que la bille choisie soit rouge?

Boîte I	Boîte II	Boîte III
3 rouges 5 bleues	3 rouges 5 bleues	3 rouges 5 bleues

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-4 déterminer la probabilité conditionnelle de deux événements
– suite

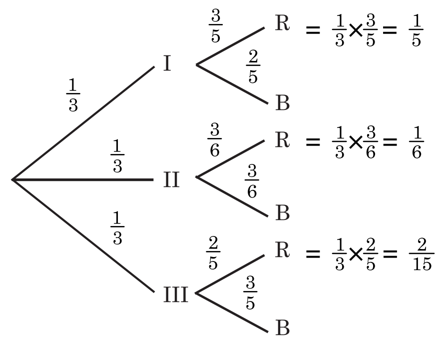
Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre divers problèmes de calcul des probabilités (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution



$$P(\text{Boîte III} \mid \text{Rouge}) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{15}}$$

Remarque : $\text{P (Boîte III} \mid \text{ROUGE)} = \dfrac{\text{Branche rouge selon la branche III}}{\text{Toutes les branches rouges}}$

Exemple 2

On sait que 10 % d'une population a contracté une certaine maladie. Un test sanguin permet de diagnostiquer la maladie dans 95 % des cas. Le test est aussi fiable pour les personnes atteintes que pour les personnes non atteintes. Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test sanguin est positif soit vraiment malade?

Solution

$$\text{P (malade} \mid \text{test positif)} = \frac{(0{,}1)(0{,}95)}{(0{,}1)(0{,}95) + (0{,}9)(0{,}05)}$$

$$= 0{,}67857$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 résoudre des problèmes de calcul des probabilités mettant en cause
- des permutations et des combinaisons
- des probabilités conditionnelles

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir des liens entre les techniques de dénombrement par permutations et par combinaisons pour résoudre des problèmes de calcul des probabilités**

Beaucoup de problèmes de calcul des probabilités peuvent être résolus à l'aide des techniques de dénombrement rapide par permutations et par combinaisons. Certains peuvent être résolus au moyen des permutations, d'autres le seront au moyen des combinaisons, et certains par une combinaison des deux techniques. L'exemple suivant a tout d'abord été résolu à l'aide d'un diagramme en arbre. Par la suite, il a été résolu à l'aide de permutations et de combinaisons.

Exemple 1

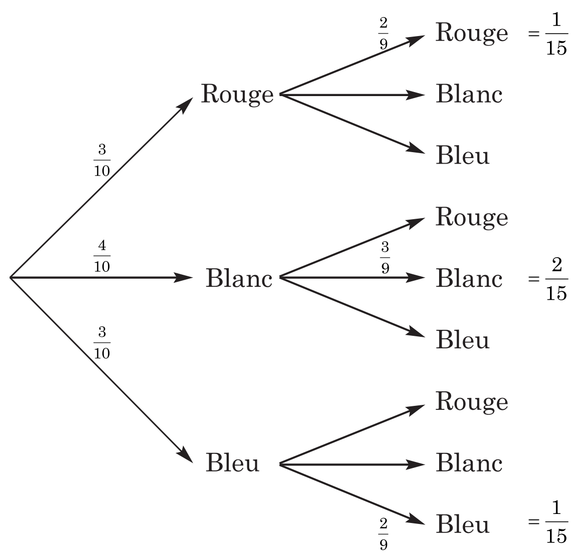
On choisit deux graines dans un paquet qui en contient dix, dont trois doivent produire des fleurs rouges, quatre des fleurs blanches et trois des fleurs bleues. Quelle est la probabilité que les deux graines produisent :

a) des fleurs rouges?

b) des fleurs de la même couleur?

Solution

Méthode 1 : Diagramme en arbre



a) $P(RR) = \dfrac{1}{15}$

b) P(même couleur) = P(RR) + P(BL BL) + P(BB)

$$= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 figures quand on tire 5 cartes dans un paquet qui en contient 52?

2. Pour gagner à un jeu de loterie, il faut que le billet acheté comporte exactement trois chiffres suivis d'une lettre, suivie de trois autres chiffres. Quelle est la probabilité d'avoir un billet gagnant?

3. On tire 5 cartes d'un paquet qui contient 52 cartes bien mélangées. Trouve la probabilité :
   a) que quatre cartes soient des as;
   b) que quatre cartes soient des as et l'autre un roi;
   c) que trois cartes soient un dix et deux des valets;
   d) qu'une carte soit un neuf, une autre un dix, une autre un valet, une autre une reine et une autre un roi, sans tenir compte de l'ordre;
   e) que trois cartes soient d'une couleur et deux d'une autre;
   f) d'obtenir au moins un as.

4. Une boîte contient quatre billes vertes et deux billes rouges. On tire une bille et on la replace dans la boîte. On fait ainsi cinq tirages en succession. Quelle est la probabilité de tirer quatre billes vertes et une bille rouge?

5. Si sept filles et deux garçons sont placés en cercle, quelle est la probabilité que les garçons soient l'un à côté de l'autre?

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 7, leçon 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 résoudre des problèmes de calcul des probabilités mettant en cause
- des permutations et des combinaisons
- des probabilités conditionnelles

– suite

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir les liens entre les techniques de dénombrement par permutations et par combinaisons pour résoudre des problèmes de calcul des probabilités (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

Outre la méthode du diagramme en arbre, les deux méthodes suivantes sont pratiques et rapides.

Méthode 2 : Combinaison

$$P(RR) = \frac{\text{nombre de façons de choisir deux graines rouges}}{\text{nombre de façons de choisir deux graines quelconques}}$$

$$= \frac{C(3,\ 2)}{C(10,\ 2)} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{90}{2}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

Remarque à l'intention des enseignants

Les élèves peuvent utiliser les permutations pour trouver la réponse à ce problème (comme il est illustré ci-dessous).

$$\frac{P(n,\, r)}{P(m,\, r)} = \frac{C(n,\, r)}{C(m,\, r)}$$

Cependant, incitez-les à utiliser les combinaisons.

Méthode 3 : Permutation

$$P(RR) = \frac{\text{nombre de façons de choisir et d'ordonner deux graines rouges}}{\text{nombre de façons de choisir et d'ordonner deux graines quelconques}}$$

$$= \frac{P(3, 2)}{P(10, 2)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. On forme un comité de cinq personnes choisies parmi six garçons et huit filles. Quelle est la probabilité que deux garçons et trois filles sont choisis? (Exprime ta réponse à quatre décimales près.)

2. On te donne un mot de passe qui comprend trois lettres suivies de trois chiffres. Quelle est la probabilité que ton mot de passe ne contienne aucune répétition de lettres ou de chiffres? (Arrondis ta réponse à trois décimales près.)

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 résoudre des problèmes de calcul des probabilités mettant en cause
- des permutations et des combinaisons
- des probabilités conditionnelles

– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir les liens entre les techniques de dénombrement par permutations et par combinaisons pour résoudre des problèmes de calcul des probabilités (suite)**

Exemple 2

Sur une tablette, tu places cinq livres de couleurs différentes, dont un rouge et un vert. Quelle est la probabilité que le livre rouge se trouve à une extrémité et le livre vert à l'autre?

Solution

$$\text{P(rouge et vert aux extrémités)} = \frac{\text{Nombre de permutations avec rouge et vert aux extrémités}}{\text{Nombre total de permutations}}$$

Réponse : $\frac{1}{10}$

Exemple 3

Quelle est la probabilité qu'une main de 5 cartes comporte 4 as si le paquet utilisé compte 52 cartes?

Solution

$$\text{P(4 as, 1 différente)} = \frac{\text{Nombre de combinaisons avec 4 as, 1 différente}}{\text{Nombre total de combinaisons}}$$

Réponse

$$\frac{{}_4C_4 \cdot {}_{48}C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{48}{2598960}$$

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Annexe G-1

Exercice d'algèbre

- **simplifier des fractions complexes**

Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

En calcul universitaire, l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exemple

Simplifie :

a) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

Solutions

a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs**

Exemple

Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4};\ \dfrac{x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3};\ \dfrac{x^2}{x^2-9}$

c) $\dfrac{\sin x}{\cos x};\ \dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

Solutions

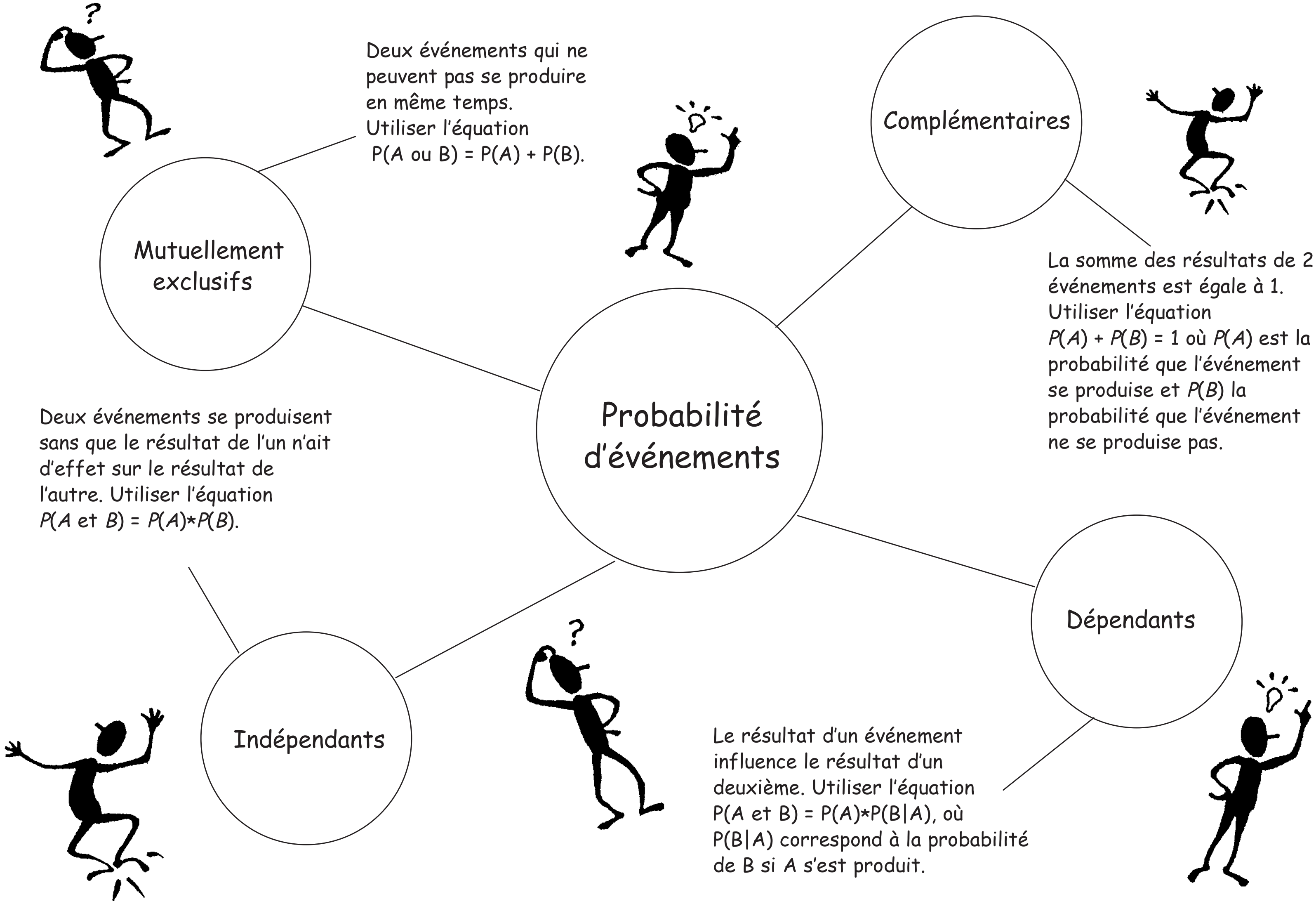
a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

c) $\cos x \sin x$

Annexe G-2

Mise en correspondance



Mise en correspondance

Annexe G-3

Fondements des probabilités

Exemple

Quelle est la probabilité d'obtenir un deux si on lance un dé, et d'obtenir un côté face si on lance une pièce de monnaie.

$P(\text{deux et face}) = P(A) \cdot P(B)$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Événements indépendants

- ➢ l'événement n'est pas influencé par un autre événement

Exemple

Un boîte contient six balles rouges et deux balles bleues. Quelle est la probabilité de choisir une balle bleue puis une balle rouge?

$P(\text{bleu puis rouge})$

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{56}$$

$P(A + B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

Événements dépendants

- ➢ le résultat de deux événements quand le résultat du premier événement influence le résultat du deuxième

Événements complémentaires

- ➢ pour qu'il y ait complémentarité
  a) les événements doivent être mutuellement exclusifs
  b) l'espace échantillonnal doit être épuisé (la probabilité que quelque chose se produise et la probabilité que cela ne se produise pas)

Exemple

L'équipe A a 0,6 chance de compter un but avec un tir et l'équipe B a 0,1 chance de compter un but avec un tir. Quelles sont les chances que l'équipe B gagne (si l'équipe A lance le premier)?

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(A \text{ manque et } B \text{ compte}) = P(A \text{ manque}) \cdot P(B \text{ but})$$

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Événements mutuellement exclusifs

- ➢ deux événements qui ne se produisent jamais en même temps

Exemple

Quelle est la probabilité de choisir un roi de pique ou un neuf de trèfle?

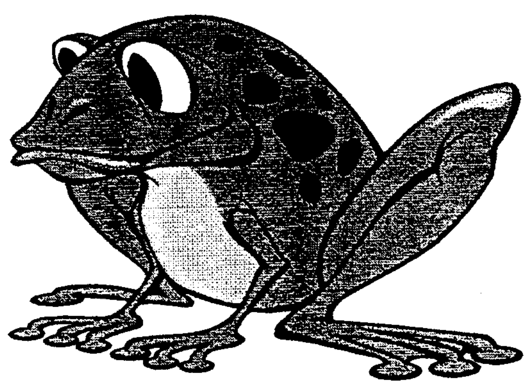
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{52} + \frac{1}{52}$$
$$= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Remarque : Les diagrammes en arbre sont des représentations visuelles utiles pour résoudre des problèmes de calcul des probabilités.

Similarités et différences

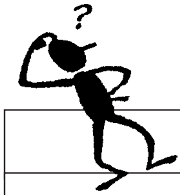
Annexe G-4

<table>
<tr><th colspan="2">Principe fondamental du dénombrement</th></tr>
<tr><th>Principe d’addition</th><th>Principe de multiplication</th></tr>
<tr><th colspan="2">Similarités</th></tr>
<tr><td colspan="2">➢ pour la résolution des permutations et des combinaisons
➢ pour la résolution des permutations et des combinaisons affectées de restrictions</td></tr>
<tr><th colspan="2">Différences</th></tr>
<tr><td>➢ quand deux événements ne peuvent se produire simultanément
➢ le nombre de façons dont chaque événement peut se produire est additionné pour obtenir le nombre total d’événements</td><td>➢ quand deux événements peuvent se produire simultanément
➢ le nombre de façons dont chaque événement peut se produire est multiplié pour obtenir le nombre total d’événements</td></tr>
<tr><th colspan="2">Exemples</th></tr>
<tr><td>Il y a trois façons d’obtenir un quatre si on lance deux dés, et deux façons d’obtenir onze si on lance deux dés. De combien de façons peux-tu obtenir un quatre ou un onze?
Solution : 3 + 2 = 5 façons</td><td>Un restaurant propose une table d’hôte dans laquelle on peut choisir une entrée sur trois et un dessert sur cinq. Combien de repas différents peuvente être composés à ce prix?
Solution : 3 x 5 = 15 façons</td></tr>
<tr><th colspan="2">Questions pratiques</th></tr>
<tr><td colspan="2">Exercice 29, n[os] 1 à 11</td></tr>
</table>



Similarités et différences (Compare and Contrast Frame) : Utilisé avec l’autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n[o] 27.

Annexe G-5



Similarités et différences

<table>
<tr><th colspan="2">Probabilité</th></tr>
<tr><th>Permutations</th><th>Combinaisons</th></tr>
<tr><th colspan="2">Similarités</th></tr>
<tr><td colspan="2">➢ méthodes utilisées pour trouver les probabilités que des situations particulières se produisent
➢ utilisent des équations qui obligent à diviser le nombre total de résultats favorables par le nombre total de résultats
➢ les problèmes doivent être résolus à partir d’une information donnée</td></tr>
<tr><th colspan="2">Différences</th></tr>
<tr><td>➢ portent sur des événements qui mettent en cause des permutations
➢ l’équation suivante est appliquée :
$P(\text{événement}) = \dfrac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de permutations avec résultat favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de permutations}}$</td><td>➢ portent sur des événements qui mettent en cause des combinaisons
➢ l’équation suivante s’applique :
$P(\text{événement}) = \dfrac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de combinaisons avec résultats favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de combinaisons}}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Exemples</th></tr>
<tr><td>Tu dois suspendre cinq chemises de couleurs différentes, y compris une mauve et une orange, dans une garde-robe. Quelle est la probabilité que les chemises orange et mauve soient suspendues à des extrémités dans la garde-robe?
Solution :
$P(\text{mauve à une extrémité, orange à l'autre})$
$= \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{5!}$
$= \dfrac{12}{120}$
$= \dfrac{1}{10}$</td><td>M. Dredge doit choisir 5 élèves parmi les 36 de sa classe pour laver le dessus des pupitres après la classe. Combien de façons a-t-il de choisir ces cinq élèves?
Solution :
$P(\text{choix de cinq élèves})$
${}_{36}C_5$
$= 376\,992$</td></tr>
</table>

Similarités et différences (Compare and Contrast Frame) : Utilisé avec l’autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley nº 27.

Unité H
Suites géométriques

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- font la distinction entre les suites arithmétiques et géométriques, de façon récursive et explicite;
- font des liens entre les suites géométriques et les fonctions exponentielles;
- dérivent et appliquent les formules du terme général et de la somme à une suite géométrique;
- utilisent la notation sigma;
- estiment les valeurs des expressions à l'intérieur de processus géométriques infinis.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- d'établir des liens entre les fonctions exponentielles et les suites géométriques;
- d'examiner une suite géométrique de façon récursive;
- de trouver une solution algébriquement quand les termes ou les sommes sont posés;
- de trouver la somme de suites géométriques et de séries géométriques infinies;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe H-1) :
- les exposants rationnels et fractionnaires
- les fractions complexes
- la notation fonctionnelle.

Matériel

- outil graphique

Durée

- 7 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Générer et analyser des modèles exponentiels.

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter les termes généraux d'une croissance géométrique

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre les suites arithmétiques et les suites géométriques**

Dans le cours Mathématiques pré-calcul – Secondaire 2, les élèves ont vu les définitions des suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmétique

Définition récursive : Une suite de nombres telle que chaque terme qui suit le premier est calculé en ajoutant le même nombre (différence commune) au terme précédent.

Définition explicite : Une fonction linéaire dont le domaine appartient à l'ensemble des nombres naturels.

Suite géométrique

Définition récursive : Une suite de nombres telle que chaque terme qui suit le premier est calculé en multipliant le terme précédent par le même nombre (rapport commun).

Définition explicite : Une fonction exponentielle dont le domaine appartient à l'ensemble des nombres naturels.

Exemple

Indique si la suite est géométrique. Si oui, trouve « r », le rapport commun.

a) Division cellulaire : 1, 2, 4, 8, 16, ...

b) Vitesse de fermeture de l'obturateur d'un appareil photo (en secondes) : 4, 2, 1, ½, ¼, ...

c) Croissance d'une population d'insectes : 5, 10, 15, 20, ...

Solution

a) Oui, c'est une suite géométrique où $r = 2$.

b) Oui, c'est une suite géométrique où $r = 2$.

c) Non, ce n'est pas une suite géométrique.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul Mental

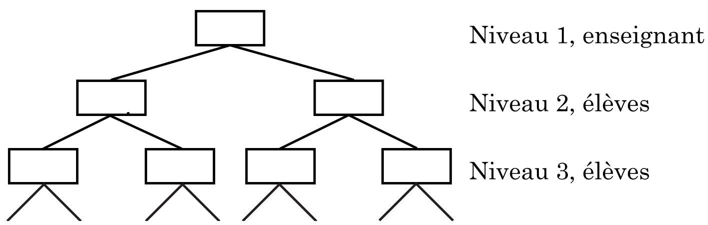
1. Trouve le rapport commun des suites géométriques suivantes :
   a) $x^{5a}, x^{3a}, x^{a}, \ldots.$
   b) $x^6y^3, x^5y^5, x^4y^7, \ldots.$

2. Soit une suite géométrique; si $t_1 = 3$ et $r = 2$, trouve t_3.

Problèmes

1. Si –9, $x - 1$, –1 est une suite géométrique, trouve les valeurs de x.

2. Voici un diagramme en arbre représentant une chaîne téléphonique pour un voyage scolaire.



   a) À quel niveau 64 élèves auront-ils été rejoints?
   b) Combien d'élèves ont été rejoints au 8e niveau?
   c) À partir du 8e niveau, combien d'élèves, au total, ont été rejoints?
   d) Au ne niveau, combien d'élèves, au total, ont été rejoints?
   e) Si 300 élèves doivent être rejoints au total, à quel niveau auront-ils tous été rejoints?

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– *suite*

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **générer les premiers trois termes d'une suite géométrique**

  Exemple

  Écris les trois premiers termes de la suite géométrique générée par la fonction exponentielle suivante :

  $$t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

  Solution

n	1	2	3
t_n	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

  $\therefore\ 1, \frac{1}{9}$ et $\frac{1}{27}$ sont les 3 premiers termes

- **écrire une fonction exponentielle si la suite géométrique est connue**

  Exemple

  Soit la suite géométrique 3, 6, 12 . . . définis la fonction exponentielle correspondante.

  Solution

  $t_1 = 4,\ r = 2$

  $\therefore\ t_n = 4(2)^{n-1}$

- **examiner une suite géométrique de façon récursive**

  Une définition récursive d'une suite est une fonction définie par morceaux dans laquelle chaque terme qui suit les premiers est défini par rapport au terme précédent. Ainsi, les trois premiers termes de la suite 5, 10, 20 sont définis ainsi :

  $$\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_n = 2t_{n-1} \end{cases}$$

  Cela signifie que $\begin{cases} \text{le premier terme est 5} \\ \text{tout autre terme est le double du terme précédent} \end{cases}$

  La suite géométrique 2, –6, 12 peut être représentée de façon récursive comme suit :

  $$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 = -3t_{n-1} \end{cases}$$

  Cela signifie que

  $\begin{cases} \text{le premier terme est 2} \\ \text{tout autre terme est –3 fois le terme précédent} \end{cases}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscriptions au journal

1. Crée une suite géométrique. Quelle règle as-tu appliquée pour définir ta suite? Quelle est la valeur de r dans ta suite?
2. Crée une suite qui n'est ni géométrique ni arithmétique. Quelle règle as-tu appliquée pour définir ta suite?
3. Soit la fonction exponentielle $S(n) = 10^n$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$ S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique? Explique pourquoi.

Problème

Soit une suite géométrique où $t_2 = 24$ et $t_3 = 12$; quelle est la valeur de t_8?

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **dériver le terme général d'une suite géométrique**

t_1	t_1r	t_1r^2	t_1r^3	. . .	t_1r^{n-1}
premier terme	deuxième terme	troisième terme	quatrième terme		n^e terme

En règle générale, si t_1, t_2, t_3, . . . est une suite géométrique, la fonction exponentielle définitoire est exprimée par la formule suivante :

$t_n = t_1r^{n-1}$,

où le rapport commun est $r = \dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{t_3}{t_2} = \ldots$

$t_n = n^e$ terme

n = position dans la suite

r = raison géométrique

t_1 = premier terme

• **calculer un terme d'une suite sans la développer**

Exemple 1

Écris le dixième terme de la suite 3, –6, 12, . . .

Solution

$$\begin{aligned} t_n &= t_1r^{n-1} \\ t_{10} &= 3(-2)^{10-1} \\ &= 3(-2)^9 \\ &= -1536 \end{aligned}$$

Exemple 2

Insère 4 moyens géométriques entre 81 et $\dfrac{1}{729}$

Solution

Les moyens géométriques sont tous les termes compris entre le premier et le n^e terme d'une suite géométrique.

$t_1 = 81$

$n = 6$

$t_6 = \dfrac{1}{729}$

$r = ?$

$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$\dfrac{1}{729} = 81 \cdot r^5$

$\dfrac{1}{59049} = r^5$

$r = \dfrac{1}{9}$

(Étant donné que le 6^e terme, t_6, est positif, r doit être positif.)

$81, 9, 1, \dfrac{1}{91}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{729}$

– suite

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Si le moyen géométrique de a et de b est $\sqrt{ab}$, trouve le moyen géométrique de $49x^2$ et $169x^6$.
2. Quelle est la valeur de r dans la suite suivante :

   a) $\ln x, \ln x^2, \ln x^4, \ldots$

   b) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{25},\ 5,\ 5\sqrt[3]{5}$

Inscriptions au journal

1. Peux-tu utiliser le rapport commun géométrique pour écrire une définition récursive d'une suite géométrique? Explique pourquoi.
2. Explique l'effet sur le terme général d'une suite géométrique du doublement de la valeur de r.
3. Explique l'effet sur le terme général d'une suite géométrique du doublement de la valeur de t_1.

Problèmes

1. Dans une suite géométrique, le quatrième terme est $\frac{1}{4}$ et le onzième terme est 32. Calcule la somme des premiers onze termes.
2. Si 3 est la moyenne arithmétique de « p » et « q »; calcule le ou les moyen(s) géométrique(s) de 2^p et de 2^q.
3. Explique pourquoi ce qui suit est une suite géométrique :

   $\log x, \log x^2, \log x^4$, où $x > 0$
4. Soit la suite géométrique cosec $\theta - 1$, x, cosec $\theta + 1$; démontre qu'une expression possible du moyen géométrique, x, est cot θ.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– *suite*

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **calculer un terme d'une suite sans la développer (suite)**

Exemple 3

Soit la suite géométrique où t_1 = 1728 et $r = \frac{1}{2}$; quel terme a une valeur de 27?

Solution

$$t_n = t_1 \cdot t^{n-1}$$
$$27 = 1728 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{27}{1728} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$6 = n - 1$$
$$n = 7$$

$\therefore$ 27 est le septième terme (t_7)

Exemple 4

Si le quatrième terme d'une suite géométrique est 2 et le neuvième terme 64, écris la fonction exponentielle définitoire.

Solution

Construis deux équations simultanées à partir des données suivantes :

$$\frac{t_1 r^8}{t_1 r^3} = \frac{64}{2}$$
$$r^5 = 32$$
$$r = 2$$

$$t_1 r^3 = 2$$
$$t_1 (2)^3 = 2$$
$$t_1 \cdot 8 = 2$$
$$t_1 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$

$$t_n = \frac{1}{4}(2)^{n-1}$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Si le premier terme d'une suite géométrique est $\frac{1}{3}$ et si le rapport commun est –3, trouve les 3 termes suivants.

Problèmes

1. Suppose qu'un capital de C dollars est investi à un taux d'intérêt annuel de i, composé annuellement. Le montant VF après n années est exprimé par $VF = C(1 + i)^n$.
   a) Trouve combien il faudra d'années avant que le montant double si 2 000 $ sont investis à un taux de 7,5 % composé annuellement.
   b) Si le taux d'intérêt annuel est 7,25 %, composé 2 fois par année, quel serait l'effet sur la période de doublement?
   c) Quelle serait la période de doublement du montant si le taux d'intérêt annuel est 7 %, composé quotidiennement?

2. Le premier triangle d'une séquence de triangles a ses sommets à (0, 16), (4, 0), et (–4, 0). Les coordonnées de chaque triangle subséquent équivalent à la moitié des coordonnées du triangle précédent. Trouve la somme des aires des cinq premiers triangles.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 résoudre des problèmes qui mettent en cause des séries géométriques finies

Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre une suite géométrique et une série géométrique**

  Une ***suite géométrique*** est l'image d'une fonction exponentielle dont le domaine est l'ensemble des nombres naturels. Ainsi, 1, 2, 4, . . . est une suite géométrique.

  Une ***série géométrique*** est la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi, 1 + 2 + 4 + . . . est une série géométrique. La somme est représentée par S_n.

- **trouver la somme d'une série géométrique**

  La lettre grecque ∑(sigma) est utilisée pour représenter la somme.

  La somme des premiers n termes de la suite $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ est définie comme suit :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

  Le symbole $\sum_{i=1}^{n} t_i$ est appelé la ***notation sigma***. La série $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n$ est la ***forme développée*** de la notation sigma.

Exemple 1

Écris l'expression suivante sous sa forme développée $\sum_{k=1}^{5} 2^k$.

Solution

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} 2^k &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32\end{aligned}$$

Exemple 2

Écris l'expression en notation sigma : 3 + 6 + 9 + 12 + 15.

Solution

$$\sum_{k=1}^{5} 3k$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Trouve la valeur de $\sum_{i=0}^{3} 2^i$.

Problème

Exprime 8 + 27 + 64 + 125 en notation sigma.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 résoudre des problèmes qui mettent en cause des séries géométriques finies
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer la formule de la somme d'une série géométrique finie**

Théorème

La somme de n premiers termes d'une série géométrique est :

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}\text{, si } r \neq 1$$

Preuve :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

$$S_n = t_1 + t_1r + t_1r^2 + \ldots + t_1r^{n-2} + t_1r^{n-1} \quad \text{peut être écrit comme}$$

$$rS_n = t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + \ldots + t_1r^{n-1} + t_1r^n \quad \text{multiplie par } r$$

$$S_n - rS_n = t_1 - t_1r^n \quad \text{qui donne}$$

$$S_n(1-r) = t_1(1-r^n) \quad \text{soustraire pour obtenir}$$

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{si } r \neq 1$$

Exemple

Trouve S_6 de $81 - 27 + 9 \ldots$

Solution

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \qquad t_1 = 81,\ r = -\frac{1}{3},\ n = 6$$

$$S_6 = \frac{81\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{81\left(-\frac{1}{729}\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{182}{3}$$

Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $m > 1$, la suite log m^4, log m^7, log m^{10} est :

a) une suite géométrique dont le rapport commun est 3 log m;

b) une suite géométrique dont le rapport commun est log (3m);

c) une suite arithmétique dont la différence commune est 3 log m;

d) une suite arithmétique dont la différence commune est log (3m).

Problème

a) Quelle est la somme des entiers de 1 à 5 000 inclusivement?

b) Quelle est la somme de tous les multiples de 7 entre 1 et 5 000?

c) Quelle est la somme de tous les entiers entre 1 et 5 000 qui ne sont pas des multiples de 7?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 appliquer des processus géométriques infinis pour résoudre des problèmes

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver la somme d'une série géométrique infinie**

  Si $|r| < 1$, la série géométrique infinie

  $t_1 + t_1r + t_1r^2 + \ldots + t_1r^n + \ldots$ converge vers la somme $S = \dfrac{t_1}{1-r}$

  Si $|r| \geq 1$ et $t_1 \neq 0$, alors la série est divergente

  Exemple 1

  Trouve la somme de la série infinie $2 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{25} + \ldots.$

  Solution

  $t_1 = 2,\ r = \dfrac{1}{5}$

  $$\begin{aligned} S &= \frac{t_1}{1-r} \\ &= \frac{2}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 2 \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

  Exemple 2

  Si la somme à l'infini d'une suite géométrique convergente est 16 et si le rapport commun est $\dfrac{1}{2}$, trouve la valeur du premier terme de la suite.

  Solution

  $S = 16,\ r = \dfrac{1}{2}$

  $$S = \frac{t_1}{1-r}$$

  $$16 = \frac{t_1}{1-\frac{1}{2}}$$

  $$8 = t_1$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Dans $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{3^k}$, trouve

a) t_1 b) r c) somme

Inscriptions au journal

1. Explique pourquoi la valeur absolue de r doit être inférieure à 1 pour que la somme d'une série géométrique infinie soit convergente.
2. Quelle est la différence entre le graphique d'une série infinie convergente et le graphique d'une série infinie non convergente?
3. Pourquoi r^n s'approche-t-il de 0 quand n augmente si $|r| < 1$?

Problèmes

1. La somme des termes d'une suite géométrique infinie est 4 et la somme des cubes des termes est 192. Trouve les trois premiers termes.
2. La période de doublement de la valeur d'un investissement peut être estimée à l'aide de la règle de 72, qui énonce que $n = \frac{72}{i}$.
   a) Compare la période de doublement d'une somme obtenue avec la règle de 72 et la période de doublement exacte si on considère les taux d'intérêt suivants :
      - 4 % par année, composé annuellement
      - 8 % par année, composé annuellement
      - 24 % par année, composé annuellement

   b) Quelle conclusion générale peux-tu tirer sur la précision des calculs effectués avec la règle de 72?
3. Une somme est placée à un taux de 12 % composé 2 fois par année. Si le placement a une valeur de 8 200 \$ après 6 années, quelle somme d'argent a été investie?
4. Évalue $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$
5. Un ballon extraordinaire fabriqué dans une centrale nucléaire à Pinawa rebondit à 90 % de la hauteur de lancement. Si le ballon est lancé à 200 cm de hauteur, trouve la distance totale parcourue par le ballon avant qu'il revienne au repos.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 appliquer des processus géométriques infinis pour résoudre des problèmes - suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver la somme d'une série géométrique infinie (suite)**

Exemple 3

Un ballon est lancé d'une hauteur de 2 mètres. Chaque fois qu'il touche le sol, il rebondit à une hauteur qui correspond aux trois quarts de la distance parcourue en tombant.

a) À quelle hauteur rebondit-il après avoir touché le sol la troisième fois?

b) À quelle hauteur rebondit-il avant de rester au repos?

Solution

a) Premier bond = $2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$; deuxième bond $=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}$;

troisième bond = $\frac{9}{8}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{32}$.

b) La série de la distance totale vers le bas est :

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{9}+\ldots=\frac{t_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}}=8.$$

La distance totale vers le haut = distance vers le bas – hauteur du lancer original = 8 – 2 = 6.

La distance parcourue est 8 + 6 = 14 mètres.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

1. On extrait 25 000 barils de pétrole d'un puits durant le premier mois de production. Si la production chute ensuite de 5 % par mois, estime la production totale avant que le puits ne soit complètement à sec.

Annexe H-1

Exercice d'algèbre

- **simplifier des exposants rationnels et fractionnaires**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des expressions qui comprennent des exposants rationnels et fractionnaires dont les dénominateurs sont inférieurs ou égaux à 5.

  Exemple

  Évalue :

  a) 2^{-2}

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

  c) $8^{\frac{2}{3}}$

  d) $27^{\frac{-4}{3}}$

  e) $32^{\frac{3}{5}}$

  Solutions

  a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

  c) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

  d) $27^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

  e) $32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

- **simplifier des fractions complexes**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

  En calcul universitaire, l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

  Exemple

  Simplifie :

  a) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

  b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

  c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$

  d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

  Solutions

  a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

  b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

  c) $\sqrt{3}$

  d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs**

  Exemple

  Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

  a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}; \dfrac{x}{x-2}$

  b) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}; \dfrac{x^2}{x^2-9}$

  c) $\dfrac{\sin x}{\cos x}; \dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

  Solutions

  a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

  b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

  c) $\cos x \sin x$

- **utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions**

  Exemple 1

  Si $f(x)=x^2+2,\ g(x)=\dfrac{1}{x}, h(x)=\sqrt{3x},$ trouve :

  a) $f(4)$

  b) $g(-2)$

  c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

  d) $h(3)$

  e) $g(h(27))$

  f) $g(f(0))$

  Solutions

  a) $f(4)=4^2+2=18$

  b) $g(-2)=\dfrac{1}{-2}$

  c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=f(2)=2^2+2=6$

  d) $h(3)=\sqrt{3(3)}=3$

  e) $g(h(27))=g(\sqrt{3(27)})=g(9)=\dfrac{1}{9}$

  f) $g(f(0))=g(0^2+2)=g(2)=\dfrac{1}{2}$

Unité I
Statistique

STATISTIQUE

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- examinent différentes mesures de dispersion qui s'appliquent à des distributions de données;
- développent des fonctions de répartition et les associent à des distributions de fréquences;
- examinent des distributions binomiales, développent leurs propriétés et résolvent des problèmes liés;
- examinent des distributions normales, développent leurs propriétés et résolvent des problèmes liés;
- utilisent les cotes z pour résoudre des problèmes relatifs à la courbe normale;
- utilisent la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes portant sur des échantillons de grandes tailles.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- de voir que la dispersion a une incidence sur la distribution des données;
- de faire la différence entre la distribution binomiale et la distribution normale;
- d'acquérir des connaissances sur l'utilisation des cotes z pour résoudre des problèmes statistiques;
- de recourir à la calculatrice ou à un logiciel graphique pour résoudre des problèmes d'analyse statistique;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Matériel

- calculatrice à affichage graphique et logiciel

Durée

- unité facultative

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Utiliser les distributions de probabilités normales et binomiales pour résoudre des problèmes impliquant l'incertitude

Résultats d'apprentissage spécifique

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques

Communications	Résolution
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

Se reporter aux annexes I-1, I-2 et I-3 à la fin de l'unité. L'annexe I-1 comprend des exercices pour les élèves; l'annexe I-2 donne des solutions à ces exercices et l'annexe I-3 des notes à l'intention des enseignants qui ont trait aux exercices.

- **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer**

  La statistique est une branche des mathématiques qui porte sur la collecte, l'organisation et l'interprétation de données. Une fois que les données ont été réunies, elles sont présentées le plus souvent sous forme de tableau ou de graphique. Lorsque les données brutes sont organisées et présentées dans un tableau, on parle d'une distribution de fréquence. Cette distribution de fréquence donne la liste des divers événements et de la fréquence de réalisation de chacun. On peut considérer ce tableau comme une fonction qui fait un lien entre la valeur de chaque donnée et sa fréquence.

  Différentes mesures peuvent être effectuées, comme l'illustre l'exemple suivant.

  Exemple

  Le tableau suivant représente les notes finales obtenues par les élèves d'un groupe de mathématiques de secondaire 4 :

Note	Fréquence
98	2
94	4
88	7
87	4
86	6
83	9
80	5
78	4
75	3
74	1

a) Quel est le mode de cette distribution?

b) Quelle est la moyenne de cette distribution?

c) Quelle est la médiane de cette distribution?

d) Utilise ta calculatrice à affichage graphique pour déterminer les valeurs ci-dessus (si possible) et trace un nuage de points de cette distribution.

e) Combien y a-t-il d'élèves dans ce groupe?

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressources imprimées

Le succès à la portée de tous les apprenants : Manuel concernant l'enseignement différentiel - Ouvrage de référence pour les écoles (maternelle à Secondaire 4). Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 1996.

Angel, P. et coll. Omnimaths 12. Western Edition. Whitby, Ont. : McGraw-Hill Ryerson Ltd., 2000.
[ISBN : 007552600X]

LeBlanc, D. Addition-Wesley Mathematics 12, Western Canadian Edition, Don Mills, Ont. : Addison-Wesley Longman Ltd., 2000.
[ISBN : 020134629X]

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer (suite)**

  f) Si on choisit un élève au hasard, quelle sera
   - i) sa note la plus probable?
   - ii) sa note la moins probable?
   - iii) la probabilité que sa note soit 80?

  Solution

  a) 83, étant donné que le mode est la note la plus fréquente.

  b) $\dfrac{\sum(\text{note} \times \text{fréquence})}{\sum \text{fréquence}} = \dfrac{3810}{45} = 84\dfrac{2}{3}$, puisque $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

  N'oubliez pas qu'on appelle cette valeur la valeur attendue de la distribution.

  c) 86, étant donné que la marque centrale (la 23^{e}) est la médiane.

  d) Dans le menu Stat, inscris les notes dans la première colonne, L1, et les fréquences dans la deuxième colonne, L2.

  La calculatrice TI-83 nous donnerait le résultat suivant :

L1	L2	L3 3
98	2	
94	4	
88	7	
87	4	
86	6	
83	9	
80	5	

L3(1)=

  e) $n = \sum f = 45$

  f) i) 83, étant donné que c'est le mode
   - ii) 74, étant donné qu'un seul élève a obtenu cette note
   - iii) $\dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$

  La moyenne, la médiane et le mode sont appelés des mesures de la tendance centrale.

Communications	Résolution
✔ **Liens**	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le tableau suivant illustre la longueur des mots dans un passage donné :

Longueur des mots	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence	5	4	7	6	4	3	4	0	1

a) Quelle est la longueur médiane des mots de ce passage?

b) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité qu'il contienne trois lettres?

c) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un mot de trois lettres ou de deux lettres?

d) Si on choisit un mot au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un mot de quatre lettres ou plus?

e) Dessine un nuage de points pour représenter ces données.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

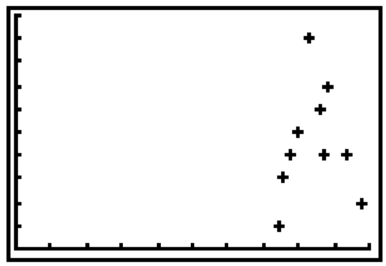
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **illustrer le concept de la distribution de fréquence et certaines des données qu'on peut en tirer (suite)**

  Exemple (suite)

  Solution (suite)

  On peut aussi représenter les données sous forme graphique. À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, inscris les données dans L1 et les fréquences dans L2. On obtient le nuage de points ou le graphique à barres suivant :



- **présenter le concept de l'écart type**

  Il s'agit d'une mesure qui permet de déterminer comment les données d'une population ou d'un échantillon sont dispersées autour de la moyenne.
  Les formules de calcul des écarts types sont les suivantes :

  Échantillon :

  $$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

  Population :

  $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{n}}$$

  (***Remarque :*** Le symbole μ est utilisé pour représenter la moyenne d'une population et x pour représenter la moyenne d'un échantillon).

  Si un ensemble de nombres, x_1, x_2, . . . x_n, comprend les lectures d'une population de moyenne μ, alors chacune des différences, $(x_1 - \mu)$, $(x_1 - \mu)$, $(x_2 - \mu)$, . . . $(x_n - \mu)$ est appelée un écart par rapport à la moyenne. Il serait intéressant d'utiliser la somme de ces différences pour mesurer la dispersion de la distribution, mais la somme sera toujours zéro. Pour éliminer l'incidence des signes sur les calculs, il faut mettre au carré les différences avant de trouver la somme. La moyenne de cette somme des carrés est appelée la ***variance*** d'une distribution. Pour « éliminer » l'effet de l'élévation au carré, on prend la racine carrée de la variance pour trouver l'écart type. L'importance de cet écart type ressortira de façon beaucoup plus évidente quand on étudiera certaines distributions spéciales, notamment la distribution normale.

  Sauf mention contraire, l'écart type de la population est toujours utilisé.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit les deux ensembles de données ci-dessous; calcule les écarts types des ensembles A et B.

   Ensemble A

x	3	4	5	6
f	1	1	1	1

   Ensemble B

x	13	14	15	16
f	1	1	1	1

2. Trouve la moyenne et l'écart type de la distribution de fréquence suivante :

x	4	6	7	8	9	11	12
f	2	3	5	8	4	2	1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer une distribution de probabilité**

  Ce développement implique le concept de fonction.

  Définition : Une variable aléatoire est une fonction qui affecte un nombre à chaque résultat possible d'un espace échantillonnal. La variable aléatoire est dépendante du sujet considéré.

  Exemple 1

  Si trois cartes sont choisies dans un paquet ordinaire, posons le nombre de cœurs choisis (C correspond à cœur et N à non-cœur) comme variable aléatoire.

Choix de trois cartes qui sont des coeurs (X)	valeur assignée à cet événement (x)
NNN	0
CNN, NCN, NNC	1
CCN, CNC, NCC	2
CCC	3

  Quand une probabilité est affectée à chaque valeur d'un échantillon aléatoire, on obtient une fonction de répartition.

  Définition : Une fonction de distribution de probabilité est une fonction qui associe à chaque valeur d'une variable aléatoire la probabilité que cette valeur se réalise.

  Exemple 2

  Si trois cartes sont choisies dans un paquet ordinaire, la variable aléatoire est le nombre de cœurs choisis.

Nombre de coeurs (x)	Probabilité de x
0	$\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}\cdot\frac{37}{50}$
1	$3\left(\frac{13}{52}\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{38}{50}\right)$
2	$3\left(\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{39}{50}\right)$
3	$\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}$

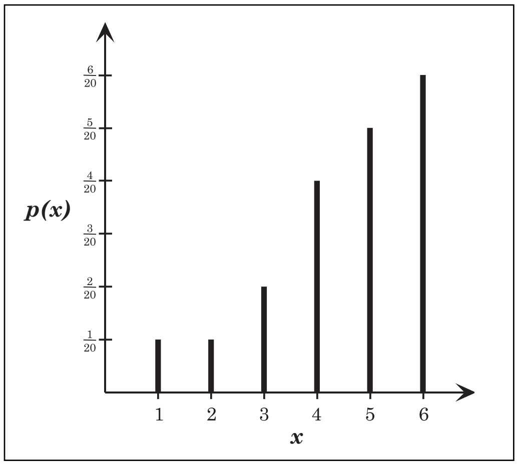
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le diagramme ci-dessous représente le graphique d'une distribution de probabilité.



Convertis le graphique en tableau et trouve :

a) la moyenne

b) le mode

c) l'écart type

d) la probabilité que $x < 5$

f) la probabilité que $2 < x < 5$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer une distribution de probabilité (suite)**

La fonction de distribution de probabilité peut être représentée par un graphique à barres. Si tu utilises la calculatrice TI-83, entre les valeurs de la variable aléatoire dans une colonne L1 et les numérateurs des probabilités dans une deuxième colonne, L2. Quand tu entres ces numérateurs, assure-toi que les probabilités ont le même dénominateur commun! Mets le nom de la deuxième colonne en surbrillance et entre L2/(dénominateur commun). La deuxième colonne devrait afficher des représentations décimales des probabilités respectives. Trace le graphique à l'aide de L1 et de L2.

Choisis la forme histogramme, puis Xlist :L1 et Freq :L2, et appuie sur GRAPH pour obtenir l'histogramme.

• **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence**

Une distribution de fréquence est une classification de données dans différentes catégories.

Note	Fréquence
98	2
94	4
88	7
87	4
86	6
83	9
80	5
78	4
75	3
74	1

Une distribution de fréquence relative est telle que chaque fréquence est divisée par la somme de toutes les fréquences.

La probabilité qu'un élève choisi ait une note de 80 est de $\frac{5}{45}$, le nombre équivalent à la fréquence relative de la note.

Note	Fréquence
98	$\frac{2}{45}$
94	$\frac{4}{45}$
88	$\frac{7}{45}$
87	$\frac{4}{45}$
86	$\frac{6}{45}$
83	$\frac{9}{45}$
80	$\frac{5}{45}$
78	$\frac{4}{45}$
75	$\frac{3}{45}$
74	$\frac{1}{45}$

– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Convertis la distribution de fréquence suivante en une distribution de fréquence relative :

x	4	5	6	7	8	9	10
f	12	10	8	7	6	4	2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence (suite)**

Remarque : Étant donné qu'une valeur aléatoire doit avoir au moins une de ses valeurs, la somme de toutes les probabilités (ou les fréquences relatives) d'une distribution de probabilité est 1.

Le lien entre une distribution de fréquence et sa distribution de fréquence relative nous permet de trouver la moyenne d'une distribution de probabilité.

La moyenne de la distribution de fréquence exprimée dans le tableau est :

x	1	2	3
f	2	3	4

$\dfrac{2(1)+3(2)+4(3)}{9}$ qui peut être écrit sous la forme $2\left(\dfrac{1}{9}\right)+3\left(\dfrac{2}{9}\right)+4\left(\dfrac{3}{9}\right)$

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

Cette dernière forme correspond à la somme des produits de chaque lecture et à sa fréquence relative (ou probabilité).

Par conséquent, la formule de la moyenne d'une distribution de probabilité est :

$$\mu = \sum x \cdot p(x)$$

La formule de l'écart type est :

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 \cdot p(x) - \mu^2}$$

Définition : Les distributions dont chacun des résultats est équiprobable sont appelées des **distributions uniformes**.

Exemple

Les résultats théoriques au lancer de dé :

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Distrubution uniforme)

Trouve la moyenne et l'écart type.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une urne contient trois billes rouges et cinq bleues. Si on tire deux billes, construis un tableau de la distribution de probabilité pour le nombre de billes rouges choisies si :

a) la première bille est replacée avant qu'on choisisse la deuxième.

b) la première bille n'est pas replacée avant qu'on choisisse la deuxième.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir un lien entre une distribution de probabilité et une distribution de fréquence (suite)**

  Solution

  $$\mu = \sum x \cdot p(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

  Il s'agit de la valeur attendue d'un grand nombre d'essais.

  Remarque : C'est un lancer moyen. Cette moyenne, 3,5, est un résultat qu'on ne peut obtenir à aucun lancer.

  $$\sigma = \sqrt{91\left(\frac{1}{6}\right) - 3{,}5^2} = 1{,}7$$

- **examiner une distribution binomiale**

  Une distribution discrète est telle qu'une variable aléatoire du type lancer de dé peut avoir certaines valeurs particulières dans un intervalle donné. Un résultat de 2,5 n'est pas possible.

  Règle : Pour qu'une distribution soit binomiale, elle doit satisfaire aux propriétés suivantes :

  1. Le résultat de chaque essai doit être un parmi deux possibilités seulement : un succès, définie par p; un échec, défini par q; par conséquent, $p + q = 1$.
  2. Les essais sont les mêmes après n essais répétés.
  3. Les essais sont indépendants. Les probabilités restent constantes.

  La fonction de la distribution binomiale est :

  $$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

  où x est le nombre de succès dans n essais.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner une distribution binomiale (suite)**

Exemple 1

Calcule la distribution de probabilité du nombre de six obtenus quand on lance un dé non truqué quatre fois.

Solution

Nombre de six (x)	$P(x)$
0	$\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1\times 1\times\frac{625}{1296} = \frac{625}{1296}$
1	$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\times\frac{1}{6}\times\frac{125}{216} = \frac{500}{1296}$
2	$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6\times\frac{1}{36}\times\frac{25}{36} = \frac{150}{1296}$
3	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4\times\frac{1}{216}\times\frac{5}{6} = \frac{20}{1296}$
4	$\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1\times\frac{1}{1296}\times 1 = \frac{1}{1296}$

Les probabilités que $x = 0, 1, 2, 3, 4$ sont les termes du développement binomial de $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4$.

Par exemple,

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

Certaines calculatrices à affichage graphique peuvent générer les probabilités binomiales.

Sur la calculatrice TI-83, suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd et DISTR pour obtenir le menu distribution.
2. Choisis 0:binompdf(, soit la distribution des probabilités binomiales.
3. Inscris les valeurs des paramètres, soit (4, (1/6)) dans ce cas-ci, pour obtenir :
   {0,4823 0,3858 0,1157 0,0154 7,7160E -4}.
   Cette liste correspond aux probabilités d'obtenir 0, 1, 2, 3 et 4 six respectivement.

Communications	Résolution
✔ **Liens**	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une pièce de monnaie est biaisée de telle sorte que la probabilité d'obtenir des côtés face est de $\frac{4}{7}$.

a) Si tu lances cette pièce 49 fois, quel sera le nombre le plus probable de faces?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir ce nombre de côtés face?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications — Résolution
✔ **Liens** — ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** — Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner une distribution binomiale (suite)**

  Si la distribution est binomiale, les deux formules suivantes peuvent s'appliquer :

  a) moyenne = np

  b) écart type = $\sqrt{npq}$

  Exemple 2

  a) Lancer des pièces de monnaie (face par rapport à pile)

  b) Lancer un dé (nombre six par rapport à non-six)

  c) Population d'une école (garçons par rapport à filles)

  Justifie les formules au moyen de calculs liés à des expériences simples.

  Solution

  a) P(face) = 0,5 — P(non face) = 0,5
  pour 10 lancers : moyenne = 10 (0,5) = 5 faces

  $$\text{écart type} = \sqrt{10(0{,}5)(0{,}5)} \approx 1{,}6$$

  Tu t'attends à obtenir environ 5 ± 2 faces ou environ 3 à 7 faces si tu lances la pièce 10 fois.
  Remarque : Dans une distribution binomiale, deux résultats sont possibles. Appelles-les A et ~A (non A). Ensuite, si p est la probabilité que A se réalise, q est la probabilité que ~A. Comme ci-dessus, la moyenne est np et l'écart type est $\sqrt{npq}$.

  Pour 100 lancers : moyenne = 100 (0,5) = 50

  $$\text{écart type} = \sqrt{50(0{,}5)(0{,}5)} \approx 5$$

  Tu t'attends à obtenir environ 50 ± 5 côtés face.

  b) Si tu lances le dé 50 fois :

  $$\text{moyenne} = 50\left(\frac{1}{6}\right) = 8{,}\overline{3}$$

  $$\text{écart type} = \sqrt{50\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 2{,}6$$

  Tu t'attends à obtenir un six environ 8 ± 3 fois ou 5 à 11 fois après 50 lancers. Il est probable que le résultat soit à 1 écart type de la moyenne 68 % du temps, et à 2 écarts types environ 95 % du temps. Il serait à 3 écarts types plus de 99 % du temps.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

c) Suppose qu'une école compte 395 élèves, dont 210 sont des garçons. Alors,

$$p = \frac{210}{395} \approx 0{,}53 \text{ et } q = 1 - 0{,}53 = 0{,}47.$$

Si tu choisis un élève au hasard, la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon est de 0,53. Pour calculer la probabilité de choisir exactement deux garçons si tu fais un tirage au sort de trois noms, l'espace échantillonnal pour les trois tirages est le suivant : (G ou F) et (G ou F) et (G ou F), ce qui est équivalent à $(G + F)^3$.

$$(G + F)^3 = {}_3C_0M^3 + {}_3C_1M^2F + {}_3C_2MF^2 + {}_3C_3F^3$$

Le terme qui représente un choix de deux garçons est ${}_3C_1G^2F$. Si tu remplaces G par 0,53 et F par 0,47, tu obtiens

P(2 garçons après 3 tirages) $= {}_3C_1(0{,}53)^2(0{,}47)$
$= 0{,}40$

Exemple 3

Un élève fait un examen à choix multiples qui comporte dix questions assorties de cinq choix chacune. S'il ne s'est pas préparé et qu'il choisit les réponses au hasard, quelle est la probabilité :

a) qu'il obtienne exactement cinq bonnes réponses?

b) qu'il obtienne quatre bonnes réponses ou moins?

c) qu'il obtienne au moins cinq bonnes réponses?

d) qu'il obtienne au moins sept bonnes réponses?

Solution

Il s'agit d'une distribution binomiale étant donné qu'une réponse est soit bonne, soit mauvaise. La probabilité d'obtenir une bonne réponse est une constante 0,2. Par conséquent, $p = 0{,}2$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ et $n = 10$.

a) $P(x = 5) = \binom{10}{5}(0{,}2)^5(0{,}8)^5 = 252(0{,}00032)(0{,}32768) = 0{,}0264424$

ou, si tu utilises une calculatrice, bnompdf(10; 0,2; 5) = 0,026424.

Remarque : La syntaxe de saisie dans la calculatrice est :
(n, p, nombre de résultats favorables).

Si tu n'entres pas le nombre de résultats favorables, comme c'était le cas dans les premiers exemples, la calculatrice génère l'ensemble de la distribution de tous les nombres possibles de résultats favorables.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Si 95 % des participants à une course de 1000 mètres ont fini la course au cours des dernières années, trouve la probabilité qu'au moins 14 des 15 participants terminent le 1000 mètres l'an prochain.
2. Quelle est la valeur attendue et l'écart type pour les 15 participants à la course dont il est question à la question 1?
3. Calcule les distributions binomiales et trace le graphique :
   a) $n = 5$, $p = 0{,}2$
   b) $n = 5$, $p = 0{,}8$
   c) $n = 10$, $p = 0{,}2$
   d) $n = 5$, $p = 0{,}5$
   e) $n = 10$, $p = 0{,}5$
   f) $n = 20$, $p = 0{,}5$
4. Dans une distribution binomiale de 20 essais, la P(15 ou moins de résultats favorables) = a, P(10 ou moins de résultats favorables) = b et P(5 ou moins de résultats favorables) = c; trouve :
   a) $P(10 < x \leq 15)$
   b) $P(5 < x \leq 10)$
   c) $P(x > 10)$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type de la population d'un ensemble de données ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils techniques
- suite

Communications | Résolution
✔ **Liens** | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **examiner une distribution binomiale (suite)**

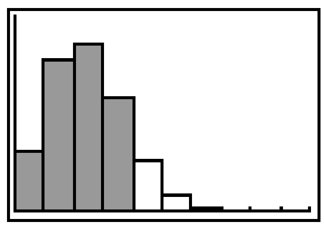
Exemple 3 – suite

Solution – suite

b) P($x \le 4$) = P($x = 0$) + P($x = 1$) + P($x = 2$) + P($x = 3$) + P($x = 4$)

Utilise la fonction binompdf(10; 0,2; {0, 1, 2, 3, 4}) = {0,1074   0,2684   0,3020   0,2013   0,0881}

Par conséquent, P($x \le 4$) = 0,1074 + 0,2684 + 0,3020 + 0,2013 + 0,0881 = 0,9672. Il s'agit de la somme des 5 premiers termes du développement binomial de $(0{,}2 + 0{,}8)^{10}$. La calculatrice TI-83 comporte une fonction distribution binomiale cumulative (***cumulative binomial distribution function***) très utile pour résoudre des problèmes où il faut évaluer les probabilités fondées sur des termes tels que « moins que » et « plus que ». Cette fonction trouve la probabilité que la valeur soit moindre ou égale à la valeur x choisie. Il s'agit de la somme de l'aire des rectangles de l'histogramme associé, incluant x.



Choisis A :binomcdf(10; 0,2; 4) pour obtenir 0,96720650, tel qu'attendu.

La syntaxe est la suivante : binomcfd(n, p, le nombre maximum de résultats favorables).

c) Le résultat en (b) nous permet de trouver P($x \ge 5$) = 1 – P($x \le 4$) = 1 – 0,9672 = 0,0328. La distribution binomiale de ce test est le développement de $(0{,}2 + 0{,}8)^{10}$, qui consiste en la série de 11 termes suivants :

$$\underbrace{P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)}_{\substack{\text{Probabilité d'obtenir 4 bonnes réponses ou moins} \\ F}}+\underbrace{P(5)+P(6)+P(7)+P(8)+P(9)+P(10)}_{\substack{\text{Probabilité d'obtenir 5 bonnes réponses ou plus} \\ G}}$$

Étant donné que la somme des probabilités est toujours 1, alors F + G = 1 ou G = 1 – F.

d) P($x \ge 7$) = 1 – P($x < 7$)
La calculatrice nous donne (1 – binomcdf(10; 0,2; 7)) = 7,793E –5, un résultat improbable!

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

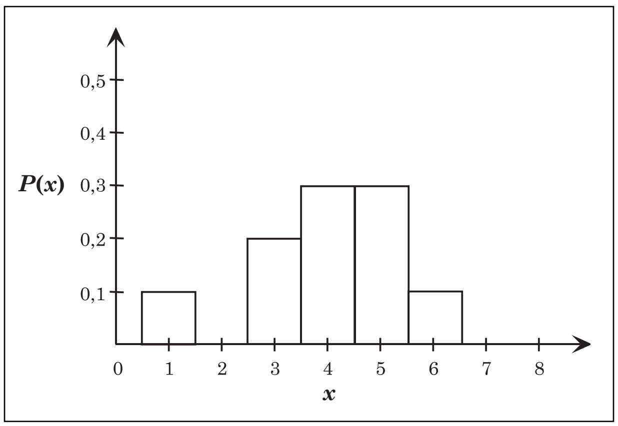
NOTES

Problèmes

1. On lance une pièce de monnaie dix fois. Trouve la probabilité :
   a) d'obtenir exactement trois côtés face
   b) d'obtenir au moins trois côtés face
   c) d'obtenir au plus trois côtés face

2. Trouve la moyenne et l'écart type de la distribution binomiale de la question 1.

3. Soit l'histogramme suivant d'une distribution binomiale; quelle est la probabilité que :
   a) x ait une valeur inférieure à 5?
   b) x ait une valeur entre 3 et 6?
   c) x ait une valeur supérieure ou égale à 3 et inférieure à 6?



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

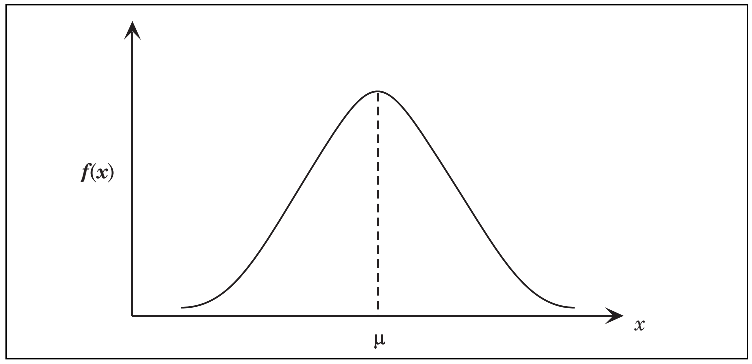
I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale**

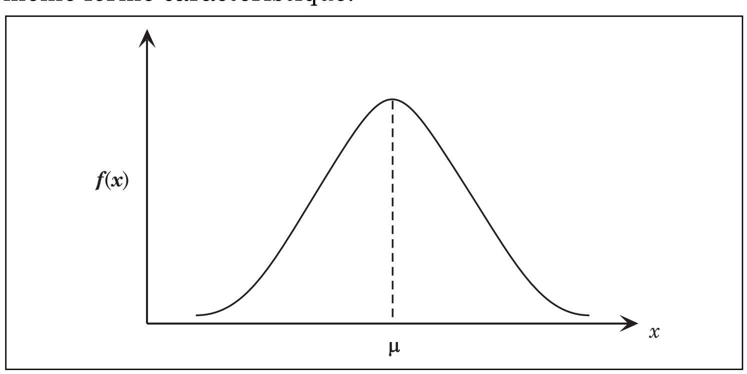
Une variable aléatoire est continue si elle peut prendre une valeur quelconque à l'intérieur d'un intervalle donné. La distribution normale revêt une importance capitale.

Le graphique de toute distribution normale, illustré ci-dessous, possède les caractéristiques générales suivantes :



1. $f(x) > 0$ pour tous les nombres réels x.
2. La courbe est symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par la moyenne.
3. La courbe est en forme de cloche, avec un seul pic à la moyenne.
4. Comme c'est le cas pour toute distribution de probabilité continue, l'aire sous l'ensemble de la courbe sur $]-\infty, \infty[$ est égale à 1. Aussi, $P(a < x < b)$ est égal à l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
5. La courbe est asymptotique par rapport à l'axe des x quand x prend une valeur très grande dans un sens positif ou négatif.

Différentes valeurs de la moyenne, μ, et l'écart type, σ, produisent une courbe différente, qui conservera toutefois la même forme caractéristique.



– *suite*

Communications	Résolution
✔ **Liens**	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

La calculatrice à affichage graphique peut déterminer l'aire sous la courbe normale, donc la probabilité, si la moyenne et l'écart type de la distribution sont connus.

Exemple 1

Les notes obtenues à l'examen de mathématiques de S4 au Manitoba sont distribuées normalement avec une moyenne de 60,3 et un écart type de 10,5. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait obtenu une note :

a) inférieure à 52,4?

b) inférieure à 80?

c) supérieure à 90?

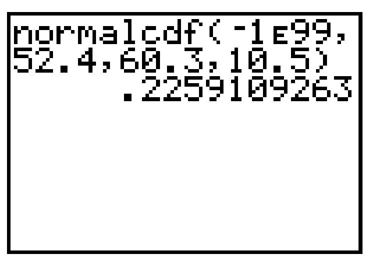
d) entre 60 et 80,5?

Solution

a) sur la calculatrice TI-83, appuie sur les touches suivantes :

1. 2nd et DISTR.
2. Choisis 2:normalcdf (puis appuie sur ENTER – le gabarit normalcdf est affiché. Il s'agit de la fonction de la distribution normale cumulative qui trouve l'aire sous la courbe normale.
3. Entre les valeurs suivantes : (–1E99, 52,4, 60,3, 10,5) syntaxe : (limite inférieure, limite supérieure μ, σ).

   Remarque : Le domaine de la courbe est]–∞, ∞[. Étant donné que –∞ n'est pas un nombre, on utilise un nombre négatif très grand, –1E99, à la place.



4. La réponse devrait être 0,22591.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Au dixième près, quel pourcentage de données distribuées normalement sont à l'intérieur de deux écarts types de la moyenne?
2. Au dixième près, quel pourcentage de valeurs excède deux écarts types au-dessus de la moyenne? Quel pourcentage excède deux écarts types au-dessous de la moyenne?

Problèmes

1. Si la vie moyenne d'un certain type de pile est 30 mois, avec un écart type de 6 mois, quelle est la probabilité que la pile achetée dure plus longtemps que 36 mois (suppose que la durée de vie suit une distribution normale)?
2. Si on lance un dé 36 fois, quelle est la probabilité, si on utilise une approximation de la courbe de distribution normale :
   a) d'obtenir un « cinq » exactement 7 fois?
   b) d'obtenir un « cinq » au moins 7 fois?
   c) d'obtenir un « cinq » au plus 7 fois?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

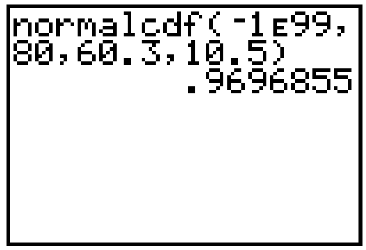
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

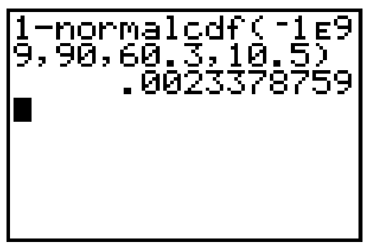
Exemple 1 – suite

Solution – suite

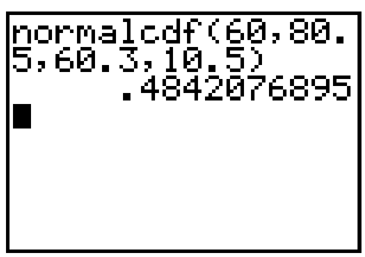
b) normalcdf(-1E99; 80; 60,3; 10,5)
réponse : 0,96969



c) 1- normalcdf(-1E99; 90; 60,3; 10,5)
réponse : 1- 0,99766 = 0,00234
ou normalcdf(90; 1E99; 60,3; 10,5)
réponse : 0,00234



d) normalcdf(60; 80,5; 60,3; 10,5)
réponse : 0,48421



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

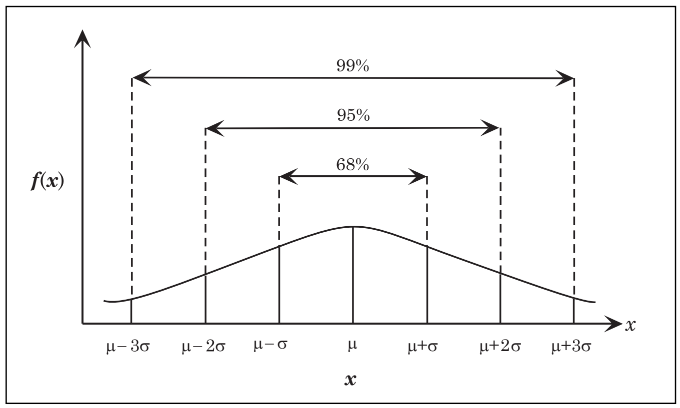
Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Règle : Toute distribution normale possède ces importantes propriétés qui contribuent à faire de l'écart type une mesure si importante.

1. Environ 68 % de la distribution se trouve à 1σ de la moyenne.
2. Environ 95 % de la distribution se trouve à 2σ de la moyenne.
3. Environ 99 % de la distribution se trouve à 3σ de la moyenne.



Exemple 2

Le poids d'une certaine race de chiens est distribué normalement, avec une moyenne de 3 kg et un écart type de 0,2 kg. Trouve le pourcentage de ces chiens dont le poids est inférieur ou égal à 3,2 kg.

Solution

normalcdf(-1E99; 3,2; 3; 0,2)

réponse : 0,84134. Par conséquent, 84 % des chiens ont un poids inférieur ou égal à 3,2 kg.

Il peut être utile d'ombrer l'aire sous la courbe normale. Sur la calculatrice TI-83, suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd et DISTR.
2. Choisis Draw et ShadeNorm(.
3. Inscris les mêmes données que pour normalcdf(:
   ShadeNorm(–1E99, 3,2, 3, 0,2)

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une variable aléatoire x est distribuée normalement avec une moyenne de 7 et un écart type de 2,5. Trouve la valeur de la variable aléatoire x tel que :
   a) 50 % des valeurs sont supérieures à x
   b) 20 % des valeurs sont inférieures à x
   c) 90 % des valeurs sont inférieures ou égales à x

2. Une variable aléatoire r est distribuée normalement avec une moyenne de 5 et un écart type de 2,5.
   a) Trouve la valeur de w tel que $P(w < r < 10) = 0{,}8413$.
   b) Trouve la valeur de w tel que $P(7 < r < w) = 0{,}1000$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

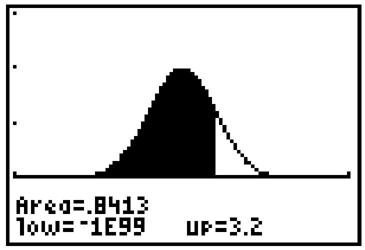
I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite



(Window : X_{min} = 2, X_{max} = 4, Y_{min} = –1, Y_{max} = 3)

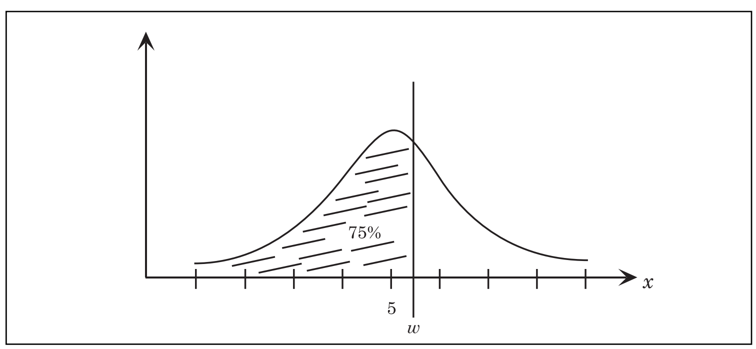
Remarque : Appuie sur DRAW et choisis 1:ClrDraw pour effacer ce dessin avant de tenter de dessiner une autre zone.

Le problème inverse : Dans de nombreux problèmes, on te donne le pourcentage, ou la probabilité, de la région d'une distribution normale, et tu dois trouver la cote correspondant à cette probabilité.

Exemple 3

Une variable aléatoire *x* est distribuée normalement avec une moyenne de 5 et un écart type de 1. Trouve la valeur de *w* tel que 75 % des valeurs sont inférieures à *w*.

Solution



Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

La durée de vie d'une bicyclette est distribuée normalement avec une moyenne de 18,6 années et un écart type de 5,2 années. La compagnie qui fabrique les bicyclettes remplacera une bicyclette qui vient d'être achetée si elle est encore sous garantie. Pendant combien d'années la compagnie de bicyclettes devrait-elle garantir les bicyclettes si elle ne veut pas remplacer plus de 5 % des bicyclettes vendues?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

I-1 déterminer l'écart type d'un ensemble de données d'une population ou d'une distribution de probabilité à l'aide d'outils technologiques – *suite*

Communications | ✔ **Liens** | ✔ **Estimation et Calcul Mental** | Résolution | ✔ **Raisonnement** | Technologie | ✔ **Visualisation**

• **développer les concepts d'une distribution normale (suite)**

Exemple 3 – suite

Solution – suite

Heureusement, la calculatrice TI-83 comporte une fonction inverse qui donne la valeur de x pour obtenir la probabilité donnée. Suis les étapes suivantes :

1. Appuie sur 2nd DISTR et choisis 3:invNorm(.
2. Inscris les valeurs des paramètres :
   InvNorm(0,75; 5, 1)
   réponse : 5,6745
   Syntaxe : InvNorm(probabilité [que les valeurs de w soient $< x$], moyenne, écart type)

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | ✔ **Résolution** | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | ✔ **Visualisation**

• **présenter les cotes normalisés**

Quand les cotes de deux distributions ou plus qui ont des moyennes ou des écarts types différents doivent être comparés, il est utile de ***normaliser*** les cotes. La cote normalisée est appelée une ***cote z*** (variable centrée réduite) et on la calcule à l'aide de la formule

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

où μ correspond à la moyenne et σ est l'écart type. On obtient ainsi, en nombre d'écarts types, la position d'une cote x par rapport à la moyenne.

Exemple

Si la moyenne = 21 et que l'écart type est 4, calcule les cotes z des cotes réelles suivantes : 25, 17, 26,5, 16,5.

Solution

a) $z = \frac{(25 - 21)}{4} = 1$

b) $z = \frac{(17 - 21)}{4} = -1$

c) $z = \frac{(26{,}5 - 21)}{4} = 1{,}375$

d) $z = \frac{(16{,}5 - 21)}{4} = -1{,}125$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Quelle est ta matière la plus forte si tu as obtenu les notes suivantes? Discute de ta réponse.

Matière	Ta note	Moyenne de l'école	Écart type/école
Français	80	75	2
Mathématiques	85	75	5
Physique	82	75	5

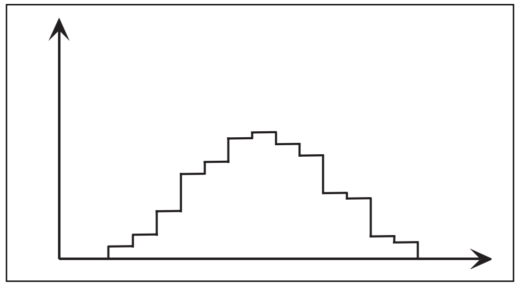
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

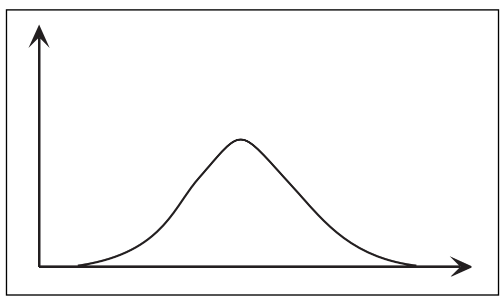
- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale**

  Quand les événements sont également probables, la distribution binomiale ressemble au graphique ci-dessous.



On voit une saillie au milieu et deux pointes.

Plus le nombre d'événements et d'essais est élevé, plus la courbe de la distribution devient régulière. Ainsi, si on lance 1000 pièces de monnaie un million de fois, la distribution aurait l'apparence suivante :



À ce point, notre distribution serait proche d'une distribution théorique, appelée la ***distribution normale***.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes *– suite*

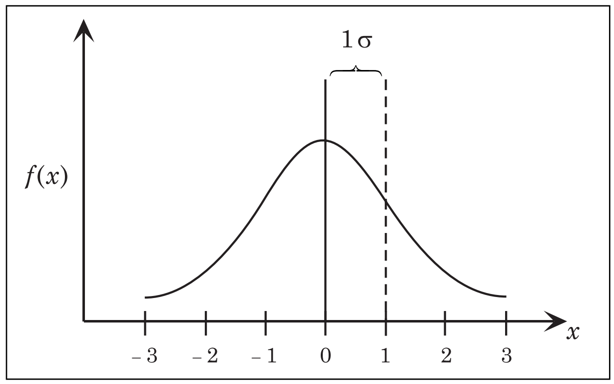
Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Géométriquement, toute courbe normale peut être transformée en une ***courbe normale standard***, dont la moyenne est 0 et l'écart type est 1. L'équation de cette courbe est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Avant que les calculatrices à affichage graphique ne deviennent des outils très puissants pour mesurer l'aire sous la courbe normale, la courbe normale standard servait à trouver les probabilités de toutes les distributions normales : on convertissait les cotes x de la fonction normale en cotes z de la fonction standard. Des tables qui donnent l'aire sous la courbe normale standard sont disponibles.

Exemple 1

Les notes à l'examen de mathématiques de secondaire 4 au Manitoba sont distribuées normalement avec une moyenne de 60,3 et un écart type de 10,5. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait obtenu une note :

a) inférieure à 52,4?

b) inférieure à 80?

c) supérieure à 90?

d) entre 60 et 80,5?

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans un échantillon de 122 personnes, la température corporelle moyenne est 36,8° C, avec un écart type de 0,35° C. Si on suppose une distribution normale, trouve :

a) le nombre de personnes dont la température est supérieure à 37,0° C

b) le nombre de personnes dont la température est inférieure à 36,0° C

De plus, estime l'étendue des températures mesurées dans l'échantillon.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes *– suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

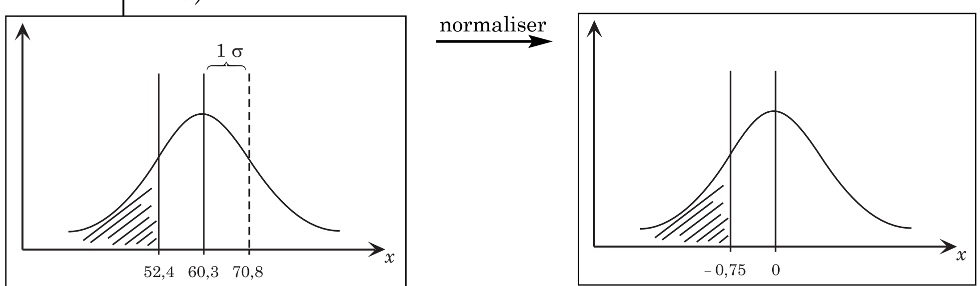
- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

Convertis la distribution normale en une distribution normale standard.

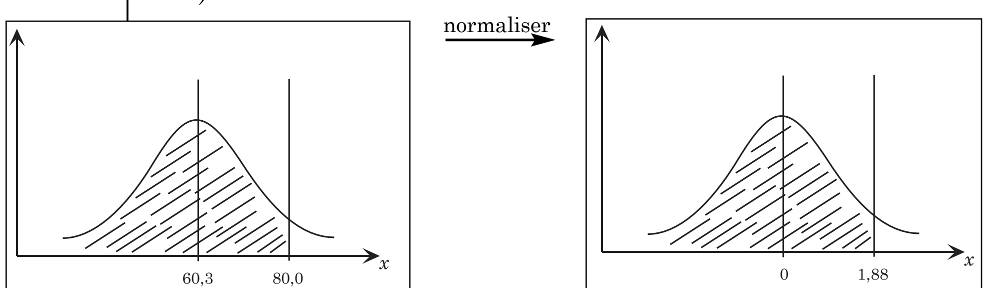
a)



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{54,2 - 60,3}{10,5} = -0,75$$

ce qui signifie que la cote 52,4 se trouve à $0,75\sigma$ unité au-dessous de la moyenne. La table nous donnerait 0,2358 comme réponse; elle n'est pas aussi précise que la réponse obtenue avec la calculatrice, qui affiche plus de chiffres après la virgule.

b)



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 60,3}{10,5} = 1,88$$

ce qui signifie que la cote de 80 se trouve à $1,88\sigma$ unités au-dessus de la moyenne. La table nous donnerait 0,9699 comme réponse.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes *– suite*

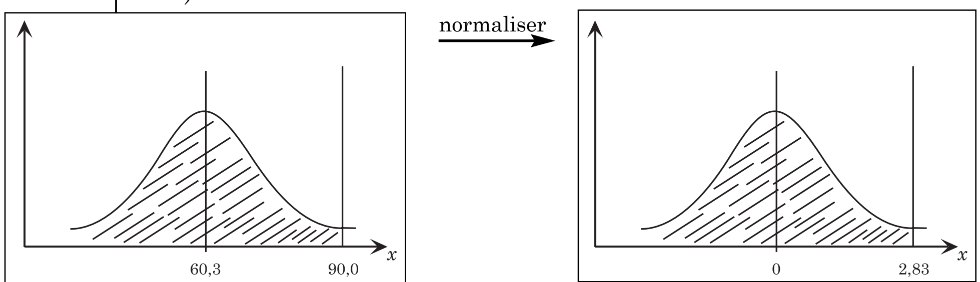
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

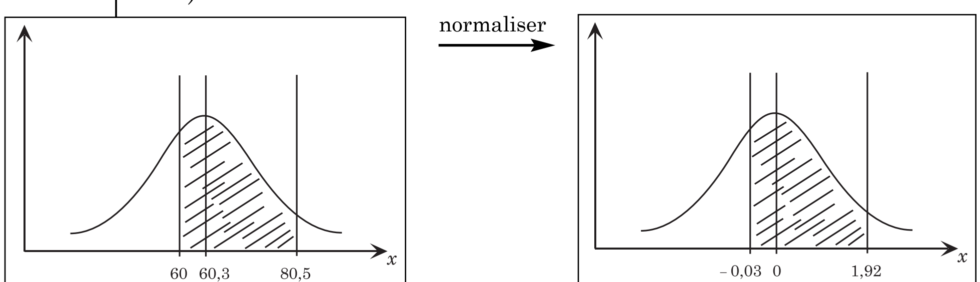
c)



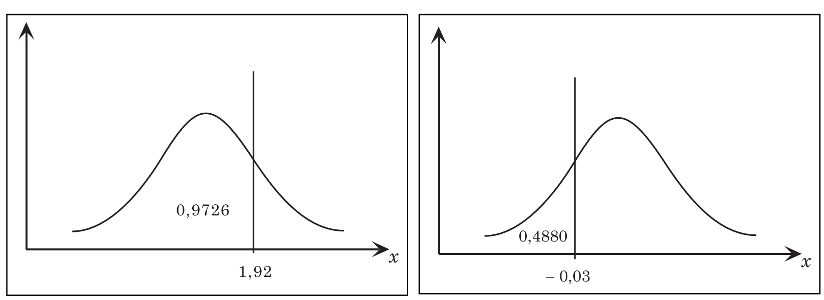
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{90-60,3}{10,5} = 2,83$$

ce qui signifie que la cote de 90 se trouve à 2,83σ unités au-dessus de la moyenne. La table donnerait 0,9977 comme réponse.
Par conséquent, $P(x > 90) = 1 - P(x \le 90) = 1 = 0,9977 = 0,0023$.

d)



$$z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{60-60,3}{10,5} = -0,03 \text{ et } z_2 = \frac{80,5-60,3}{10,5} = 1,92$$



La table donnerait des aires de : 0,4880 et 0,9726, respectivement. Par conséquent, $P(60 < x < 80,5) = 0,9726 - 0,4880 = 0,4846$.

– suite

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Suppose que x est distribué normalement, et que $\mu = 100$ et $\sigma = 10$. Trouve :

   a) $P(x < 115)$

   b) $P(x \geq 85)$

   c) $P(80 < x < 110)$

   d) $P(110 \leq x \leq 120)$

   e) $P(50 < x < 125)$

2. Si la variable aléatoire x est distribuée normalement, et que $\mu = 100$ et $\sigma = 15$, trouve la valeur de w tel que :

   a) $P(x \leq w) = 0{,}8776$

   b) $P(x \leq w) = 0{,}5342$

   c) $P(x > w) = 0{,}8776$

   d) $P(w \geq x) = 0{,}1234$

   e) $P(85 \leq x \leq w) = 0{,}5000$

   f) $P(\mu - w \leq x \leq \mu + w) = 0{,}6000$

   g) $P(\mu - w \leq x \leq \mu + w) = 0{,}8000$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-2 utiliser des cotes z et des tables de cotes z pour résoudre des problèmes *– suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 2

Le volume d'une canette de boisson gazeuse est normalement distribué autour d'une moyenne de 350 ml, avec un écart type de 1,5 ml.

a) Calcule la cote z pour une canette dont le volume est 355 ml.

b) Quel pourcentage de la production sera constitué de canettes dont le volume se trouve entre 350 ml et 355 ml?

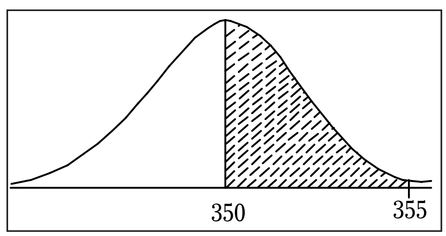
c) Quel pourcentage de la production sera constitué de canettes dont le volume est inférieur à 355 ml?

d) Si les canettes dont le volume est inférieur à 346 ml doivent être jetées, combien seront rejetées dans une série de 50 000?

Solution

a) $\dfrac{355-350}{1,5}=3,\overline{3}$ La cote z est 3,3.

b)



aire = pourcentage de la production ≈ 49,96%

c) environ 50 + 49,96 ou 99,96%

d) $\dfrac{346-350}{1,5}=-2,\overline{6}$ La cote z est –2,6.

0,4% (50 000) ≈ 200 canettes rejetées

Remarque : La calculatrice TI-83 donne une aire sous la courbe normale standard qui se situe entre deux courbes z quelconques. Appuie sur 2nd VARS pour obtenir le menu DISTR. Sélectionne 2:normalcdf et inscris les extrémités de l'intervalle.

Pour obtenir l'aire sous –2,6, tu pourrais entrer –7 et –2,6667 comme extrémités. Plus de 99,7 % de l'aire se trouve entre –3 et 3.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans la population, les notes obtenues au test de mesure du QI sont distribuées normalement autour d'une moyenne de 100, avec un écart type de 10. Si le test est administré à un groupe important de personnes :

a) Quelle est la proportion de personnes qui devraient avoir un QI entre 100 et 120?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne du groupe ait un QI supérieur à 120?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

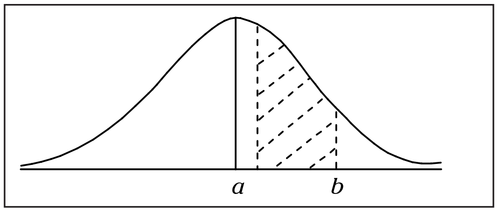
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

I-2 utiliser des cotes *z* et des tableaux de cotes *z* pour résoudre des problèmes *– suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

- **établir le lien entre la distribution normale et la courbe standard normale (suite)**

Exemple 3



a) Quelle est l'aire au-dessous de la courbe?

b) Si P($a < x < b$) = 0,4, quelle est l'aire au-dessous de la courbe dans l'intervalle $a < x < b$?

c) Si P($x < b$) = 0,9, calcule P($x > b$), puis la valeur de b.

Solutions

a) L'aire sous la totalité de la courbe normale est 1.

b) L'aire est la probabilité d'obtenir une valeur entre a et b. La réponse est 0,4.

c) P($x > b$) = 1 – 0,9 = 0,1

Sur la calculatrice graphique TI-83, sélectionne 3 inv Norm dans le menu DISTR. Inscris l'aire, la moyenne et l'écart type, soit inv Norm (0.1, 0, 1) ≈ –1,28. Dans ce cas, cela signifie que b se trouve à 1,28 écart type au-dessus de la moyenne.

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur les intervalles de confiance de grands échantillons

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale**

Dans de nombreux cas, une variable aléatoire normale constitue une excellente approximation d'une distribution binomiale pourvu que n, le nombre d'essais, soit important et p, le nombre de réalisations, ne soit ni trop petit ni trop près de 1.

Utilise la distribution normale pour trouver la distribution binomiale approximative seulement quand $np > 5$ et $nq > 5$ dans les deux produits.

Exemple 1

a) Trouve la probabilité exacte d'obtenir sept côtés face si on lance douze fois une pièce de monnaie non truquée.

b) Utilise une approximation normale pour trouver la probabilité d'obtenir sept côtés face si on lance une pièce de monnaie non truquée douze fois.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution – suite

a) $P(\text{7faces}) = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 792\left(\frac{1}{4096}\right) = \frac{99}{512}$

ou à l'aide d'une calculatrice
P(7 faces) = binompdf(12; 0,5; 7) = 0,19336

b) $np = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ et $nq = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6 > 5$

Par conséquent, l'approximation normale peut être utilisée. Pour ce faire, tu dois connaître la moyenne et l'écart type de la distribution.

$\mu = np = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ et $\sqrt{npq} = \sqrt{6\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} = 1{,}7321$

En plus, étant donné que la probabilité dans une distribution continue est 0, on utilise la correction de continuité où on tient pour acquis que les valeurs entières de la distribution discrète, par exemple 1, 2, 3, ..., correspondent aux intervalles [0,5; 1,5], [1,5; 2,5], [2,5; 3,5], ... Étant donné qu'une distribution normale est continue, alors P(7 faces) :

- dans une distribution binomiale = P(6,5 ≤ faces ≤ 7,5) = 0,19336
- dans une distribution normale = normalcdf(6,5; 7,5; 6, ...) = 0,19318, qui diffère de la valeur binomiale réelle de 0,19336 – 0,19318 = 0,00018 seulement. Ainsi, l'approximation est très adéquate.

Exemple 2

On lance un dé non truqué 60 fois. Utilise une approximation normale pour calculer la probabilité d'obtenir :

a) 10 cinq

b) au plus 10 cinq

c) moins de 10 cinq

d) entre 8 et 12 cinq

e) de 8 à 12 cinq

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Détermine l'intervalle normal qui serait utilisé pour trouver de façon approximative les probabilités binomiales suivantes :
   a) $P(60 < x < 70)$
   b) $P(x \geq 25)$
   c) $P(x < 25)$
   d) $P(638 < x \leq 700$
   e) $P(3 \leq x \leq 4)$
   f) $P(17 \leq x < 20)$
   g) $P(x = 10)$

2. On sait que 30 % des objets fabriqués par la compagnie Mauvais gadgets sont défectueux. Si 1 200 de ces gadgets sont choisis, quelle est la probabilité que plus de 500 seront défectueux?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

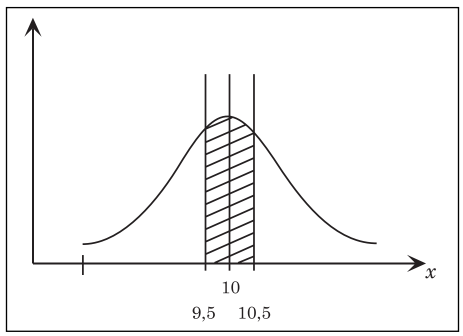
Solution

$$np = 60\left(\frac{1}{6}\right) = 10 > 5 \text{ et } nq = 60\left(\frac{5}{6}\right) = 50 > 5$$

Par conséquent, l'approximation normale peut être utilisée. De plus,

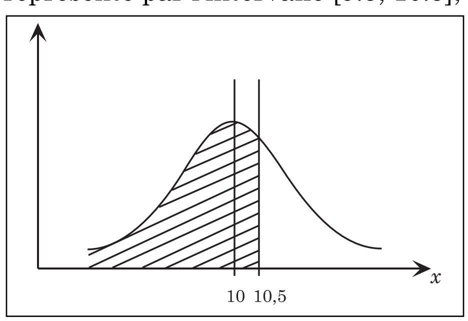
$$\mu = np = 10 \text{ et } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\left(\frac{5}{6}\right)} = 2{,}89.$$

a) P(10 cinq) = P(9,5 ≤ cinq ≤ 10,5) =
normalcdf(9.5, 10.5, 10, 2,89) = 0,13736



b) P(cinq ≤ 10) = P(–1E99 ≤ cinq ≤ 10,5) =
normalcdf(–1E99, 10.5, 10, 2.89) = 0,56868

Remarque : La limite supérieure étant 10,5, le nombre 10, représenté par l'intervalle [9.5, 10.5], est inclus.



– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Une distribution binomiale, x, a une moyenne μ et un écart type σ. Décris, en tes propres mots, comment tu pourrais calculer de façon approximative $P(a < x < b)$ à l'aide de l'approximation normale. Tiens pour acquis que $np > 5$ et $nq > 5$.

Problèmes

1. Si tu lances 2 dés non truquées 10 000 fois, trouve la probabilité d'obtenir une somme de 8 entre 1 350 et 1 400 fois.
2. Le bon vieux Harry, le meilleur vendeur d'autos d'occasion chez la Ville de l'auto, vend une automobile à 30 % des consommateurs qu'il rencontre. Si Harry rencontre 2 300 consommateurs, quelle est la probabilité qu'il vende au moins 700 voitures?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

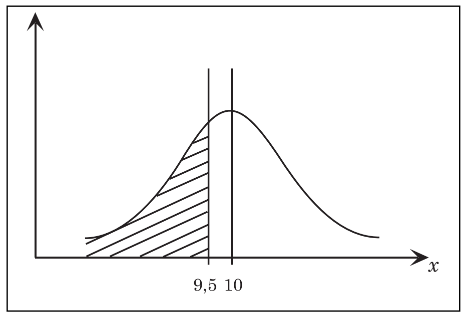
- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

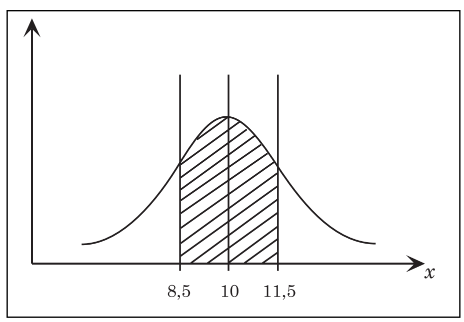
c) P(cinq < 10) = P(–1E99 ≤ cinq ≤ 9,5) =
normalcdf(–1E99, 9.5, 10, 2.89) = 0,43132

Remarque : La limite supérieure étant 9,5, le nombre 10, représenté par l'intervalle [9,5; 10,5], est exclu.



d) P(8 < cinq < 12) = P(8,5 < cinq < 11,5) =
normalcdf(8.5, 11.5, 10, 2.89) = 0,39626

Remarque : La limite inférieure étant 8,5, le nombre 8 est exclu, et la limite supérieure étant 11,5, le nombre 12 est aussi exclu.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

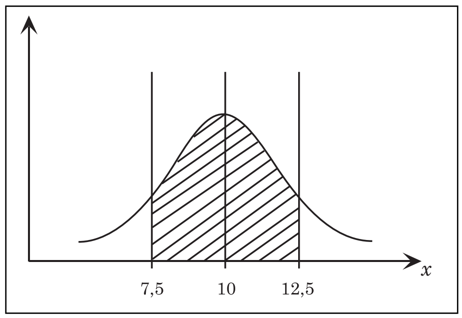
- **déterminer les probabilités binomiales à l'aide d'une approximation normale (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

e) P(8 ≤ cinq ≤ 12) = P(7,5 ≤ cinq ≤ 12,5) =
normalcdf(7.5, 12.5, 10, 2.89) = 0,61299

Remarque : La limite inférieure est 7,5, afin d'inclure le nombre 8, et la limite supérieure est 12,5, afin d'inclure le nombre 12.



- **construire des intervalles de confiance pour la population**

Dans cette section, les statistiques relatives à un échantillon sont utilisées pour faire des prédictions sur la moyenne de la population. Cette partie du cours de statistique est appelée ***statistique inférentielle***.

Si la prédiction de μ doit être sûre 95 % du temps, trouve l'intervalle $[a, b]$ tel que $\mu \in [a, b]$ 95 % du temps. Si elle doit être sûre 99 % du temps, trouve l'intervalle $[c, d]$ tel que $\mu \in [c, d]$ 99 % du temps.

Les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ sont les intervalles de confiance de 95 % et de 99 % pour la moyenne de la population. Ces ***intervalles de confiance*** sont ceux que les statisticiens utilisent le plus souvent. Les nombres réels appartenant à un intervalle de confiance, par exemple a et b de $[a, b]$, sont appelés les ***limites de confiance***.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu**

  Le ***théorème de la limite centrale*** énonce que :

  Si la taille de l'échantillon, n, est importante ($n \geq 30$), la distribution des moyennes des échantillons, $\overline{x}$, forme une distribution normale approximative qui a les caractéristiques suivantes :
  a) moyenne = μ, et
  b) écart type = $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

  Le théorème de la limite centrale peut être utilisé pour trouver l'intervalle de confiance de 95 % de la moyenne de la population, μ, comme suit :

  - On utilise les cotes z pour une distribution normale ***standard***. Par conséquent,

    $$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

    où $\overline{x}$ est une moyenne de l'échantillon quelconque, μ est la moyenne des moyennes et, selon le théorème de la limite centrale, la population n est la taille de l'échantillon et σ est l'écart type de la population.

  - Un intervalle de confiance de 95 % suppose que $z \in [-1.96, 1.96]$. Par conséquent,

    $$-1,96 \leq z \leq 1,96$$

    $$-1,96 \leq \frac{\overline{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \leq 1,96$$

    $$-1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \overline{x} - \mu \leq 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

    $$-\overline{x} - 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq -\mu \leq -\overline{x} + 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

    $$\overline{x} + 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq \mu \geq \overline{x} - 1,96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

    ou l'intervalle de confiance de 95 % de μ est

    $$\left[\overline{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

    Si on poursuit le raisonnement, on pourrait déduire qu'un intervalle de confiance de 99 % de μ est :

    $$\left[\overline{x} - 2,58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

– suite

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Liens**	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Une population a un écart type de 5 et une moyenne μ inconnue. Trouve :

a) l'intervalle de confiance de 95 % de μ si la moyenne d'un échantillon de taille 45 est de 30;

b) l'intervalle de confiance de 95 % de μ si la moyenne d'un échantillon de taille 80 est de 30.

Donne tes commentaires sur les différentes réponses possibles en (a) et en (b).

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons
– suite

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu (suite)**

Exemple

a) Trouve l'intervalle de confiance de 95 % de la moyenne de la population, μ, si $\sigma = 9$ et si un échantillon de taille 49 a une moyenne de 50.

b) Répète le même processus pour trouver l'intervalle de confiance de 99 %.

Solution

a) Si tu poses un intervalle de confiance de 95 %, tu obtiens :

$$\left[\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[50 - 1{,}96\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right), 50 + 1{,}96\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right)\right]$$

$$= [50 - 2{,}52;\ 50 + 2{,}52] = [47{,}48;\ 52{,}52]$$

La moyenne de la population se situe entre 47,48 et 52,52, 95 % du temps.

b) Si tu considères un intervalle de confiance de 99 %, tu obtiens :

$$\left[\bar{x} - 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[50 - 2{,}58\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right), 50 + 2{,}58\left(\frac{9}{\sqrt{49}}\right)\right]$$

$$= [50 - 3{,}32;\ 50 + 3{,}32] = [46{,}68;\ 53{,}32]$$

À l'aide de la calculatrice TI-83, les intervalles ci-dessus peuvent être calculés directement et très rapidement. Suis les étapes suivantes pour calculer l'intervalle de confiance de 95 % demandé à l'exemple 1.

1. Appuie sur STAT et déplace le curseur vers TESTS.
2. Sélectionne 7:Zinterval ....
3. Sur la ligne Inpt: Data Stats line, choisis Stats.
4. Inscris les données suivantes :

   σ : 9

   x : 50

   n : 49

   C-Level (niveau C) : 0,95
5. Place le curseur sur le mot Calculate et appuie sur ENTER.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans cette question, suppose que l'écart type de la population est le même que l'écart type des échantillons.

Dans une usine, la taille des hommes suit une distribution normale dont l'écart type est 8 cm.

a) Quel est l'intervalle de confiance de 95 % de la taille moyenne si un échantillon aléatoire de 36 hommes nous donne une taille moyenne de 169 cm?

b) Quel est l'intervalle de confiance de 95 % de la taille moyenne si un échantillon aléatoire de 225 hommes nous donne une taille moyenne de 169 cm?

c) Commente les réponses à (a) et à (b) ci-dessus.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

I-3 utiliser la distribution normale et l'approximation normale de la distribution binomiale pour résoudre des problèmes sur des intervalles de confiance de grands échantillons

Communications
✔ **Liens**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **prédire μ quand l'écart type de la population, σ, est connu (suite)**

  Tu devrais obtenir Zinterval

(47,48, 52,52)	concorde avec la réponse à
$\overline{x}$: 50	l'exemple 1
n : 49	

  Suis les mêmes étapes pour trouver l'intervalle de confiance de 99 % en utilisant l'option C-Level : 0.99. Tu obtiendras une réponse plus précise que la valeur arrondie obtenue avec la valeur 2,58 à l'exemple 2.

  Réponse : [46,688, 53,312]

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Annexe I-1

Introduction

Les élèves pourront aborder cette unité dans leurs temps libres. Pour les aider, l'enseignant devrait connaître le domaine de la statistique et les fonctions de la calculatrice, de même que le contenu des leçons. On leur recommande de faire l'unité avant de la remettre aux élèves.

Plusieurs exercices exigent la collecte de données dans la classe. L'enseignant peut diriger cet exercice sans y consacrer trop de temps en classe. Les données recueillies peuvent être copiées ou affichées. On trouve dans les notes à l'intention de l'enseignant des exercices pratiques supplémentaires liés à certaines leçons, ainsi que les solutions (annexe I-3).

Les premières quatre leçons abordent des sujets avec lesquels beaucoup d'élèves sont familiers, en plus de leur présenter la calculatrice TI-83.

À compter de la leçon 5, le matériel présenté est nouveau et exigera probablement plus de temps.

Leçon 1 : Variables nominales

Contexte

Statistique Canada rapporte que le taux de chômage a atteint 9,7 % en mai après la désaisonnalisation.

Que signifie ce pourcentage? Comment Statistique Canada a recueilli cette information? Quel est le degré de précision?

Points importants

Tu dois voir que :

- les données sont des nombres qui appartiennent à un contexte qui intéresse les statisticiens;
- les graphiques à barres nous donnent une représentation visuelle des distributions;
- les calculatrices à affichage graphique peuvent effectuer des opérations sur les variables avant que nous analysions les données;
- nous pouvons commencer à apprécier le type de questions auquel la réflexion statistique peut répondre.

Activités de mise en marche

1. Écris une phrase pour décrire ce que le mot « statistique » signifie pour toi. Utilise des phrases complètes, bien construites et correctes sur le plan grammatical. Ta capacité à communiquer tes idées constitue une partie aussi importante de ton travail que ta capacité à manipuler des données.
2. Inscris tes réponses aux quatre questions suivantes sur la page « Enquête numéro un », que ton enseignant distribuera.
   - Quel est ton sexe?
   - Lequel parmi les trois mots suivants décrit le mieux ton allégeance politique : libérale, modérée ou conservatrice?
   - Le Canada devrait-il abolir la pièce de 1 cent?
   - Où places-tu la statistique quant à sa valeur pour la société sur une échelle de 1 (totalement inutile) à 9 (extrêmement importante)?
3. Combien de mots contient la phrase que tu as écrite en réponse à la question 1?
4. Inscris le nombre de lettres que contient chacun des mots de ta réponse à la question 1.

Tu as recueilli des **données**. Les données sont toujours entourées d'un contexte particulier. Sans ce contexte, ce ne sont que des chiffres. Tu dois toujours te reporter au contexte dans lequel sont inscrites les données pour décrire un problème ou une expérience.

Les caractéristiques sur lesquelles tu as recueilli des données sont des **variables**. Certaines variables peuvent avoir toute une gamme de valeurs numériques, et sont à ce titre appelées des **variables de mesure**. Parallèlement, les variables nominales servent à enregistrer des désignations de catégorie. Les variables nominales **binaires** peuvent appartenir à deux catégories seulement. Différentes méthodes statistiques sont utilisées selon le type de variable mesuré.

Leçon 1 : Variables nominales (suite)

Développement

1. Indique s'il s'agit d'une variable de mesure ou d'une variable nominale dans chacun des cas ci-dessous. S'il s'agit d'une variable nominale, indique si elle est binaire.
   a) le poids d'une personne
   b) le sexe d'une personne
   c) l'allégeance politique d'un électeur
   d) la réponse à la question sur la pièce de monnaie (page I-65)
   e) le nombre de provinces qu'une personne a visitées
   f) le fait qu'une personne a déjà visité le Mexique ou non
   g) le volume d'une tasse
   h) le nombre de mots dans une phrase

2. Dans la question 4 de la page I-65, la variable était le nombre de lettres dans chaque mot. Dans quel type de variable classes-tu la taille d'un mot?

3. Suppose que tu as classé chacun des mots selon les critères suivants :

   - 1 à 3 lettres — petit mot
   - 4 à 6 lettres — mot moyen
   - 7 à 9 lettres — mot long
   - 10 lettres et plus — mot très long

   Quel type de la variable correspond à la taille d'un mot maintenant?

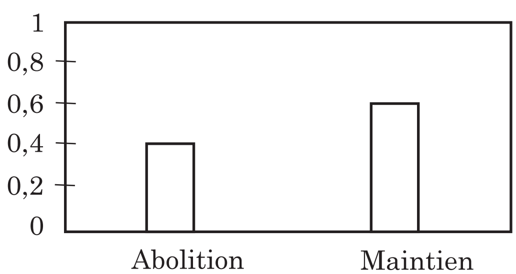
   Les valeurs prises par une variable varient selon le cas. Les données affichent la dispersion. Le modèle de cette dispersion est appelé la distribution de la variable. Une bonne partie du travail du statisticien consiste à analyser des distributions de variables, pour les afficher, les résumer et les décrire.

4. Combien d'élèves ont répondu à la question sur l'abolition de la pièce de 1 cent?

5. Combien d'élèves veulent qu'elle soit abolie?

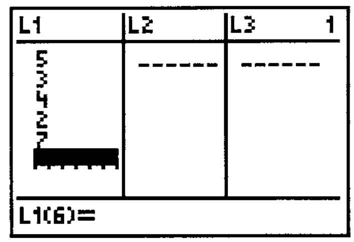
6. À quelle proportion du groupe cela correspond-il?

7. Trace un graphique à barres comme le suivant, avec deux barres de largeur égale.

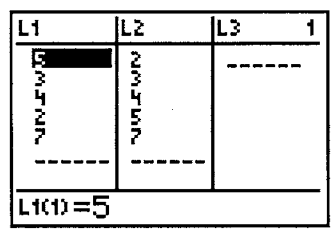


Leçon 1 : Variables nominales (suite)

8. Entrée de données dans la calculatrice TI-83 - Méthode 1.
   - Mets la calculatrice en marche.
   - Appuie sur le bouton STAT.
   - Appuie sur ENTER ou sur 1 pour afficher l'écran de modification des données statistiques. Tu devrais voir trois colonnes avec des en-têtes L1, L2 et L3. Dans le cas contraire, appuie sur le bouton STAT de nouveau et sur 5 ou sur SetUpEditor, puis sur ENTER. L'écran affichera le mot DONE. Appuie sur STAT et sur ENTER de nouveau pour afficher les trois colonnes.
   - Si des données sont déjà inscrites dans L1, appuie sur le bouton de défilement vers le haut jusqu'à superposer la fenêtre de sélection ombragée sur l'en-tête; appuie sur CLEAR et sur ENTER pour effacer le contenu de la liste.



   - Tu peux maintenant entrer des données dans L1. Entre les nombres nécessaires, puis appuie sur ENTER. Essaie d'inscrire les nombres suivants : 5, 3, 4, 2, 7.
   - Quitte l'éditeur de statistiques en appuyant sur 2nd, puis sur QUIT.
9. Tri de données
   - Copie des données de la colonne L1 à la colonne L2. Pour ce faire, place le curseur sur l'en-tête L2, appuie sur 2nd L1 puis sur ENTER. Les données seront affichées à la fois dans L1 et dans L2.
   - Appuie sur le bouton STAT, puis sélectionne SORTA (, puis appuie sur 2nd et sur L2 and), puis enfin sur ENTER pour trier la liste 2 en ordre croissant. L'écran d'édition des statistiques aura l'apparence ci-contre. Tu peux aussi faire un tri en ordre décroissant.

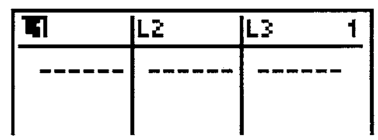


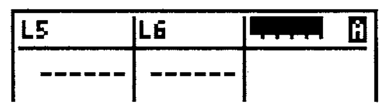
Leçon 1 : Variables nominales (suite)

10. Nous utiliserons la calculatrice pour examiner les cotes accordées à la valeur de la statistique dans la société.

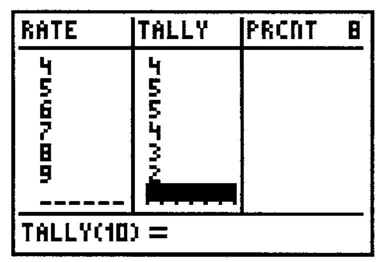
    • Premièrement, il faut calculer les réponses dans un tableau comme celui ci-dessous.

Cote	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul									





    • On peut maintenant placer les données dans une nouvelle liste appelée COTE. Appuie sur le bouton STAT, sélectionne SetUpEditor puis appuie sur ENTER. Appuie sur le bouton STAT de nouveau, sélectionne EDIT et sur la flèche de défilement vers le haut. L'écran ci-contre devrait être affiché. (Ne tiens pas compte des données affichées dans les listes.)



    • Appuie sur la flèche vers la droite jusqu'à ce que l'écran suivant s'affiche. Entre le mot COTE dans l'espace réservé à l'en-tête de la liste.
    • Déplace le curseur à droite une autre fois pour entrer le mot CALCUL.
    • Déplace-toi à droite de nouveau pour entrer le mot POURC.
    • Inscris maintenant les données dans les deux listes. Ton écran aura cette apparence.

11. Tu peux trouver le pourcentage obtenu pour chaque cote accordée. Déplace ton curseur sur le titre POURC, entre le calcul affiché, puis appuie sur ENTER.

    Remarque : Utilise le nombre d'élèves de ta classe au lieu du nombre 30 affiché.

Résumé

La statistique est la science des ***données***. Peut-être ces activités t'ont-elles donné une meilleure vision de ce que sont des données. Il ne s'agit pas simplement de nombres, mais de nombres qui ont une certaine signification dans un contexte donné. Il faut voir les données dans leur contexte.

Tu as découvert qu'il existait des variables nominales et des variables de mesure, et qu'on pouvait analyser leur distribution de façon visuelle. Tu as représenté des variables nominales à l'aide d'un graphique à barres. La prochaine leçon présente une technique de traçage du graphique des variables de mesure.

Leçon 2 : Variables de mesure

Contexte

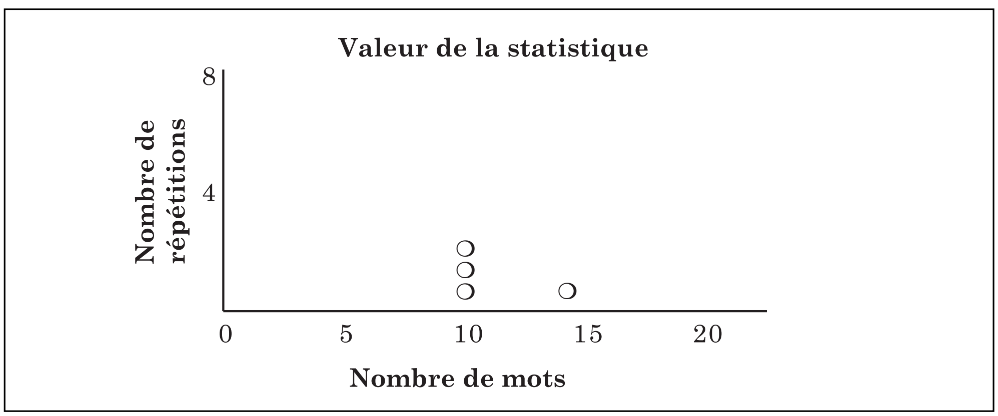
Nous avons déjà vu qu'un ensemble de données avait une ***distribution*** et tu as construis des ***graphiques à barres*** pour représenter la distribution d'ensembles des données qui comprennent des variables nominales. Nous allons maintenant étudier la distribution d'ensembles de données à l'aide de variables de ***mesure***. Nous étudierons plus particulièrement une méthode utilisée très communément pour afficher ces données. De plus, nous verrons certains termes utilisés pour décrire les ensembles de données et leur distribution.

Points importants

- Élaborer une liste de termes pour décrire la distribution d'un ensemble de données. (Tu as déjà vu ces termes auparavant.)
- Étudier les **graphiques par points** pour afficher une distribution d'un ensemble de données numériques.
- Reconnaître les sources de **biais** dans les ensembles de données, selon la source.

Activités de mise en marche

1. Dans la dernière leçon, tu as écris une phrase pour décrire ce que la statistique représentait pour toi. Combien de mots comprenait ta phrase? Construis un ***graphique par points*** à partir des réponses des élèves de ta classe. Il s'agit d'un graphique simple, comme celui qui apparaît ci-dessous, avec un point pour chaque réponse. L'exemple ci-dessous comprend trois phrases de dix mots et une phrase de quatorze mots.



a) Combien y a-t-il de réponses?
b) Quel est l'***étendue*** des données?
c) Quelle est la valeur ***médiane***?
d) Quel est le ***mode***?
e) Quelle est la longueur ***moyenne***?
f) Écris une phrase qui décrit la distribution de la longueur de la phrase.

Nous avons fait un ***recensement***. Nous avons recueilli des données sur **la population** entière de la classe. La plupart du temps, les statisticiens ne peuvent pas recueillir des données sur toute une population, parce qu'elle est trop large ou inaccessible. Les frais d'un recensement deviennent vite astronomiques.

Leçon 2 : Variables de mesure (suite)

Étant donné qu'il est souvent impossible de faire un recensement, nous apprendrons comment utiliser des données tirées d'un ***échantillon*** de la population. La prochaine question présente le concept de l'échantillonnage.

2. Je me demande combien de provinces et d'États un étudiant type de notre école a visités? Combien de provinces et d'États as-tu visités?
   a) Trace un graphique par points des données recueillies dans ta classe.
   b) Crois-tu que cette distribution nous donne une bonne idée de l'expérience de voyage d'un élève type de l'école? Écris une phrase ou deux pour expliquer ta réponse.

Nous avons travaillé sur un ***échantillon***. Puisque nous avons recueilli des ***statistiques*** sur une partie de la ***population*** de l'école.

Si notre classe n'est pas formée d'un groupe type d'élèves, on peut avoir une idée biaisée de l'expérience de voyage de l'élève type d'une école. Le ***biais***, ou la distorsion, résulte de données recueillies auprès d'un échantillon qui n'est pas représentatif de la population. Par exemple, si nous avions calculé l'âge moyen des élèves dans cette classe, nous pourrions nous attendre à ce que notre résultat produise une estimation biaisée de l'âge moyen des élèves de l'ensemble de l'école.

Quand on recueille des ***statistiques*** auprès d'un échantillon de la ***population***, il faut prendre garde à ne pas biaiser l'information si le but est de trouver les caractéristiques de la population.

3. Une épicerie compose un plateau de tacos et de diverses sauces et les fait goûter aux clients. On a confié ce travail à une étudiante qui travaille à temps partiel. Elle inscrit le type que chaque client préfère. Décris les sources possibles de biais dans ce contexte si la direction de l'épicerie a pour objectif de connaître les préférences de sa clientèle.
4. Un député a créé un site Internet où il veut recevoir des réponses par courriel à la question suivante : « Le gouvernement devrait-il adopter la Loi sur le contrôle des armes? ». Il a reçu 342 réponses, dont 311 sont négatives.
   a) Quelle population est en cause?
   b) Quelle variable est mesurée?
   c) Quel échantillon est utilisé?
   d) Discute des sources de biais inhérentes à ce type d'enquête.

Résumé

- Le centre d'une distribution est en règle générale l'aspect le plus important. La moyenne, le point médian et le mode donnent de l'information sur la position des données.
- Les graphiques par points nous montrent comment les données sont distribuées, ce qui nous permet de déterminer de façon visuelle le centre et la dispersion de la distribution.
- Il faut savoir si les données portent sur une population ou sur un échantillon, sans quoi les données sont de peu d'utilité. Nous appelons une caractéristique de la population un ***paramètre***. Nous appelons une caractéristique d'un échantillon une ***statistique***.
- Les biais portent atteinte à leur valeur des données. Il faut les éviter autant que possible.

Leçon 3 : Échantillon aléatoire simple

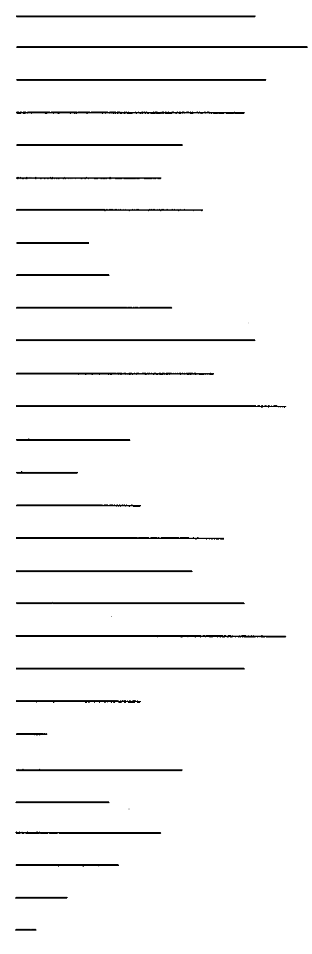
Contexte

Tu as déjà vu ce qu'étaient les biais d'échantillonnage. Tu peux les supprimer au moyen d'un ***échantillon aléatoire simple***. Il s'agit d'un échantillon sélectionné en affectant à chacun des membres d'une population un nombre, puis en choisissant un ensemble de nombres à partir d'un tableau de nombres aléatoires ou d'une liste générée par le générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice. On peut ainsi éliminer les biais.

Points importants

- Effectuer une expérience avec un échantillon aléatoire simple (ÉAS).
- Déterminer des facteurs qui ont une incidence sur la dispersion de la distribution d'un échantillon.

Activités de mise en marche



1. Comment éviter les biais d'échantillonnage? En utilisant un ***échantillon aléatoire simple***. Pour ce faire, il faut tout d'abord numéroter les lignes à droite de 1 à 30.
2. Mets ta calculatrice en marche et efface l'écran.
3. Appuie sur le bouton MATH et sélectionne le menu PRB.
4. Sélectionne randlnt, puis entre 1, une virgule et 30.
5. Ferme les parenthèses; ton écran aura cette apparence :

   ```
   randInt(1,30)
   ```

   appuie sur ENTER.
6. Un entier entre 1 et 30 est affiché. Encercle ce nombre à droite pour sélectionner une ligne.
7. Appuie sur ENTER de nouveau pour obtenir un autre nombre généré aléatoirement. Si le nombre est le même que le précédent, n'en tiens pas compte et appuie sur ENTER de nouveau jusqu'à ce qu'un nouveau nombre soit affiché.
8. Choisis deux autres nombres de cette façon, de sorte à sélectionner quatre lignes.
9. Mesure ces lignes au millimètre près.
10. Calcule la longueur moyenne.
11. Fabrique un graphique par points des longueurs moyennes calculées par tous les élèves de la classe. Discute de la distribution des longueurs moyennes.

Leçon 3 : Échantillon aléatoire simple (suite)

Déroulement

- Répète les étapes de la page I-10, en générant cette fois un échantillon de 10 nombres choisis aléatoirement entre 1 et 30 et en trouvant la longueur moyenne des lignes. Fabrique un graphique par points de la distribution des longueurs moyennes. Est-il différent du premier? Si oui, de quelle façon?
- La ***taille de l'échantillon*** a-t-elle une incidence sur la dispersion des ***statistiques*** que tu as recueillies?
- La forme de la distribution est-elle prévisible? Aurais-tu pu prédire la dispersion des longueurs moyennes si tu avais choisi 15 lignes?
- Crois-tu être en mesure de prédire de façon raisonnable la longueur moyenne des 30 lignes? Fais un estimé. Marque cette valeur estimée sur ton graphique par points.
- Mesure toutes les lignes au millimètre près et enregistre leur longueur. Trouve la longueur moyenne. (Cette valeur est un ***paramètre*** de la ***population*** des lignes).
- Marque cette longueur moyenne sur tes graphiques par points. Est-elle proche de la valeur que tu as estimée?

Résumé

Tu as étudié des ***échantillons aléatoires simples*** pour une variable de mesure (longueur de ligne). Tu as utilisé des graphiques par points pour illustrer la distribution de l'échantillon des longueurs.

Tu as probablement remarqué que, quand la taille de l'échantillon est plus grande, les moyennes varient moins.

Leçon 4 : Description de distributions

Contexte

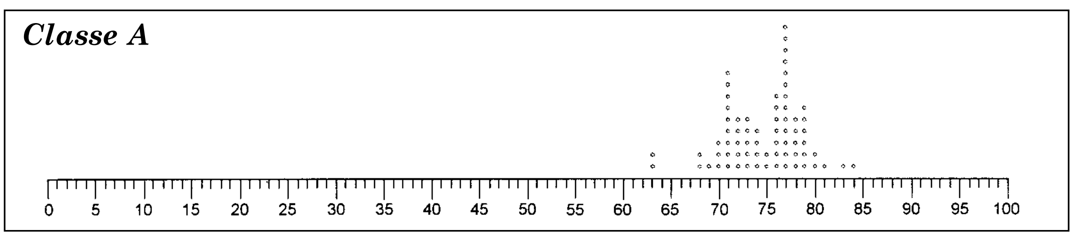
Tu sais que les données varient d'un échantillon à l'autre. Dans cette leçon, tu verras de nombreuses distributions de fréquence qui te permettront de connaître des caractéristiques que les statisticiens jugent importantes quand ils décrivent les distributions de fréquence.

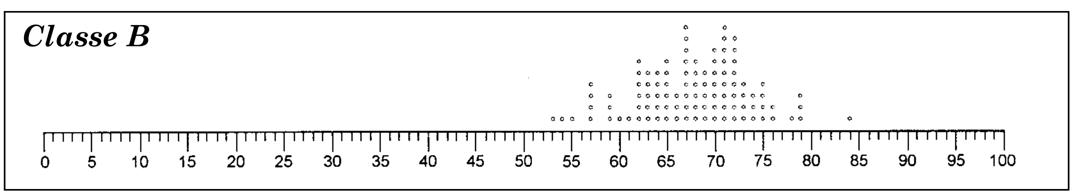
Points importants

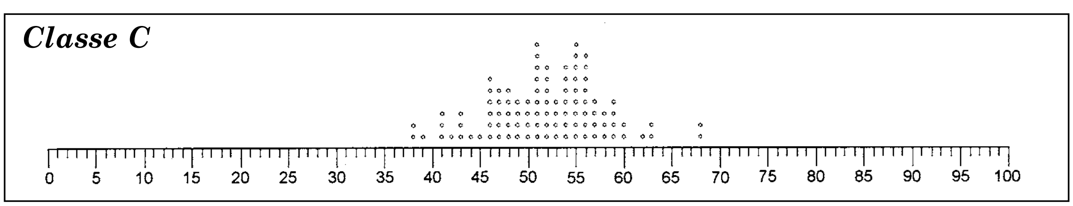
- Décrire la ***dispersion*** d'une distribution.
- Apprendre des termes qui décrivent la forme d'une distribution.
- Apprendre la signification des termes suivants : ***sommets***, ***grappe ou groupe***, valeur aberrante et ***granularité***.
- Comparer différentes façons de décrire le centre d'une distribution.
- Fabriquer un ***diagramme à tiges*** pour illustrer les variables de mesure d'une distribution.
- Utiliser le résumé en cinq points de la ***distribution*** d'une variable.
- Fabriquer un diagramme en boîte pour illustrer une distribution avec son centre et sa dispersion.
- Fabriquer un histogramme pour illustrer la distribution d'une variable.

Activités de mise en marche

1. Nos problèmes d'introduction sont fondés sur ces graphiques par points, qui illustrent les notes obtenues par les élèves de 12 classes à un examen.

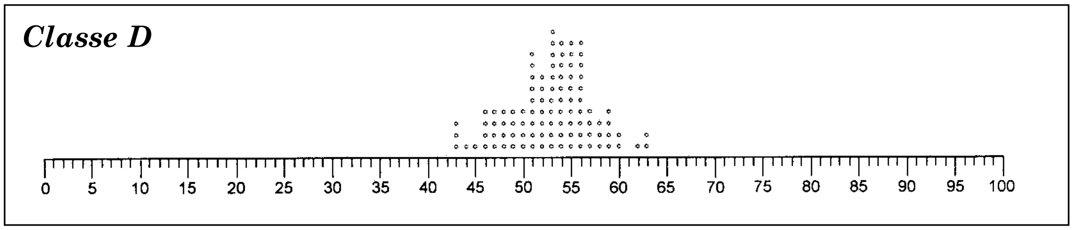


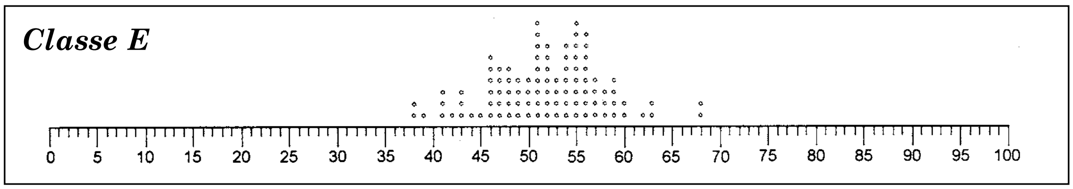


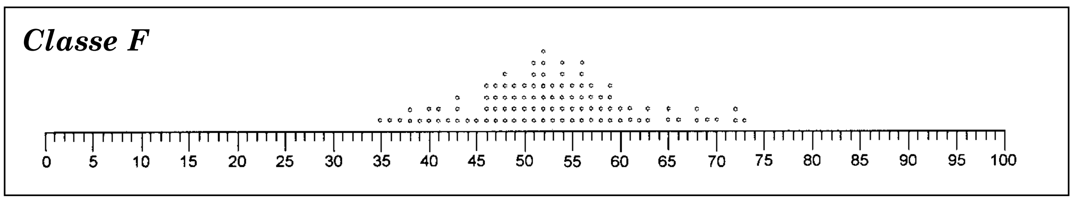


   a) Quelle est la différence la plus notoire entre les distributions des notes des classes A, B et C?

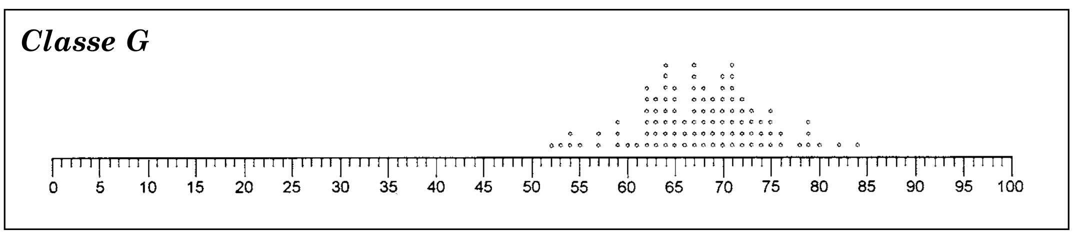
Leçon 4 : Description de distributions (suite)

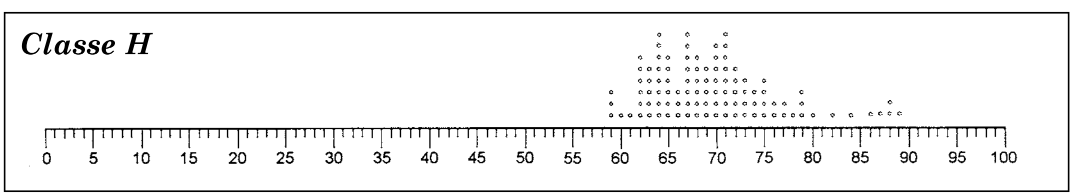


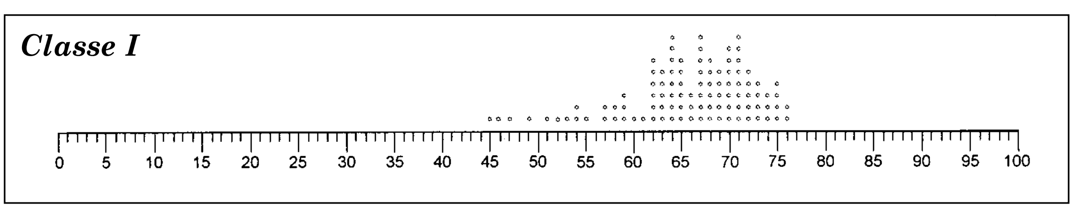




b) Quelle est la différence la plus notoire entre les distributions des notes des classes D, E et F?



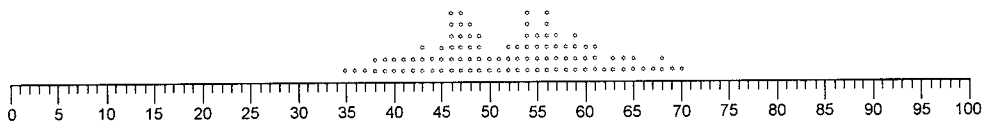




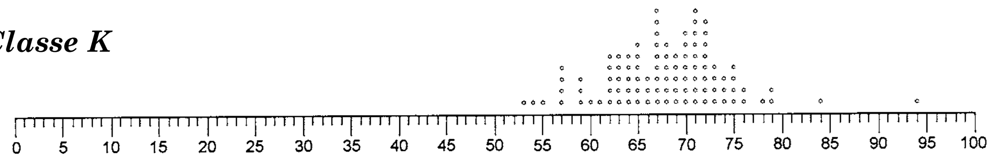
c) Quelle est la différence la plus notoire entre les distributions des notes des classes G, H et I?

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

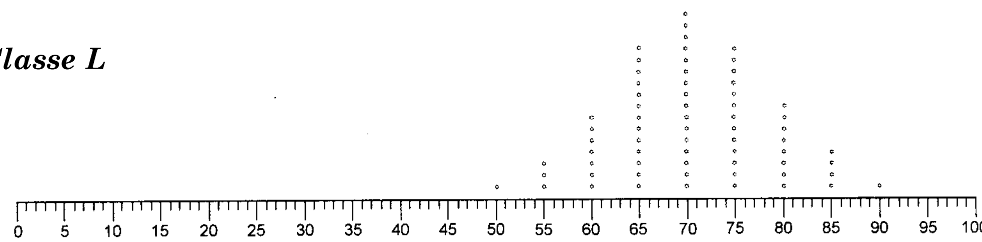
Classe J



Classe K



Classe L



d) Quelle est la caractéristique la plus notoire entre les distributions des notes de la classe J?

e) Quelle est la caractéristique la plus notoire entre les distributions des notes de la classe K?

f) Quelle est la caractéristique la plus notoire entre les distributions des notes des classes L?

Ces notes hypothétiques illustrent six caractéristiques qui sont souvent importantes dans l'analyse d'une distribution de données :

1. Le centre d'une distribution est en règle générale l'aspect le plus important à remarquer et à décrire. Autour de quelle valeur les données sont-elles centrées?
2. La dispersion d'une distribution représente la deuxième caractéristique en importance. À quel point les données sont-elles dispersées?
3. La forme de la distribution peut aussi nous révéler des choses. Certaines formes ont été baptisées. Une distribution est dite ***symétrique*** si une moitié est plus ou moins le reflet de l'autre - la courbe ressemble à une cloche. Une distribution est dite ***asymétrique*** si une sorte de queue se prolonge dans une direction. Elle est asymétrique vers la gauche si la queue est dirigée vers la gauche. Elle est asymétrique vers la droite si la queue est dirigée vers la droite.
4. Les valeurs ***aberrantes*** sont des points de données qui sont éloignés du groupe de points. Il faut les examiner de près.
5. Si on constate la présence de valeurs à des intervalles fixes, on parle de ***granularité*** de la distribution.

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

Il ne s'agit pas de règles rigides. Elles sont là simplement pour rappeler les caractéristiques qui méritent qu'on s'y attarde. Elles ne sont pas toujours pertinentes, et d'autres caractéristiques d'une distribution sont aussi dignes d'intérêt.

Déroulement

1. On t'a déjà présenté les ***graphiques à tiges*** dans d'autres cours de mathématiques. Nous allons fabriquer un graphique à tiges avec les données ci-dessous, qui indiquent le temps en années du règne de différents souverains de l'Angleterre.

Souverain	Années	Souverain	Années	Souverain	Années	Souverain	Années
Guillaume I	21	Édouard III	50	Édouard VI	6	Georges I	13
Guillaume II	13	Richard II	22	Marie I	5	Georges II	33
Henri I	35	Henri IV	13	Élizabeth I	44	Georges III	59
Étienne	19	Henri V	9	Jacques I	22	Georges IV	10
Henri II	35	Henri VI	39	Charles I	24	Guillaume IV	7
Richard I	10	Édouard IV	22	Charles II	25	Victoria	63
Jean	17	Édouard V	0	Jacques II	3	Édouard VII	9
Henri III	56	Richard III	2	Guillaume III	13	Georges V	25
Édouard I	35	Henri VII	24	Marie II	6	Édouard VIII	1
Édouard II	20	Henri VIII	38	Anne	12	Georges VI	15

a) Combien de temps a duré le règne le plus long? Qui a régné le plus longtemps?

b) Quel a été le plus court règne? Qui était souverain durant cette période? Quelle est la signification réelle de cette valeur à ton avis?

c) Écris une phrase ou deux qui décrivent la distribution des longueurs de règne de ces souverains. Que constates-tu au sujet du centre de la distribution? Qu'en est-il de sa dispersion? Est-elle asymétrique?

d) Trouve une longueur ***médiane*** de règne. Pour les points de données impairs, ce sera facile. Le point milieu dans l'ensemble ordonné est le point médian. Pour les nombres pairs, comme c'est le cas ici, le milieu se trouve entre deux valeurs. Nous pourrions choisir une valeur quelconque entre ces deux valeurs, et faire la moyenne pour trouver le point médian. Cette valeur ne peut pas représenter la longueur réelle du règne d'un souverain, mais la moitié des souverains auront régné pendant une période plus courte que la longueur moyenne.

e) Trouve une valeur telle que le quart des souverains auront eu des règnes plus courts que celle-ci. (Trouve la médiane des règnes plus courts que le règne médian.) Cette valeur est appelée le premier ***quartile*** (Q1).

f) Trouve une valeur telle que le quart des souverains auront régné plus longtemps que cette dernière. (Trouve la médiane des règnes plus longs que le règne médian) Cette valeur est appelée le ***troisième quartile*** (Q3).

g) Tu as maintenant 5 nombres (minimum, Q1, médiane, Q3, maximum) qui te procurent un résumé utile de la distribution. Il s'agit du ***sommaire de cinq nombres*** de la distribution; ces nombres sont tout ce dont nous avons besoin pour produire une autre présentation visuelle de la distribution, le ***graphique en boîte***.

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

2. Utilise le sommaire de cinq nombres pour fabriquer un graphique en boîte de la distribution.
   a) Premièrement, trace une droite horizontale numérotée. Tu dois inscrire l'ensemble des valeurs correspondant à la longueur des règnes.
   b) À plusieurs espaces au-dessus de la droite, trace des droites verticales de un espace de long et, sur la même droite, inscris au-dessus de la droite numérotée les valeurs du Q1, de la médiane et du Q3.
   c) Trace une droite horizontale à partir du sommet de la droite Q1 jusqu'au sommet de la droite Q3, puis une autre droite entre la base de la droite Q1 jusqu'à la base de la droite Q3. Tu devrais obtenir une boîte, avec une droite verticale au-dessus de la valeur médiane.
   d) Trace une droite horizontale à partir du milieu de la droite Q1 jusqu'à la gauche du point au-dessus de la position de la droite numérotée qui représente la longueur minimale des règnes.
   e) Trace une droite horizontale entre le milieu de la droite Q3 vers la droite, jusqu'au point au-dessus de la position de la droite numérotée qui représente la longueur maximale des règnes.
   f) Dessine une petite étoile aux extrémités de ces droites, que nous appelons ***des moustaches***.
3. À l'aide de la calculatrice TI-83, tu peux obtenir le sommaire en cinq points et tracer un diagramme en boîte de ces données.
   a) Entre 40 nombres représentant les longueurs des règnes dans la colonne L1.
   b) Appuie sur Y= pour obtenir le menu des équations. Assure-toi qu'aucune équation n'est enregistrée et, si une équation est enregistrée, efface-la ou place le curseur sur le symbole = et appuie sur ENTER, pour que le signe ne soit pas ombragé. Cette équation sera désactivée, mais non supprimée.
   c) Appuie sur 2nd et sur STAT PLOT. Le menu de traçage des courbes des statistiques est affiché. Si des tracés sont déjà activés, sélectionne l'élément 4 du menu et appuie sur ENTER. Tous les tracés sont désactivés.
   d) Sélectionne l'élément 1 du menu puis appuie sur ENTER. Appuie de nouveau sur ENTER pour activer le tracé 1 Plot 1, puis sélectionne le graphique par boîte avec le curseur (la deuxième icône de la deuxième rangée) puis appuie sur ENTER.
   e) Déplace le curseur vers le bas pour sélectionner la Xlist. Une fois le curseur en position, appuie sur 2nd, sur L1, puis sur ENTER.
   f) Appuie maintenant sur ZOOM et 9 (ou sélectionne ZoomStat dans le menu). Un graphique en boîte est tracé.
   g) Appuie sur TRACE et sur les flèches gauche et droite pour afficher les cinq points du sommaire en cinq points.
4. Utilise ta calculatrice pour obtenir le sommaire de la distribution.
   a) Appuie sur STAT et choisis CALC, puis sélectionne l'élément 1 du menu (1-Var Stats), et appuie sur ENTER.
   b) Tu vois maintenant « 1-Var Stats » et le curseur clignote. Appuie sur 2nd et sur L1, puis sur ENTER. Ta calculatrice affiche un écran de statistique qui commence par $\overline{x}$, soit la valeur moyenne de nos données, et qui se termine par le nombre de points de données (40) dans notre distribution. Appuie sur la flèche pour faire défiler l'écran vers le bas et voir les cinq points du sommaire en cinq points.

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

3. Utilise ta calculatrice pour afficher un histogramme de la distribution.

   L'image des données est divisée en intervalles d'égale longueur dans l'histogramme. Une barre est affichée pour chaque intervalle. Le nombre d'observations (fréquence) appartenant à chaque intervalle détermine la hauteur de la barre dans cet intervalle. Pour les variables nominales, la hauteur de la barre correspond à la proportion des observations (fréquence relative) dans l'intervalle. Étant donné que les barres sont de largeur égale, on peut dire aussi que l'aire de chacune correspond à la fréquence relative dans cet intervalle. Aucune règle fixe n'indique la largeur ou le nombre des barres d'un histogramme. La distribution des données devrait être évidente quand on voit le diagramme - avec un peu d'expérience et de tâtonnement, le statisticien arrive à tirer beaucoup d'information de ces diagrammes.

   a) Commence de la même façon que pour le diagramme en boîte. Sélectionne l'icône histogramme (la troisième dans la rangée du haut). Utilise la même méthode de zoom pour afficher l'histogramme.

   b) Utilise la touche Trace pour voir les limites de tes barres et la valeur centrale de chacune.

   c) Appuie sur la touche WINDOW et déplace le curseur jusqu'à la rangée. Change l'échelle et appuie sur GRAPH. L'histogramme est redessiné avec des barres de la largeur inscrite dans Xscl. Fais des essais avec différentes échelles. Laquelle à ton avis résume le mieux la distribution des règnes des souverains?

Sommaire

Tu connais maintenant la terminologie utilisée pour décrire la forme d'une distribution. Tu sais aussi de quelle façon la taille d'un échantillon peut influer sur la dispersion des moyennes, que la variable en soit une de mesure ou qu'il s'agisse d'une proportion calculée à partir de variables nominales. Tu as utilisé le sommaire en cinq points d'une distribution pour tracer son diagramme en boîte. Tu connais certaines caractéristiques de la médiane et de la moyenne, et tu as utilisé les histogrammes pour afficher des distributions.

Avant de passer à la leçon suivante, discutez du contenu avec un groupe d'élèves.

Leçon 5 : La règle empirique

Contexte

Les mesures du centre et de l'étendue que nous avons utilisées, ainsi que les affichages que nous avons obtenus sont des outils très précieux en statistique. Cependant, certaines failles nous obligent à utiliser une autre mesure de l'étendue. Nous illustrerons ce besoin dans les activités de mise en marche.

Points importants

- Utiliser l'***écart type*** comme mesure de l'image d'une distribution.
- Trouver la règle ***empirique relative*** aux distributions en forme de cloche (symétriques).
- Utiliser l'écart type pour calculer les **cotes *z*** des données d'une distribution.

Activités de mise en marche

Les élèves du cours de Mathématiques pré-calcul de secondaire 4 du Manitoba ont fait un examen provincial l'an dernier. Nous avons regroupé les notes obtenues à l'examen par les élèves de trois classes en vue de les analyser. Les voici :

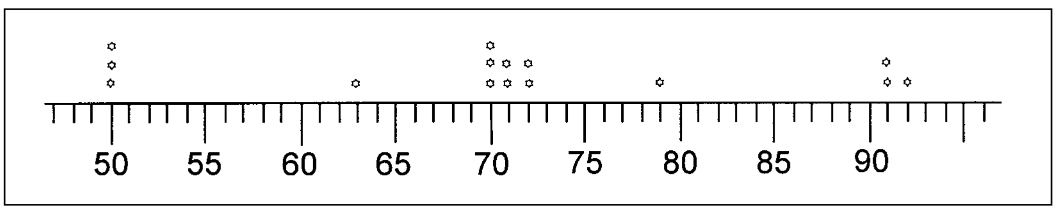
Classe 1 : 50 50 50 63 70 70 70 71 71 72 72 79 91 91 92

Classe 2 : 50 54 59 63 65 68 69 71 73 74 76 79 83 88 92

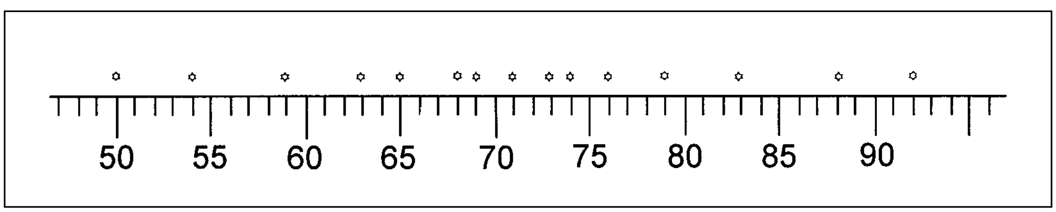
Classe 3 : 50 61 62 63 63 64 66 71 77 77 77 79 80 80 92

Remarque : La taille des échantillons est petite afin de rendre la résolution du problème plus facile. Une étude réelle exigerait de considérer des échantillons plus grands.

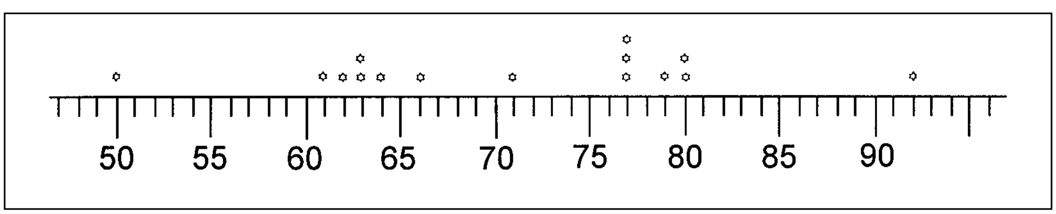
Classe 1



Classe 2



Classe 3



Leçon 5 : La règle empirique (suite)

a) Ces distributions sont-elles différentes? Explique pourquoi.

b) Fabrique des diagrammes en boîte des trois distributions.

c) Si tu avais vu seulement les diagrammes en boîte, aurais-tu pu conclure que les trois distributions étaient différentes?

Nous allons maintenant laisser de côté les diagrammes en boîte et le sommaire en cinq points pour utiliser des ***histogrammes***. Nous utiliserons la ***moyenne*** comme mesure du centre et l'***écart type*** comme mesure de l'étendue. L'écart type nous permet de mesurer la distance des observations par rapport à la moyenne. Étant donné que la distance n'est pas fonction de la direction, nous mettons les valeurs au carré pour éliminer les signes dans le calcul de la distance, $x_1 - \bar{x}$ pour chaque point de donnée. Ensuite, il faut additionner toutes les valeurs $(x_1 - \bar{x})^2$. Intuitivement, on constate que la division par le nombre n des points de donnée nous permettrait d'obtenir la moyenne des carrés des distances. Cette méthode convient pour l'analyse d'une population, mais les statisticiens utilisent plutôt la division par $n - 1$ pour les échantillons. Dans les deux cas, le quotient est appelé la ***variance*** (s^2). L'écart type (s_x) est sa racine carrée.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n}} \text{ pour la population} \qquad s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ pour un échantillon}$$

Déroulement

Le nombre de calories utilisées chaque jour par une personne est appelé son taux métabolique. L'étude du taux métabolique est particulièrement importante dans les études sur l'alimentation et l'exercice. La population étudiée dans l'expérience suivante est l'ensemble des Canadiens adultes. Une étude sur la diète a été effectuée auprès d'un échantillon de sept hommes. Leurs taux métaboliques respectifs vont comme suit :

1792 1666 1362 1614 1460 1867 1439

La moyenne est 1600 calories ($\bar{x} = 1600$).

Leçon 5 : La règle empirique (suite)

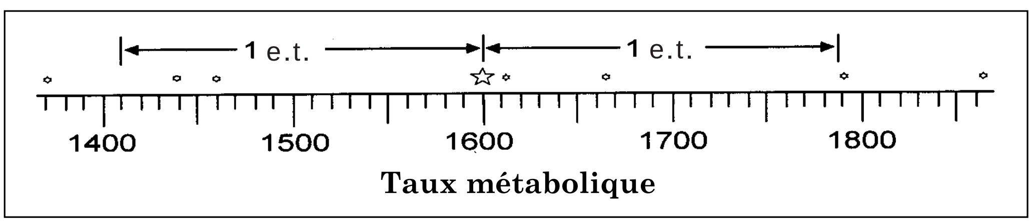
Nous allons calculer la variance (s^2) et l'écart type (s_x) en calculant l'écart de chaque observation à la moyenne, puis en mettant le résultat au carré.

Observation x	**Écarts** $x - \overline{x}$	**Écarts au carré** $(x - \overline{x})^2$
1792	1792 – 1600 = 192	$(192)^2$ = 36 864
1666	1666 – 1600 = 66	$(66)^2$ = 4356
1362	1362 – 1600 = –238	$(-238)^2$ = 56 644
1614	1614 – 1600 = 14	$(14)^2$ = 196
1460	1460 – 1600 = –140	$(-140)^2$ = 19 600
1867	1867 – 1600 = 267	$(267)^2$ = 71 289
1439	1439 – 1600 = –161	$(-161)^2$ = 25 921
		somme = 214 870

L'écart type $\sqrt{\dfrac{214\ 870}{6}} = 189{,}24$ calories.

Remarque : Nous avons divisé le résultat par $n - 1$ parce qu'il s'agit d'un échantillon.

Le diagramme ci-dessous illustre les données correspondant aux taux métaboliques des sept hommes. La valeur moyenne des taux est marquée par une étoile. Les flèches indiquent une distance de un écart type de chaque côté de la moyenne. À première vue, on pourrait penser qu'il s'agit de l'amorce d'un diagramme en boîte, mais n'oublie pas qu'on n'utilise pas les diagrammes en boîte pour l'étude de la moyenne et de l'écart type.



1. Utilise le menu des statistiques de la calculatrice pour trouver la moyenne et l'écart type dans les trois classes dont il était question dans les exercices de mise en marche. Les moyennes sont-elles différentes? Qu'en est-il des écarts types? (***Remarque :*** Ta calculatrice affiche deux symboles, s_x et σ_x, qui donnent deux valeurs similaires. Nous utiliserons la première, soit l'écart type pour un échantillon.)

2. Effectue le problème sur le taux métabolique à l'aide de ta calculatrice. Trouve l'intervalle interquartile et l'écart type. Remplace maintenant l'entrée 1362 par 362, comme si les données avaient été mal lues. Quel élément est le plus touché par cette opération : l'étendue interquartile ou l'écart type?

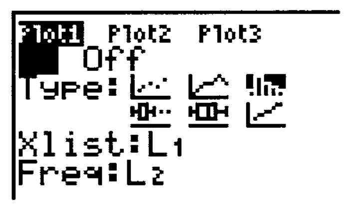
Leçon 5 : La règle empirique (suite)

La règle empirique

Voici les résultats d'un examen à choix multiples comportant 20 questions qui a été distribué à 213 élèves. $\overline{x} = 10{,}221$ et $s_x = 3{,}859$. (Les élèves représentent un échantillon de l'ensemble des élèves qui ont fait l'examen.)

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	1	1	5	7	12	13	16	15	17	32

Note	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre	17	21	12	16	8	4	7	5	4	0



3. Efface la liste dans l'éditeur des statistiques. Entre les notes dans la liste 1 et les nombres dans la liste 2. Règle à Plot 1, comme l'illustre la figure.

   Règle la fenêtre de graphique comme illustré. Appuie ensuite sur la touche GRAPH.

4. La distribution semble-t-elle avoir plus ou moins une forme de cloche et être symétrique?

5. Combien de notes se trouvent à 1 écart type de la moyenne (entre $\overline{x} - s$ et $\overline{x} + s$)? Quelle proportion des 213 notes cela représente-t-il?

6. Combien de notes se trouvent à 2 écarts types de la moyenne (entre $\overline{x} - 2s$ et $\overline{x} + 2s$)? Quelle proportion de 213 notes cela représente-t-il?

7. Si nous regardons les données qui se trouvent à 3 écarts types de la moyenne, nous obtiendrions soit –1,356 ou 21,789. Quelle proportion des 213 notes se trouve entre ces valeurs?

Nous avons trouvé la ***règle empirique***. Dans les distributions en forme de cloche, environ 68 % des observations se trouvent à 1 écart type de la moyenne, environ 95 % se trouvent à 2 écarts types de la moyenne et plus de 99 % se trouvent à 3 écarts types de la moyenne. Étant donné que beaucoup de distributions ont une forme de cloche, cette règle rend l'écart type utile pour l'interprétation des données.

Leçon 5 : La règle empirique (suite)

Exercice

1. Les notes obtenues au Scholastic Assessment Test (SAT) sont très largement utilisées par les universités pour évaluer les demandes d'admission. Supposons que la note moyenne au SAT est 896 et que l'écart type de ces notes est 174. D'autres universités utilisent les notes au American College Test (ACT). La moyenne est de 20,6 et l'écart type de 5,2.

   a) Si Robert a obtenu 1080 au SAT, à combien de points au-dessus de la moyenne sa note se trouve-t-elle?

   b) Si Kathy a obtenu 28 à l'ACT, à combien de points au-dessus de la moyenne sa note se trouve-t-elle?

   c) Serait-il sensé de conclure que, étant donné que la réponse en (a) est supérieure à celle obtenue en (b), Robert a mieux réussi que Kathy? Explique pourquoi.

   d) À combien d'écarts types au-dessus de la moyenne la note de Robert au test se trouve-t-elle? (Divise le nombre de points qu'il a obtenus au-dessus de la moyenne par l'écart type). C'est la cote z de Robert.

   e) À combien d'écarts types au-dessus de la moyenne la note de Kathy se trouve-t-elle? (Divise le nombre de points obtenus au-dessus de la moyenne par l'écart type.) C'est la cote z de Kathy.

   Tu as trouvé un moyen d'utiliser les écarts types pour comparer des valeurs distinctes provenant de distributions différentes. Tu as trouvé la ***cote z*** ou la ***cote standardisée*** pour chaque personne en soustrayant la moyenne de la distribution du score brut qui nous intéresse, puis en divisant le résultat par l'écart type. Les cotes z nous indiquent à combien d'écarts types au-dessus (ou au-dessous) de la moyenne une valeur se trouve. Cependant, les cotes z peuvent être utilisées seulement pour les distributions en cloche.

   f) Laquelle parmi les deux personnes visées a obtenu la cote z la plus élevée à son test d'admission?

   g) Explique en tes propres mots laquelle a le mieux réussi.

   h) Calcule la cote z de Mike, qui a obtenu 740 au SAT et de Karine, qui a obtenu 19 à l'ACT.

   i) Laquelle des ces deux personnes a obtenu la note la plus élevée?

   j) Dans quelles conditions une cote z est-elle négative?

Sommaire

Tu as découvert qu'il fallait tenir compte d'une nouvelle mesure de l'étendue, et tu as étudié l'écart type. Tu as découvert la règle empirique qui nous donne une façon d'utiliser l'écart type de façon intuitive. Finalement, tu as utilisé les cotes z pour comparer des valeurs provenant de distributions différentes. Les concepts abordés sont à la base du reste du cours.

Leçon 6 : La signification statistique

Contexte

Tu sais qu'on peut rassembler un échantillon représentatif de la population étudiée au moyen d'un ***échantillon aléatoire simple***. Tu sais aussi que les statistiques qui portent sur un échantillon peuvent varier et qu'elles sont influencées par la ***taille de l'échantillon***. Tu as trouvé une ***règle empirique*** qui établit qu'environ 68 % des proportions de l'échantillon de la variable mesurée se trouvent à l'intérieur de l'écart type de la moyenne, qu'environ 95 % se trouvent à l'intérieur de 2 écarts types de la moyenne et que la presque totalité se trouvent à l'intérieur de 3 écarts types de la moyenne.

Nous allons maintenant pousser plus loin l'étude des variations à l'intérieur des échantillons à l'aide d'une expérience initiale, puis nous ferons une simulation sur calculatrice pour augmenter le nombre d'échantillons.

Points importants

- Reconnaître que les statistiques sur des échantillons varient de façon prévisible autour d'une moyenne centrale et qu'elles ont une distribution symétrique.
- Reconnaître que cette distribution est caractérisée par un paramètre de population qui s'approche de l'ensemble des statistiques.
- Reconnaître que cette distribution suit une règle empirique.
- Accepter qu'une formule permet de trouver l'écart type de la distribution d'échantillonnage d'une proportion quand la moyenne de la population et la taille de l'échantillon sont connues.
- Élaborer sur le concept de la ***signification statistique*** en analysant des simulations.

Activités de mise en marche

Une ***population*** est l'ensemble d'un groupe d'événements visés. Il peut s'agir d'un groupe de personnes, d'objets ou d'événements. Un ***paramètre*** est la caractéristique numérique de la population alors que la ***statistique*** est la même caractéristique telle qu'elle se rapporte à un ***échantillon***.

1. La compagnie Hershey fabrique des bonbons Reese de différentes couleurs. Soit la population de ces bonbons - t'es-tu déjà questionné sur la distribution des couleurs? Comme tu ne veux pas étudier des millions de bonbons Reese, tu décides de prendre un échantillon de 25 bonbons.

   a) Soit un échantillon aléatoire de 25 bonbons; enregistre le nombre et la proportion de chaque couleur dans ton échantillon.

	Orange	Jaune	Brun
Nombre			
Proportion			

   La proportion de bonbons orange dans ton échantillon constitue-t-elle un paramètre ou une statistique?

   b) La proportion de bonbons orange fabriqués par Hershey constitue-t-elle un paramètre ou une statistique?

   c) Connais-tu la proportion de bonbons orange fabriqués par Hershey?

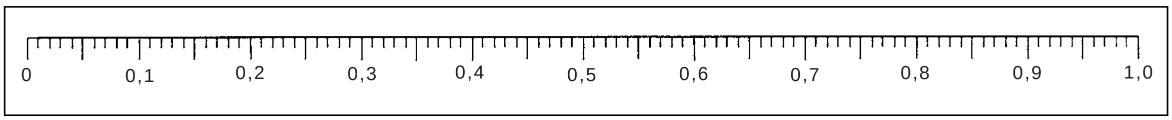
Leçon 6 : La signification statistique (suite)

d) Quelle est la proportion de bonbons orange dans ton échantillon? Enregistre ta réponse dans le tableau que ton enseignant t'a fourni.

Ces questions nous permettent de voir que, s'il est facile de trouver la valeur d'une statistique issue d'un échantillon, il n'est pas aussi facile de trouver la valeur du paramètre de population. L'un de nos objectifs est d'estimer la valeur du paramètre à partir des statistiques.

e) Crois-tu que tous ceux qui rassemblent un échantillon de 25 bonbons obtiennent la même proportion de bonbons orange que toi?

f) Fabrique un diagramme par points représentant la proportion dans l'échantillon de bonbons orange que chaque élève de la classe a obtenue. Utilise une échelle comme la suivante :



g) Si tous les élèves estiment la proportion de bonbons orange dans la population selon la proportion se rapportant à son échantillon, arriverez-vous tous à la même estimation?

h) Selon ce que tu connais de l'échantillonnage aléatoire, écris un énoncé sur la proportion de bonbons orange dans la population.

i) Si on suppose que chaque élève connaissait seulement la statistique concernant son échantillon, la plupart des estimations sur les paramètres de la population seraient-elles raisonnablement proche du paramètre réel? Certaines seraient-elles très loin de la réalité? Explique pourquoi.

j) Si l'échantillon avait comporté 10 bonbons au lieu de 25, comment le graphique par points aurait-il été différent?

k) Si l'échantillon avait comporté 75 bonbons au lieu de 25, comment le graphique par points aurait-il été différent?

Tes résultats suggèrent que, même si les valeurs d'échantillonnage varient, la variation tend à suivre un modèle. Nous utiliserons une simulation issue de la calculatrice pour étudier ce processus plus en profondeur.

Déroulement

Pour effectuer une simulation, il faut tenir pour acquis que notre mélange ressemble à celui contenu dans les sacs de bonbons Reese. Pour y arriver, il faut connaître la proportion de bonbons orange dans la population. De fait, Hershey fabrique 45 % de bonbons orange. Le programme utilise cette donnée, que nous ne connaissions pas auparavant. Le programme utilise 50 échantillons aléatoires de 25 bonbons et trace le graphique des résultats. Appelle ce programme « BONBON ». Tu pourras télécharger une copie à partir de la calculatrice de ton enseignant. On trouve aussi ce programme dans la section Notes à l'intention de l'enseignant (annexe I-3), à la fin de ce document.

a) Utilise ta calculatrice pour rassembler 50 échantillons de 25 bonbons chacun (le traitement est un peu long, alors fait preuve de patience.)

b) Décris tout modèle que tu constates dans la variation des proportions dans les 50 échantillons.

c) Calcule la moyenne et l'écart type de ces proportions à l'aide de la calculatrice.

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

d) Les proportions dans l'échantillon sont-elles regroupées autour de la proportion dans la population, soit 0,45?

e) Il faut être plus précis dans notre réponse à cette dernière question. Ainsi, combien des 50 proportions dans l'échantillon se trouvent entre 0,35 et 0,55 (0,45 ± 0,10)? Combien se trouvent entre 0,25 et 0,65 (0,45 ± 0,20)? Combien se trouvent entre 0,30 et 0,45? (Tu peux utiliser la touche TRACE pour connaître ces valeurs)

Remarque : L'écart type des données générées par ta calculatrice sera près de 0,10; dans la question, il faudra donc mettre à la place (0,45 ± 0,10), etc.

	Nombre de proportions dans l'échantillon	**Pourcentage de proportions dans l'échantillon**
À l'intérieur de 0,45 ± 0,10		
À l'intérieur de 0,45 ± 0,20		
À l'intérieur de 0,45 ± 0,30		

f) Au début, comme nous ne connaissions pas le paramètre de la population, nous aurions dû tenter d'estimer cette valeur à partir de notre statistique. Imagine que tu ne sais pas que la proportion de bonbons orange dans la population est 0,45. Si chacun des 50 élèves imaginaires représentés dans ta simulation estime la proportion de bonbons orange dans la population en choisissant une étendue entre 0,20 au-dessous et 0,20 au-dessus de la proportion dans l'échantillon, quel pourcentage d'entre eux auraient obtenu la valeur réelle de 0,45 dans cet intervalle?

g) Si tu étais l'un de ces élèves imaginaires qui étudient ta proportion dans l'échantillon, serais-tu ***sûr*** que la valeur pour ton échantillon se trouverait à l'intérieur d'un intervalle de 0,20 à la proportion dans la population? Serais-tu raisonnablement sûr que c'est le cas? Explique ce que tu veux dire.

Même si la proportion de bonbons orange dans l'échantillon varie d'un échantillon à l'autre, on reconnaît un modèle à long terme dans la variation. Il s'agit de la distribution d'échantillonnage de la proportion dans l'échantillon. Nous ne pouvons utiliser la proportion dans l'échantillon pour trouver la proportion dans la population réelle, mais nous pouvons être raisonnablement certains que la proportion dans la population se trouve à une certaine distance de la proportion dans l'échantillon. Cette distance dépend avant tout de notre degré souhaité de certitude et de la taille de l'échantillon.

h) Refais la même simulation, en utilisant cette fois-ci des échantillons de 75 bonbons. Il faudra pour ce faire changer l'inscription « 25 » dans le programme par « 75 ». Calcule la moyenne et l'écart type pour les proportions dans l'échantillon.

i) Écris tous les changements constatés dans la distribution d'échantillonnage par rapport à l'échantillon de 25 bonbons.

j) Compte le nombre (à l'aide de la touche TRACE) de proportions dans l'échantillon qui se trouvent dans un intervalle de 0,10, 0,20 et 0,30 par rapport à 0,45. Remplis le tableau de la page suivante, comme tu l'as fait auparavant.

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

	Nombre de proportions dans l'échantillon	Pourcentage de proportions dans l'échantillon
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}10$		
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}20$		
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}30$		

Comment se comparent les pourcentages de proportions dans l'échantillon qui se trouvent dans l'intervalle de 0,10 par rapport à 0,45 entre les échantillons comprenant 25 et 75 éléments?

k) En règle générale, une proportion dans l'échantillon est-elle plus susceptible de se trouver à proximité de la proportion dans la population si l'échantillon est plus grand ou s'il est plus petit?

Étant donné que nos proportions dans l'échantillon suivent une distribution symétrique - en forme de cloche - , la règle empirique établit qu'environ 95 % des proportions dans l'échantillon se trouvent à l'intérieur de 2 écarts types de la moyenne.

l) Trouve la valeur qui est située à deux écarts types au-dessous de la moyenne que tu as trouvée en réponse à la question (h). Trouve la valeur qui se trouve à deux écarts types au-dessus de la moyenne.

m) Combien parmi les 50 proportions dans l'échantillon se trouvent à l'intérieur de l'intervalle que tu viens de trouver? Cette valeur est-elle proche de 95 %?

n) Si chacun des 50 élèves imaginaires devait faire le même travail que tu viens de faire avec sa propre moyenne, quel pourcentage de leurs intervalles comprendrait à ton avis la proportion dans la population réelle (0,45)?

Cela nous montre que si je veux être à environ 95 % sûr d'obtenir une proportion dans la population à l'intérieur d'une certaine distance de la proportion dans mon échantillon, cette distance devrait être environ le double de l'écart type de la distribution d'échantillonnage des proportions dans l'échantillon.

Exercice

1. Le tiers des objets produits par un fabricant sont défectueux. Si tu inspectes des lots aléatoires de 15 objets qui sortent de la chaîne de montage, combien d'objets défectueux pourrais-tu t'attendre à trouver dans un lot?
2. Si les inspecteurs prennent des échantillons différents de 15 objets au sortir de la chaîne de montage, t'attendrais-tu à ce que chacun d'eux trouve le même nombre d'objets défectueux?
3. Serais-tu très surpris de trouver quatre objets défectueux ou moins sur un lot de quinze si une chaîne de montage produit un tiers d'objets défectueux à long terme?
4. Serais-tu très surpris de constater que deux objets défectueux ou moins dans un lot de quinze si une chaîne de montage produit un tiers d'objets défectueux à long terme?
5. Serais-tu très surpris de retrouver aucun objet défectueux dans un lot de quinze si une chaîne de montage produit à long terme un tiers d'objets défectueux?

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

Déroulement

Supposons que nous acceptons qu'un tiers de la production de gadgets d'un fabricant soit défectueuse. Supposons maintenant que les ingénieurs ont trouvé une façon de modifier le processus de fabrication qui, selon eux, devrait diminuer la proportion d'objets défectueux. Ils font des essais sur un lot de quinze objets.

a) La donnée « un tiers » est-elle un paramètre ou une statistique? Explique pourquoi.

b) Suppose que les ingénieurs échantillonnent un lot de quinze objets et qu'ils en trouvent quatre défectueux. Quelle est la proportion dans l'échantillon d'objets défectueux? Quel symbole utilise-t-on en règle générale pour représenter ce nombre?

c) Est-il possible que les inspecteurs aient trouvé quatre objets défectueux ou moins dans la population même si la modification n'a eu aucun effet sur le processus? Autrement dit, même si la proportion dans la population d'objets défectueux est encore de un tiers? Explique pourquoi.

d) Si les ingénieurs échantillonnaient 100 lots de 15 objets, devraient-ils s'attendre à trouver le même nombre d'objets défectueux dans chaque lot? Quel terme décrit ce phénomène?

Le temps est venu d'étudier le concept de la ***signification statistique***. Nous explorerons la distribution d'échantillonnage d'une proportion d'objets défectueux, et nous verrons à quelle fréquence un résultat d'échantillon observé peut se produire au hasard. Un résultat d'échantillon est ***statistiquement significatif*** s'il est peu susceptible d'être dû seulement à la dispersion d'échantillonnage.

e) Supposons que la modification n'a eu ***aucun effet***. Cela signifie que la proportion d'objets défectueux dans la population est toujours de un tiers. Utilise un dé ordinaire à six faces pour simuler la sélection aléatoire d'un lot d'objets. Lance le dé quinze fois. Si tu obtiens un 1 ou un 2, enregistre un objet défectueux (D). Si tu obtiens un autre chiffre, enregistre l'objet comme étant correct (C).

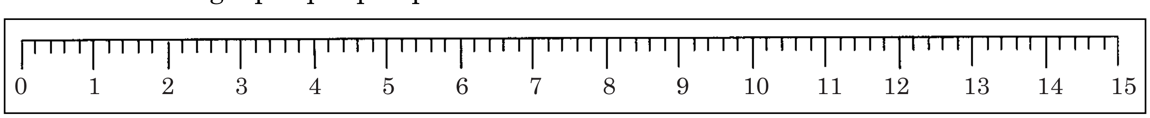
Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N^{o} sur le dé															
D ou C															

Combien d'objets dans le lot simulé sont défectueux? Quelle proportion d'objets dans le lot sont défectueux?

f) Répète la procédure jusqu'à ce que tu aies simulé cinq lots de quinze objets. Dans chaque lot, enregistre le nombre et la proportion d'objets défectueux.

g) As-tu obtenu le même nombre de gadgets défectueux dans chaque échantillon?

h) Combine tes résultats de simulation avec ceux obtenus par les autres élèves de la classe dans un graphique par points comme celui ci-dessous.



Leçon 6 : La signification statistique (suite)

i) Combien de lots simulés produisent quatre gadgets défectueux ou moins et dans quelle proportion?

j) Selon cette simulation, crois-tu qu'il serait très peu possible que le processus produise un lot contenant quatre gadgets défectueux ou moins alors que la proportion dans la population d'objets défectueux est de un sur trois?

k) Le texte Workshop Statistics de Allan J. Rossman fait référence au programme WIDGT de la calculatrice TI-83 (voir la page I-153, annexe I-3). La calculatrice peut simuler une sélection aléatoire allant jusqu'à 1000 lots de gadgets en tenant pour acquis que le tiers de la population est défectueuse. Si tu as ce programme, lance-le sur la calculatrice. Il te donne un histogramme des résultats, que tu peux transcrire dans le tableau ci-dessous :

N$^{\text{bre}}$ défectueux	0	1	2	3	4	5	6	7
N$^{\text{bre}}$ de lots								

N$^{\text{bre}}$ défectueux	8	9	10	11	12	13	14	15
N$^{\text{bre}}$ de lots								

1) Combien parmi les 1000 lots simulés contiennent 4 objets défectueux ou moins, et dans quelle proportion?

m) Selon cette simulation étendue, dirais-tu qu'il est très peu possible que le processus produise un lot contenant quatre objets défectueux ou moins alors que la proportion d'objets défectueux dans la population est de un sur trois?

n) Suppose que les ingénieurs ne savent pas si la modification apportée a amélioré le processus de production. Ils échantillonnent un lot de quinze objets et y trouvent quatre objets défectueux. Cela leur donne t-il une preuve très concluante qu'ils ont amélioré le processus? Explique pourquoi.

o) Suppose maintenant qu'ils trouvent seulement deux objets défectueux dans l'échantillon. Dans quelle fréquence à long terme un résultat si extrême se reproduirait-il si la modification n'a pas amélioré le processus? Fonde ta réponse sur les 1000 lots simulés que tu as générés ci-dessus.

p) Le fait de trouver deux gadgets défectueux dans l'échantillon nous donne-t-il une preuve évidente que la modification a en effet amélioré le processus en diminuant la proportion de gadgets défectueux produits? Explique pourquoi.

q) Réponds aux questions (o) et (p) en tenant pour acquis qu'aucun gadget défectueux n'a été trouvé dans le lot.

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

La ***signification statistique*** nous indique s'il est assez peu probable que le comportement d'un échantillon soit dû à la chance pour qu'on cherche une autre explication. Dans cet exemple, il est très très peu probable qu'un lot ne contienne aucun objet défectueux si la modification n'avait pas amélioré le processus. Si les ingénieurs apportent les modifications puis ne trouvent aucun objet défectueux dans un échantillon, ils croiront soit :

a) que le processus n'a pas été amélioré et que l'échantillon choisi était très peu représentatif, ***ou***

b) que la modification a amélioré le processus et qu'elle a réduit la proportion d'objets défectueux dans la population à moins de un sur trois.

Ces deux possibilités peuvent être vraies, mais le fait d'obtenir un échantillon ne contenant aucun gadget défectueux est extrêmement improbable si on considère la possibilité (a). Ce fait donne beaucoup de poids à la possibilité (b), même si on ne peut éliminer l'autre possibilité complètement.

Le fait de trouver quatre gadgets défectueux est très peu utile pour démontrer si la modification a amélioré le processus parce qu'il n'est pas très inhabituel de trouver quatre objets défectueux ou moins dans un lot alors que le tiers des gadgets produits sont défectueux.

Plus loin, tu étudieras les tests statistiques sur la signification, qui font appel au type de raisonnement illustré ici.

Sommaire

Tu as vu que les proportions dans les échantillons aléatoires simples forment une distribution symétrique en forme de cloche, distribuée autour de la moyenne d'une population selon la règle empirique. La taille de l'échantillon détermine l'écart type des proportions dans l'échantillon, et de ce fait l'image de la distribution.

Avant de passer à la leçon suivante, discutez du contenu avec un groupe d'élèves.

Théorie nº 1 : Distributions binomiales

Contexte

Dans la leçon 6, nous avons échantillonné une population de bonbons Reese dans laquelle 45 % étaient orange. Nous avons dit que, si nous prenions un nombre infini d'échantillons de taille n, alors $\bar{x} = \boldsymbol{\mu}$. (Autrement dit, la moyenne des proportions dans l'échantillon serait égale à la moyenne dans la population.) Il faut étoffer cette affirmation.

Nous utiliserons comme exemple une expérience qui consiste à tirer cinq bonbons au hasard dans une boîte de bonbons Reese.

Un bonbon est soit orange, soit non orange. Cette expérience met donc en cause une distribution binomiale. Nous appliquerons le développement binomial.

Étant donné que le mot ou est équivalent au signe + et que cinq bonbons sont choisis, qui sont soit orange, soit non orange, nous développerons l'expression (Orange + Non) 5 comme suit :

$$(Orange + Non)^5$$

$$= {}_5C_0\,(Orn)^5(Non)^0 + {}_5C_1\,(Orn)^4(Non)^1 + {}_5C_2(Orn)^3(Non)^2 + {}_5C_3\,(Orn)^2(Non)^3 + {}_5C_4\,(Orn)^1(Non)^4 + {}_5C_5\,(Orn)^0(Non)5$$

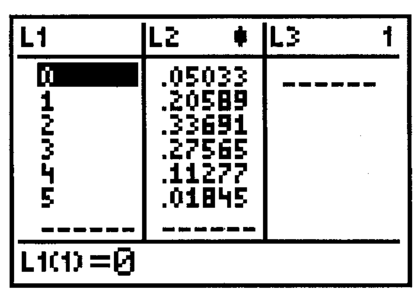
$$= {}_5C_0\,(0{,}45)^5(0{,}55)^0 + {}_5C_1\,(0{,}45)^4(0{,}55)^1 + {}_5C_2\,(0{,}45)^3(0{,}55)^2 + {}_5C_3\,(0{,}45)^2(0{,}55)^3 + {}_5C_4\,(0{,}45)^1(0{,}55)^4 + {}_5C_5\,(0{,}45)^0(0{,}55)^5$$

Cette somme comprend tous les nombres possibles de bonbons orange dans un échantillon de cinq. Elle démontre la distribution de probabilités. Ainsi, la probabilité qu'un échantillon contienne deux bonbons orange est ${}_5C_3\,(Orn)^2(Non)^3$ ou ${}_5C_3\,(0{,}45)^2(0{,}55)^3$, soit environ 0,33 69. La somme du développement est la somme de toutes les probabilités, et devrait être 1.

Nous pouvons utiliser la calculatrice TI-83 pour faire les calculs. Voici un moyen d'y arriver :

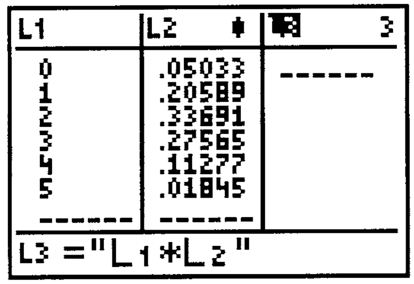
- Efface toutes les listes de statistiques (2nd MEM C1rAllLists ENTER).
- Entre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 dans L1. Il s'agit du nombre de bonbons orange que l'on peut choisir.
- Place le curseur dans le haut de la colonne L2, pour noircir le titre.
- Entre "${}_5C_3 \times 0{,}55^{5\text{-}L1} \times 0{,}45^{L1}$ " dans l'équation L2 puis appuie sur ENTER. L'écran ci-contre s'affichera. La liste 2 affiche la probabilité d'obtenir le nombre de bonbons orange inscrit dans la liste 1.

  Remarque : Les guillemets indiquent à la calculatrice d'enregistrer la formule. L'astérisque dans le haut indique que cela a été fait.



Théorie nº 1 : Distributions binomiales

- Quitte l'éditeur de Stats et efface l'écran.
- Appuie sur 2nd LIST et passe au menu MATH.
- Sélectionne l'élément 5 (pour trouver la somme de la liste 2), puis appuie sur 2nd L2 et sur ENTER. La somme devrait être 1.
- Va maintenant à l'en-tête de la liste 3. Inscris l'équation de la liste 3 telle qu'illustré et appuie sur ENTER.



- Trouve la somme de la liste 3. C'est le nombre attendu de résultats favorables de notre expérience, ou le nombre moyen de bonbons orange dans nos échantillons, si nous considérons un nombre infini d'échantillons. Tu devrais obtenir $\mu = 2{,}25$.

Les prochaines étapes nous donnent la variance de la distribution.

- Dans la liste 4, inscris les valeurs L1 - 2,25. (Trouve les écarts à la moyenne.)
- Dans la liste 5, inscris les valeurs $L4^2$. (Élève au carré les écarts à la moyenne.)
- Dans la liste 6, inscris les L5 x L2. (Tiens compte de la probabilité pour chaque rangée.)
- Trouve la somme de la liste 6. Il s'agit de la variance de notre distribution de probabilités binomiale. $\sigma = 1{,}2375$. L'écart type est la racine carrée de la variance (environ 1,11).

Une formule nous permet de faire ce travail plus rapidement. L'exemple suivant illustre comment élaborer cette formule.

Notre exemple consiste à choisir ***un*** bonbon dans une population dans laquelle les bonbons orange ont une ***proportion*** p. Nous pouvons appeler ce ***nombre*** de bonbons orange choisi x. (Même si on peut choisir un bonbon orange ou zéro bonbon orange, notre ***espérance mathématique*** peut être différente. Par exemple, dans le travail ci-dessus, nous avons trouvé que le nombre moyen de bonbons orange était de 2,25.) Nous dirons que la ***probabilité*** de choisir x bonbons orange est $f(x)$.

x	$f(x)$	$x \cdot f(x)$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 \cdot f(x)$
0	$1 - p$	0	$-p$	p^2	$p^2 \cdot (1 - p)$
1	p	p	$1 - p$	$(1 - p)^2$	$(1 - p)^2 \cdot p$

$\sum(x \cdot f(x)) = p$ $= 0 + p$ pour un bonbon $\mu = p$	$\sum(x-\mu) \cdot f(x) = p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p$ $= p(1-p)(p+1-p)$ $= p(1-p)$ ainsi $\sigma^2 = p(1-p)$

Théorie n^o^ 1 : Distributions binomiales (suite)

- La boîte à l'extrême gauche nous indique que le nombre de bonbons orange que nous devrions espérer mathématiquement est équivalent à zéro fois la probabilité d'obtenir une couleur autre que orange plus une fois la probabilité d'obtenir un bonbon orange. Cette ***espérance mathématique*** est la même que la valeur ***moyenne*** des deux résultats, en fonction de la proportion de bonbons orange dans la population.
- La boîte à l'extrême droite utilise la même technique pour nous indiquer la ***variance*** de notre distribution très simple. Certains statisticiens utilisent la lettre q pour remplacer l'expression $(1 - p)$.
- Nous disposons maintenant d'expressions pour la moyenne et l'écart type d'une distribution de probabilités binomiales comprenant un seul événement. Si chacun des événements est indépendant d'autres événements similaires, alors pour une expérience mettant en cause n bonbons, nous pouvons dire que :

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= np \\ \text{and } \sigma^2 &= np(1-p) \\ \text{or } \sigma^2 &= npq \end{aligned}}$$

Nos calculs nous indiquent que la distribution de probabilités binomiales de bonbons orange dans les échantillons de 5 éléments a une moyenne de 2,25 et un écart type de $\sqrt{1{,}2375}$.

Nos formules utilisent le fait que 0,45 de la population de bonbons est orange, et que nos échantillons comprennent 5 bonbons qui nous disent que

$$\begin{aligned} \mu &= np \\ &= 5 \times 0{,}45 \\ &= 2{,}25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma^2 &= mpq \\ &= 5 \times 0{,}45 \times 0{,}55 \\ &= 1{,}2375 \\ \text{ainsi } \sigma &= \sqrt{1{,}2375} \end{aligned}$$

En utilisant ces formules, nous pouvons trouver la moyenne et l'écart type des distributions de probabilités binomiales plus rapidement. Nous pourrons nous exercer avec des échantillons plus grands sans augmenter le nombre de calculs.

Théorie nº 1 : Distributions binomiales (suite)

Dans la leçon 6, nous avons travaillé avec des échantillons de 25 bonbons. Nous savons maintenant que pour les échantillons de cette taille, le nombre moyen de bonbons orange sera proche de 11,25 et que l'écart type sera proche de 2,487 (tu peux vérifier cela au moyen de formules). Nous disons la même chose en affirmant que la proportion moyenne de bonbons orange est $\frac{11{,}25}{25} = 0{,}45$ et l'écart moyen de la proportion de bonbons orange est $\frac{2{,}487}{25} = 0{,}0995.$ En effet, le nombre de bonbons orange dans un échantillon est 25 et la proportion est tout simplement le nombre de bonbons orange divisé par le nombre total.

Voyons maintenant si nous pouvons traduire nos deux formules en proportions.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu = np \\ &\text{alors } \frac{\mu}{n} = \frac{np}{n} \\ &\text{alors } \frac{\mu}{n} = p \end{aligned}}$$

Étant donné que $\frac{\mu}{n}$ est la proportion moyenne de bonbons orange, nous savons que la proportion moyenne sera 0,45.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{npq} \\ \text{alors } \frac{\sigma}{n} &= \frac{\sqrt{npq}}{n} \\ &= \sqrt{\frac{npq}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{pq}{n}} \end{aligned}$$

Étant donné que $\frac{\sigma}{n}$ est l'écart type de la proportion de bonbons orange, nous pouvons simplifier comme suit :

$\sqrt{\frac{pq}{n}}.$

Théorie nº 1 : Distributions binomiales (suite)

- Trouve la moyenne et l'écart type pour le ***nombre*** de bonbons jaune choisi si 25 % sont jaunes et si la taille de l'échantillon est 25. Trouve ensuite la moyenne et l'écart type de la ***proportion*** de bonbons jaunes dans les mêmes conditions.

  Solution 1

  $$\boxed{\begin{array}{l}\mu = np \\ \sigma = \sqrt{npq}\end{array}}$$

  Nous savons que $n = 25$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$.

  $$\begin{aligned} \mu &= 6{,}25 \\ \text{Ainsi } \sigma &= 2{,}165 \end{aligned}$$

  Solution 2

  $$\boxed{\begin{array}{l}\mu = p \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\end{array}}$$

  Nous savons que $n = 25$; $p = 0{,}25$.

  $$\begin{aligned} \mu &= 0{,}25 \\ \text{Ainsi } \sigma &\cong 0{,}0866 \end{aligned}$$

  Ces résultats nous donnent la même information, parce que $25 \times 0{,}25 = 6{,}25$ et $0{,}0866 \times 25 = 2{,}165$.

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale

Contexte

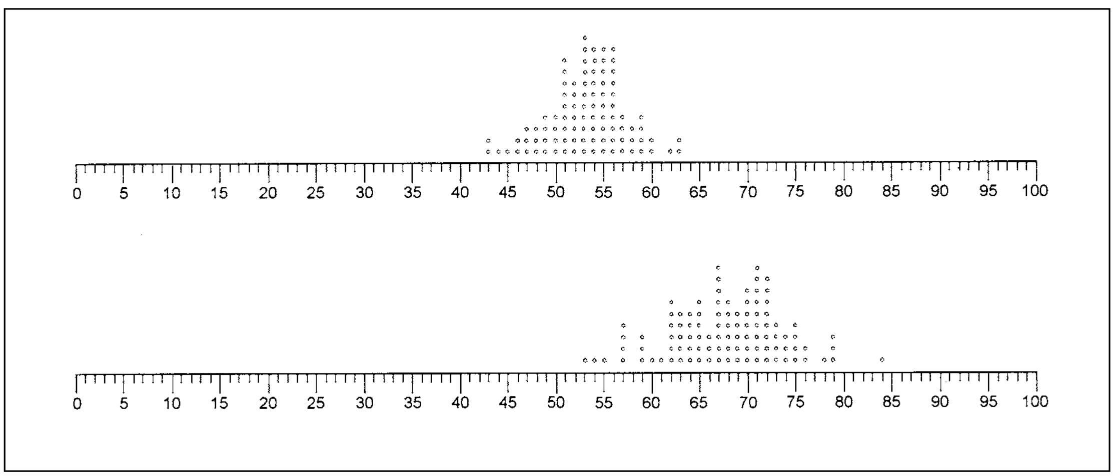
Supposons que les élèves qui ont eu des notes de 90 % ou plus obtiennent un A et que ceux qui ont 60 ou moins obtiennent un F. Dans la classe de Mme Miller, la note moyenne est 78 et l'écart type est 7, alors que dans celle de M. Sapinsky, la moyenne est 74 et l'écart type 18. Dans quelle classe compte-t-on le plus de A?

Points importants

- Trouver l'aire sous la courbe normale.
- Reconnaître la courbe normale standard et ses caractéristiques.
- Déterminer les cotes z des statistiques d'un échantillon.
- Trouver la probabilité qu'une statistique générée par un échantillon aléatoire simple se trouve dans une étendue donnée pour une caractéristique donnée.

Activité de mise en marche

Voici deux graphiques liés à des exercices que nous avons faits auparavant. Ils nous indiquent des notes obtenues dans deux classes.



a) De quelle façon les formes de ces distributions sont-elles similaires?

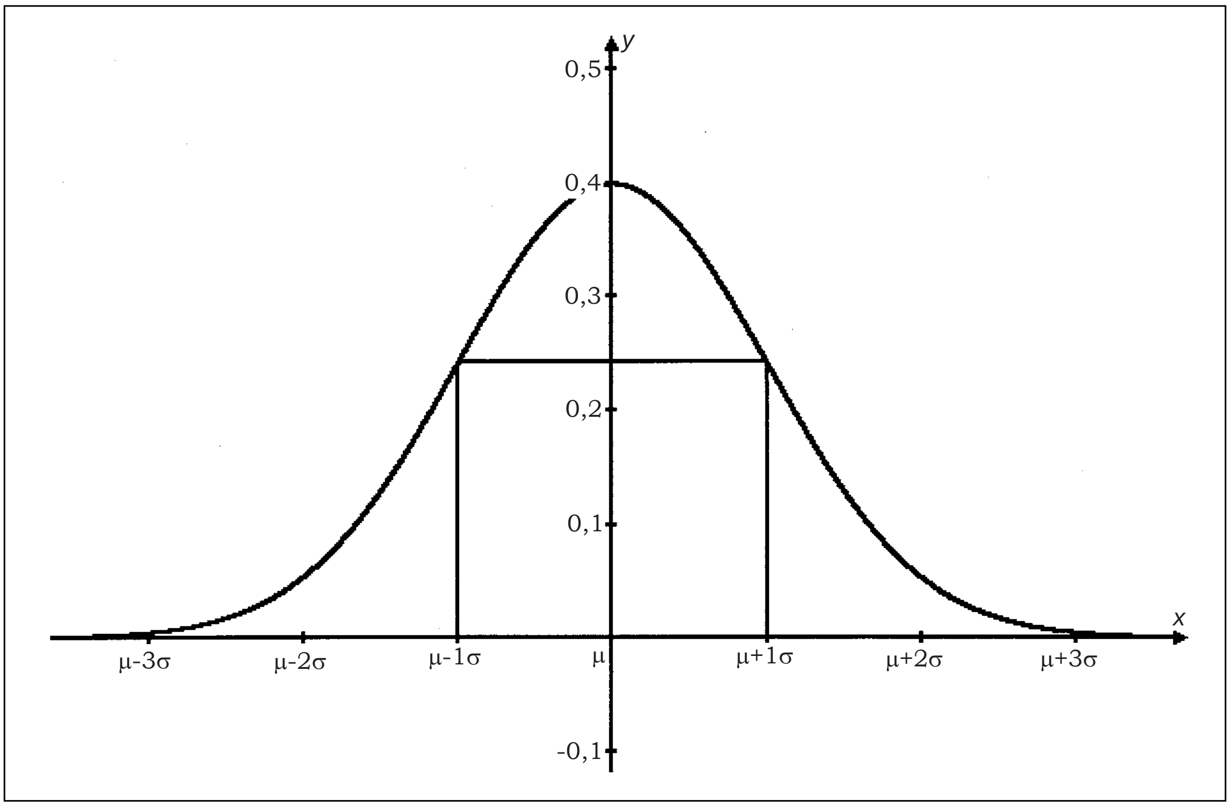
b) Trace une courbe lisse qui illustre la forme générale des deux graphiques par points.

La forme générale que nous avons vue dans ces exemples est fréquente - si fréquente en fait qu'on la considère comme étant normale. Les modèles mathématiques utilisés pour représenter des distributions qui ont cette forme sont appelés des distributions normales. Il en existe toute une famille, tout comme il existe toute une famille de paraboles définies par des fonctions quadratiques. Toutes les distributions normales ont en commun les trois caractéristiques distinctives suivantes :

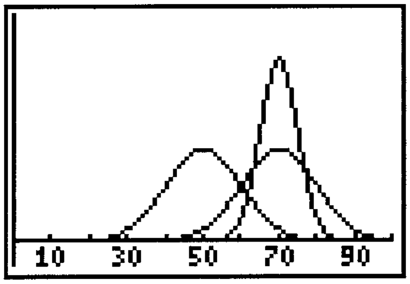
- Toutes les distributions normales sont symétriques.
- Toutes les distributions normales ont une courbe en forme de cloche.
- Toutes les distributions normales ont un seul sommet au centre.

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

Toute distribution normale a une ***moyenne*** (μ) et un ***écart type*** (σ) qui la distinguent. La moyenne nous indique où se trouve le centre, c'est-à-dire au sommet (qui marque le centre de la symétrie). L'écart type indique l'étendue de la distribution. Vis-à-vis de la moyenne, la courbe est concave vers le bas; elle devient concave vers le haut à une distance de un écart type de la moyenne. (Si tu conduisais une auto le long de la courbe à partir de la gauche, tu tournerais le volant vers la gauche jusqu'à ce que tu arrives au point au-dessus de $\mu - \sigma$. Tu tournerais ensuite le volant vers la droite et tu le garderais dans cette position jusqu'au point au-dessus de $\mu + \sigma$, où tu tournerais le volant vers la gauche.) Le croquis ci-dessous illustre l'apparence de toutes les courbes normales.



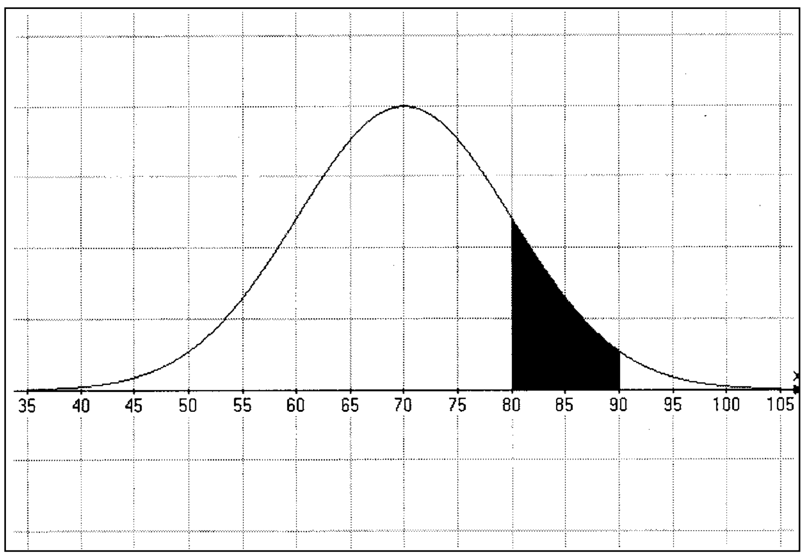
c) Voici un affichage de trois courbes normales. La courbe A a une moyenne de 70 et un écart type de 5. La courbe B a une moyenne de 70 et un écart type de 10. La courbe C a une moyenne de 50 et un écart type de 10. Marque chacune à l'aide de la lettre appropriée.



Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

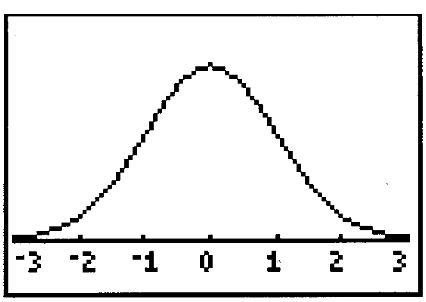
Nous pouvons faire une bonne approximation de la proportion des membres d'une population qui se trouvent à l'intérieur d'un certain intervalle de valeurs. Nous appelons cette proportion la probabilité qu'un certain membre de la population ait une valeur à l'intérieur de cet intervalle quant à la caractéristique à l'étude. Le fait de trouver cette probabilité est assimilable au fait de trouver l'aire sous la courbe normale dans un intervalle donné (l'aire totale sous toutes les courbes normales est toujours 1.)

En théorie, si les notes à un examen sont distribuées normalement, avec une moyenne de 70 et un écart type de 10, la proportion des notes qui se trouvent entre 80 et 90 devrait être équivalente à l'aire sous la courbe normale, tel qu'illustré ci-dessous. Cette aire pourrait être trouvée à l'aide de calculs mais la calculatrice TI-83 le fait pour nous.



Toutes les distributions normales ont leur propre moyenne et leur propre écart type. Cependant, une distribution normale particulière, appelée la distribution normale standard (où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$), a été étudiée plus étroitement. On lui a donné le nom z. Nous allons étudier la distribution z, trouver les aires sous certaines régions de sa courbe et utiliser des transformations pour décrire des aires sous d'autres distributions normales en termes de la courbe z.

Voici un croquis d'une distribution normale standard, la courbe z.



La moyenne de la distribution est 0. L'échelle de l'axe des x correspond au nombre d'écarts types par rapport à la moyenne. Plus de trois écarts types de chaque côté de la moyenne sont affichés, de sorte que le croquis comprend plus de 99,9 % de l'aire sous la courbe, et plus de 99,9 % de la population à l'étude.

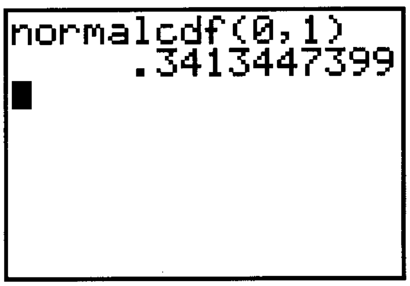
Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

Déroulement

Pour trouver l'aire sous des régions de la courbe normale standard, les statisticiens ont jusqu'à tout récemment utilisé des tables. Ces tables donnent la liste des ***cotes z*** qui indiquent la distance en termes d'écarts types d'une valeur par rapport à la moyenne de la population. (On trouve une table de ce genre à la fin du document). Une cote z de 1,0 indique qu'une valeur se trouve à l'écart type au-dessus de la moyenne, et la table démontre que la proportion d'une proportion distribuée normalement entre la moyenne et la cote z de 1,0 est 0,3413 ($Pr(0 < z < 1) = 0{,}3413$). Autrement dit, environ 34 % de la population se trouvent entre la moyenne de la population et un écart type au-dessus.

À l'aide de ta calculatrice TI-83, calcule l'aire sous la courbe normale standard entre la moyenne et une cote z, comme suit :

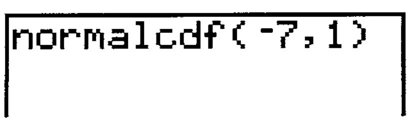
- Appuie sur 2nd et DISTR, puis sélectionne normalcdf dans le menu et inscris 0, 1 et appuie sur ENTER. L'écran suivant devrait être affiché.



Cela signifie que l'aire sous la courbe entre la moyenne et 1 écart type au-dessus de la moyenne est 0,3413447399. Essaie quelques autres valeurs à l'aide de la table et de la calculatrice, pour t'assurer que tu obtiens des résultats équivalents.

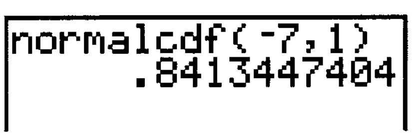
cdf signifie ***cumulative density function*** (fonction de densité cumulative).

Remarque : Cette calculatrice peut simplifier certaines tâches. Par exemple, si tu veux trouver l'aire totale sous la courbe à la gauche d'un point, entre les données suivantes (l'exemple utilise le point se trouvant à un écart type au-dessus de la moyenne) :



Tu calculeras ainsi l'aire entre un point se trouvant à sept écarts types à gauche de la moyenne et notre point situé à un écart type à la droite de cette moyenne.

Le chiffre –7 représente le point situé à 7 écarts types à la gauche de la moyenne. La calculatrice TI-83 ne peut trouver aucune aire à la gauche de ce point. Tout chiffre inférieur à –7 produit le même résultat. En fait, on pourrait utiliser –5 avec 6 décimales. La courbe normale standard est ***très*** près de l'axe des x à une si grande distance de la moyenne.



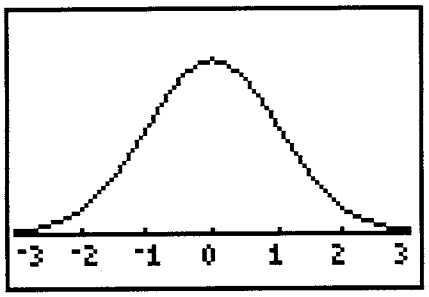
C'est la somme de la moitié de l'aire vers la gauche de la moyenne et du point 0,3413 de l'aire entre la moyenne et le point situé à un écart type à sa droite.

Cela nous indique que $Pr(z < 1) = 0{,}84134$. (La proportion de la distribution normale standard qui est située à gauche de un écart type à droite de la moyenne est 0,84134).

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

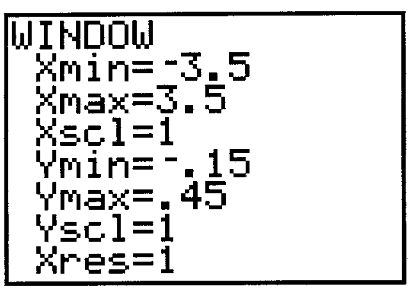
Quand on calcule des probabilités associées à la courbe normale standard, il vaut mieux tracer la courbe sur papier. Tu te souviendras ainsi que les probabilités sont liées à des aires, et tu peux vérifier si ta réponse est correcte.

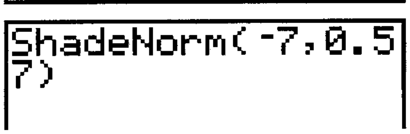
Trace des croquis comme celui ci-dessous et ombrage l'aire appropriée définie par les questions suivantes. Tu peux estimer quelle proportion de l'aire se trouvant sous la courbe a été ombragée, puis tu peux utiliser ta calculatrice (ou la table) pour vérifier si tu étais prêt de la réponse.

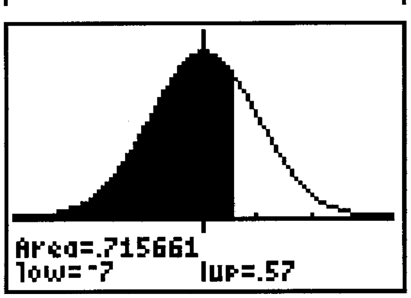


a) Pr(z < 0,57)
b) Pr(z ≤ 0,57) (Cette aire est-elle différente de celle trouvée en (a)?)
c) Pr(z > 0,57)
d) Pr(z < –0,57) (Y a-t-il plus d'une façon d'y arriver?)
e) Pr(–057 < z < 057)
f) Pr(z < –3,97) (Peux-tu trouver la réponse exacte?)

La calculatrice TI-83 peut tracer la courbe et ombrager les aires au-dessous. Quand tu as tracé le croquis pour tes réponses à la question ci-dessus, utilise ta calculatrice pour comparer tes croquis. Voici comment tu peux répondre à la question (a) avec la calculatrice.







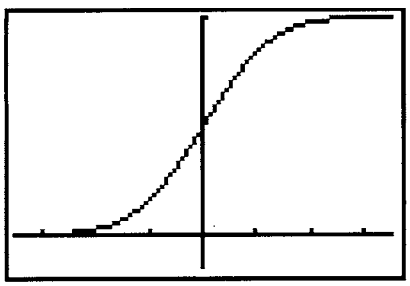
Règle la fenêtre de graphique comme ci-contre et assure-toi que tous les dessins, points et équations sont effacés ou désactivés. Ensuite, à partir de l'écran d'accueil, appuie sur 2nd et DISTR, puis sur la flèche vers la droite pour choisir le menu DRAW. Sélectionne l'élément 1 puis appuie sur ENTER. Après la parenthèse ouvrante, entre -7,0.57, ce qui indique à la calculatrice d'ombrager toute la région à gauche de la moyenne et à 0,57 écart type à la droite de la moyenne. Appuie sur ENTER pour afficher le graphique. La valeur estimée auparavant était-elle près de 0,7? La question (b) aura-t-elle une réponse différente? Explique pourquoi.

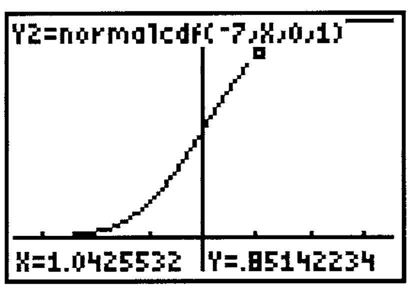
(L'option normalcdf(–7, 0.57) donne-t-elle le même résultat?)

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

Dans ces questions, tu as trouvé la proportion de la population en tenant compte de valeurs z limitatives. Si on inversait la question? Comment pourrais-tu trouver k, la valeur z ou $\Pr(z < k) = 0{,}8546$? À quel point sur la courbe l'aire au-dessous de la courbe et à sa gauche est-elle équivalente à 0,8546?

- Recommence de nouveau en effaçant tous les dessins, équations et points. Utilise la même fenêtre qu'auparavant, ***mais remplace Ymax par 1***.
- Dans une rangée vide de l'éditeur d'équations, appuie sur 2nd et DISTR, sélectionne normalcdf(, puis appuie sur ENTER. Entre –7, x, 0, 1) dans l'équation pour indiquer à la calculatrice de tracer le graphique de la fonction de probabilité cumulative normale pour toutes les valeurs de x telles que la moyenne est 0 et l'écart type est 1. Appuie sur la touche GRAPH pour afficher le graphique.





Cette courbe atteint un plateau à une hauteur de 1. Si tu appuies sur la touche TRACE et que tu te déplaces le long de la courbe de gauche à droite, les hauteurs indiquent l'aire totale sous la courbe normale standard vers la gauche des valeurs z des points de tracé. L'écran illustré ci-contre indique que l'aire de 0,85 se trouve à la gauche de la valeur x (valeur z) de 1,04. Si tu fais un zoom sur le point de tracé, tu peux arriver très près d'une hauteur de 0,8546 sur la courbe, et lire la valeur de x correspondante (valeur z) à l'écran.

- Utilise cette méthode pour répondre aux questions suivantes :

  g) Trouve la valeur de k telle que $\Pr(z < k) = 0{,}7258$.

  h) Trouve la valeur de k telle que $\Pr(z > k) = 0{,}0625$.

Normalisation de la distribution normale

Toute courbe normale peut être normalisée à l'aide d'une formule de transformation simple. La voici :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Si tu inverses les termes pour obtenir $x = z\sigma + \mu$, tu obtiens une équation similaire à l'équation de la droite $y = mx + b$.

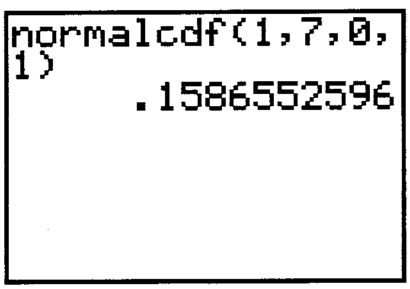
Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

Dans cette formule, le x représente toute distribution normale, μ représente sa moyenne et σ l'écart type. Tu peux trouver la valeur de z (la distribution normale standard) en effectuant des transformations sur les valeurs de x. Autrement dit, pour chacune des valeurs de x dans la distribution originale, une valeur de z correspondante peut être trouvée dans la distribution normale standard au moyen de la formule.

À l'origine, les tests de QI étaient évalués en posant $\mu = 100$ et $\sigma = 15$. Quelle proportion de la population aurait obtenu un QI supérieur à 115?

$$z = \frac{115 - 100}{15} = 1$$

Par conséquent, la note 115 se trouve à un écart type au-dessus de la moyenne. L'écran ci-dessous nous indique que l'aire entre ce point et un point bien au-dessus de la moyenne est environ 0,159, ou environ 16 % de l'aire sous la courbe normale standard globale. Ainsi, environ 16 % de la population aurait obtenu un QI de plus de 115.



a) Trouve la proportion de la population dont le QI se situe entre 110 et 125.

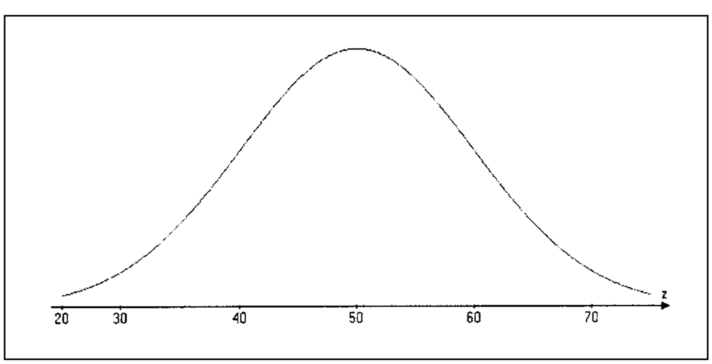
b) Forrest Gump avait un QI de 75. Quel pourcentage de la population aurait un QI inférieur à lui?

c) Quel QI devrait avoir une personne pour appartenir au 1 % supérieur de la population?

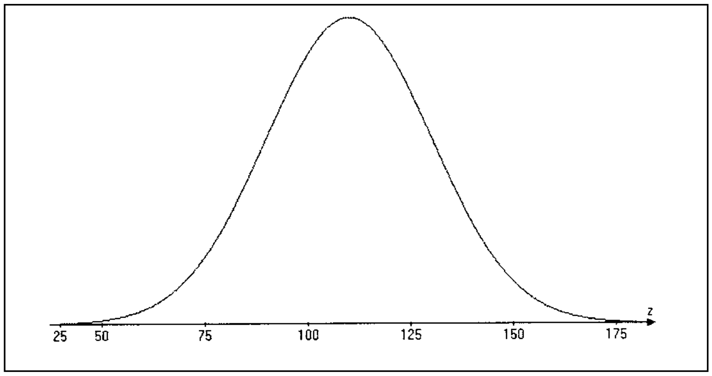
Exercice

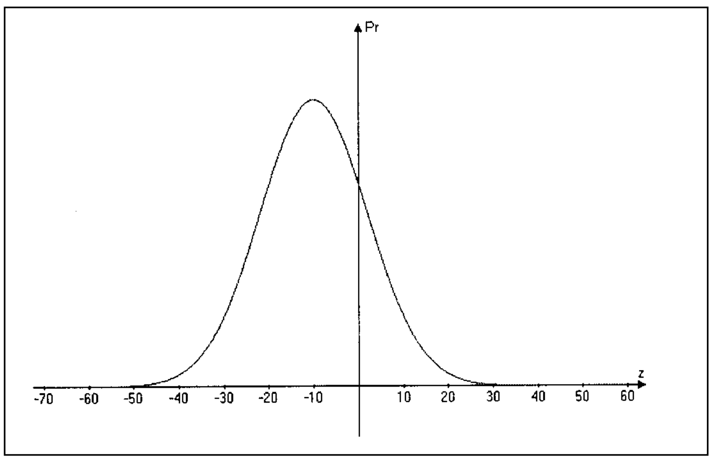
1. Pour chacune des courbes normales suivantes, trouve (aussi précisément que possible à partir du graphique) la moyenne μ et l'écart type σ de la distribution.

   a)



Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

b) 

c) 

2. La distribution de la durée de la grossesse chez les humaines est relativement normale, avec une moyenne μ = 266 et un écart type σ = 16 jours. Détermine la proportion de toutes les grossesses qui durent :
   a) moins de 244 jours (8 mois)
   b) plus de 275 jours (ou 9 mois)
   c) plus de 300 jours (ou 10 mois)
   d) entre 260 et 280 jours
3. Au début de la leçon, tu as lu des données sur les classes de Mme Miller et de M.Sapinsky. Tu connais la note moyenne et l'écart type pour chacune.
   a) Trace un graphique de la distribution des notes pour chaque classe, en utilisant la même échelle.
   b) Quelle classe a obtenu la plus grande proportion de A? Indique les calculs effectués pour trouver ta réponse.
   c) Quelle classe a obtenu la plus grande proportion de F? Indique les calculs effectués pour trouver la réponse.

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

Sommaire

Dans cette leçon, tu as exploré les distributions normales et leurs caractéristiques communes. Tu as aussi étudié l'équation de transformation qui permet de définir chaque distribution par rapport à la distribution normale standard, z. Tu as appris à utiliser ta calculatrice (ou la table fournie dans le manuel) pour calculer la proportion d'une aire sous la courbe dans une image donnée de cotes z, et à résoudre des problèmes sur les proportions de populations en fonction de certaines caractéristiques.

Avant de passer à la leçon suivante, discutez du contenu avec un groupe d'élèves.

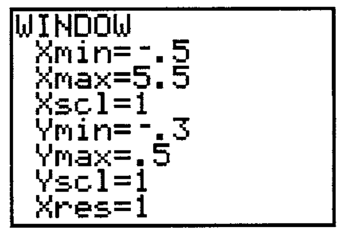
Théorie 2 : De la fonction binomiale à la fonction normale

Contexte

Nous pouvons composer des formules qui nous permettront de résoudre des fonctions de distribution de probabilité binomiale. Nous avons par la suite étudié le fonctionnement des fonctions de distribution de probabilité. Dans la présente section, nous allons examiner les liens entre ces deux types de fdp.

Nous reprendrons le « problème des bonbons » que nous avons traité dans la section Théorie des distributions binomiales. Nous avons résolu la distribution de probabilité binomiale par rapport au nombre de bonbons orange dans des échantillons comprenant 5 éléments, en supposant que 45 % des bonbons sont orange. Nous passerons maintenant en revue une partie du problème brièvement à l'aide de la calculatrice, puis nous aborderons le problème comme s'il s'agissait d'une fonction de distribution de probabilité normale. Suis les étapes suivantes :

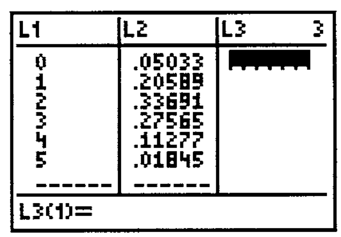
Efface toutes les listes dans ta calculatrice TI-83. Règle la fenêtre tel qu'illustré.



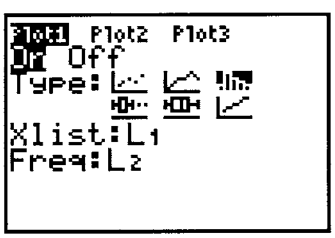
Entre les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5 dans la liste 1.

Entre la formule suivante dans la liste 2.

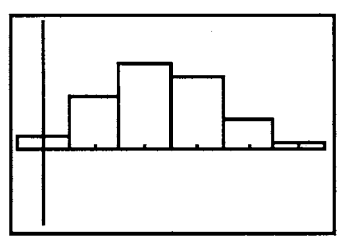
L2 = $_5C_{L1} \times 0{,}55^{(5-L1)} \times 0{,}45^{L1}$. Appuie sur ENTER pour obtenir l'écran suivant.



Règle maintenant STAT PLOT 1 comme illustré ci-dessous.

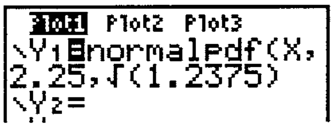


Quand tu appuies sur la touche GRAPH, tu obtiens l'écran suivant. Il illustre les probabilités associées au nombre de bonbons orange (de 0 à 5) dans un échantillon.

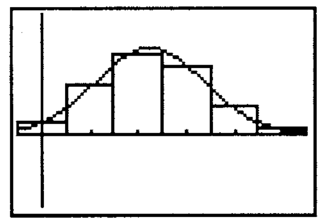


Théorie 2 : De la fonction binomiale à la fonction normale (suite)

Entre maintenant l'équation indiquée ici dans l'éditeur d'équation. Tu obtiens le graphique de la fonction de distribution de probabilité normale pour toutes les valeurs de *x* (ce qui représente le « nombre » de bonbons orange dans un sens continu), avec une moyenne de 2,25 et un écart type de $\sqrt{1,2375}$.



Quand tu appuies sur la touche GRAPH, tu obtiens cette image.

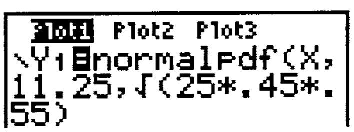


Il semble y avoir une similarité entre les deux graphiques. Étant donné que la fonction binomiale est discrète, elle est composée de barres, et la fonction normale étant continue, la courbe est lisse.

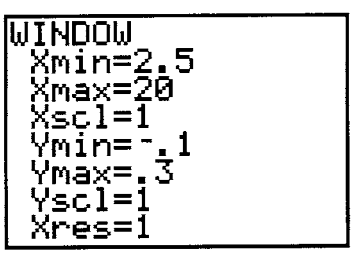
Examinons maintenant des échantillons de 25 bonbons. Pour le graphique de la fonction binomiale, inscris dans la liste 1 les entiers de 0 à 25. Dans la liste 2, inscris la formule ${}_{25}C_{L1} \times 0,55^{(25-L1)} \times 0,45^{L1}$. Étant donné que nous savons que

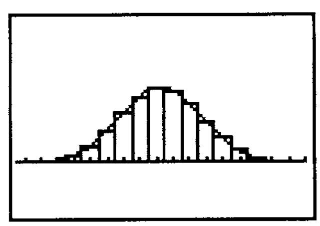
$$\boxed{\begin{aligned}\mu &= 25 \times 0,45\\ &= 11,25\end{aligned}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma = \sqrt{25 \times 0,45 \times 0,55}}$$

l'équation du graphique normal ira comme suit :



Si la fenêtre est réglée comme suit, notre graphique prendra l'apparence suivante :





Remarque que le graphique de la fonction binomiale contient plus de barres. Les deux graphiques se ressemblent beaucoup.

Applique la même procédure avec un échantillon de 75. Il faudra faire certaines modifications aux calculs et aux réglages de la fenêtre. Il te sera peut-être difficile de voir la différence entre la courbe normale et le tracé du graphique de la fonction binomiale. Vois par toi-même!

Théorie 2 : De la fonction binomiale à la fonction normale (suite)

Établir des liens

Dans chacun des trois problèmes énoncés à la page I-106, l'aire totale des barres dans le graphique de la fonction binomiale est 1. En effet, la somme de toutes les probabilités est 1. De même, l'aire sous la courbe normale est 1 et, plus la taille de l'échantillon est importante, plus la courbe normale se rapproche du tracé des barres du graphique binomial. Parce qu'elle est plus facile à utiliser, les statisticiens ont utilisé la fdp normale comme approximation de la fdp binomiale. Même actuellement, bien que nous ayons des calculatrices qui calculent les probabilités binomiales beaucoup plus rapidement que la plupart des gens ne l'auraient cru possible un jour, il est beaucoup plus facile d'utiliser les probabilités normales avec un grand échantillon. Elles sont calculées par intégration et sont beaucoup moins difficiles que les développements binomiaux de grande envergure.

Détails importants

- Dans le graphique à barres des fonctions binomiales, chacune des barres est de largeur 1. L'échelle commence à 0,5 ou 2,5 (n,5 en règle générale). De ce fait, le centre de chaque barre se trouve sur une valeur entière.
- L'aire de chaque barre est équivalente à la probabilité d'obtenir ce nombre entier de bonbons orange dans un échantillon. Par exemple, si un échantillon est de taille 25, la barre qui se trouve au-dessus de l'espace 11,5 à 12,5 représente la possibilité de trouver 12 bonbons orange dans un échantillon. L'aire est 0,151110. (Étant donné que la largeur de la barre est de 1 unité, la longueur est aussi 0,151110.)
- Étant donné que la courbe normale est lisse, sa hauteur n'est pas exactement égale à la probabilité souhaitée.
- De fait, il faut trouver l'aire sous la courbe entre 11,5 et 12,5. L'écran suivant montre les calculs nécessaires pour trouver l'aire sous la courbe entre 11,5 et 12,5, avec une moyenne de 11,5 et un écart type qui correspond à la racine carrée du produit affiché.

```
normalcdf(11.5,1
2.5,11.25,√(25*.
45*.55)
      .1523208618
```

Bien que la valeur obtenue ne soit pas exactement égale à la valeur binomiale, la différence apparaît seulement à la troisième décimale. Dans les échantillons plus larges, cette différence diminue.

En conclusion

Nous pouvons utiliser la fdc pour trouver les probabilités dans les problèmes mettant en cause des binômes et un grand échantillon (≥ 5) et une distribution relativement normale (symétrique et en forme de cloche, avec des queues courtes). La résolution exige ainsi moins de calculs. De fait, les limites de la calculatrice TI-83 peuvent être atteintes et même dépassées avec des échantillons de taille courante. (Par exemple, si on essaie de trouver la fdc binomiale pour un échantillon de 1000 éléments).

Théorie 2 : De la fonction binomiale à la fonction normale (suite)

Exercice

- Le problème des bonbons

  $n = 5$

  $\bar{x} = 2,25$

  $x \approx 1,1124$

  Trouve Pr(3 orange)

  Fonction binomiale : Pr(3) = ${}_5C_3(0,45)^3(0,55)^2 \approx 0,27565$

  ou Pr(3) = binompdf(5,0.45,3) $\approx 0,27565$

  Fonction normale : Pr(3) = normalcdf(2.5,3.5,2.25, $\sqrt{5 \times 0,45 \times 0,55}$) $\approx 0,28052$

  Remarque que pour la ***fdp*** binomiale, l'aire de la barre est centrée à 3. Elle est discrète. La courbe normale étant continue, il faut trouver l'aire cumulative sous la courbe entre 2,5 et 3,5 en utilisant la ***fdc*** normale. Dans les 2 cas, il est prédit qu'environ 28 % des échantillons de 5 bonbons contiendront 3 bonbons orange.

- Le problème des 25 bonbons

  $n = 25$

  $\bar{x} = 11,25$

  $s \approx 2,4875$

  Trouve Pr(10 orange)

  Fonction binomiale : P(10) = binompdf(25,0.45,10) $\approx 0,141889$

  Fonction normale : P(10) = normalcdf(95,105,11.25, $\sqrt{5 \times 0.45 \times 0.55}$) $\approx 0,140649$

  Les 2 méthodes nous montrent que nous devons nous attendre à ce qu'environ 14 % des échantillons de 25 bonbons contiennent 10 bonbons orange.

- Le problème des 75 bonbons : Vérifie si les deux méthodes aboutissent à des probabilités qui sont très près l'une de l'autre.
- Le problème des 1000 bonbons : Peux-tu trouver la probabilité d'obtenir 450 bonbons orange dans un échantillon de 1000? Essaie les deux méthodes.

Leçon 8 : Le Théorème de la limite centrale

Contexte

Nous avons vu diverses distributions, nous avons effectué des simulations de certaines à l'aide de nombreux échantillons et nous avons découvert que la courbe normale peut être utilisée pour décrire la distribution des proportions dans l'échantillon. Nous allons maintenant concrétiser certaines techniques que nous avons commencé à utiliser en présentant le ***Théorème de la limite centrale*** appliqué à une proportion dans l'échantillon.

Si un échantillon aléatoire simple de taille n est tiré d'une grande population dans laquelle l'attribut étudié a une proportion p, alors si l'échantillon de taille n est suffisamment important (30 ou plus), la distribution des proportions dans l'échantillon, $\hat{p}$ est approximativement normale, avec une moyenne p et un écart type $\sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Points importants

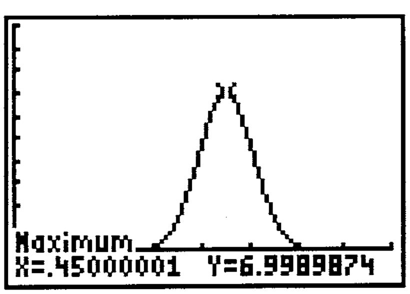
- Utiliser le Théorème de la limite centrale pour répondre à des questions déjà résolues de façon expérimentale.
- Utiliser le Théorème de la limite centrale pour répondre à des questions dont nous ne connaissons pas encore la réponse.

Activités de mise en marche

Revenons à l'expérience sur les bonbons Reese et appliquons ce théorème. Nous utiliserons un échantillon de taille n = 75 et nous tiendrons pour acquis que 45 % des bonbons Hershey sont orange.

a) Selon le Théorème de la limite centrale (TLC), de quelle façon la proportion dans l'échantillon de bonbons orange varierait-elle d'un échantillon à l'autre? Décris non seulement la forme de la distribution, mais aussi la moyenne et l'écart type. Trace un croquis de la distribution.

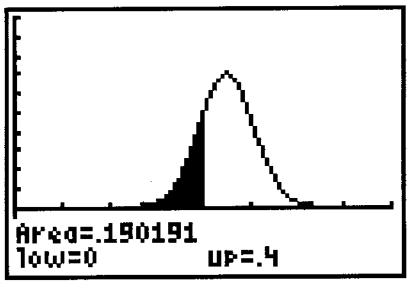
Selon le TLC, la moyenne de la distribution des moyennes de l'échantillon serait 0,45 et l'écart type $\sqrt{\frac{(0,45)(0,55)}{75}} \approx 0,057$. La distribution serait normale. La moyenne et l'écart type sont probablement très près de ta réponse.



Voici un croquis. L'échelle verticale comporte des marques de pointage à des intervalles de 0,1 unité. La fenêtre affiche Xmin = 0, Xmax = 0.8. Ymin = –3 et Ymax = 10.

Leçon 8 : Le Théorème de la limite centrale (suite)

b) Ombre l'aire sous la courbe que tu as tracée pour montrer la probabilité que la proportion de bonbons orange dans l'échantillon soit inférieure à 0,4. Estime la valeur de la probabilité.



As-tu tracé cette courbe et ombré l'aire avant d'utiliser ta calculatrice pour obtenir cette image? Tu peux utiliser la commande ShadeNorm(0, 0,–1, 0.45, 0.057).

c) Utilise ta calculatrice pour trouver la probabilité que la proportion de bonbons orange dans l'échantillon soit inférieure à 0,4. Utilise une formule de normalisation et soit la table des probabilités normales standard, soit ta calculatrice. Une autre méthode consiste à utiliser la calculatrice et la moyenne ainsi que l'écart type obtenus dans la partie (a).

La formule de normalisation nous donne ce calcul :

$$\Pr(\hat{p} < 0{,}40) = \Pr\left(z < \frac{0{,}40 - 0{,}45}{0{,}057}\right).$$

La question porte maintenant sur la courbe standard normale. Nous pouvons maintenant trouver l'aire sous la courbe et à la gauche de la cote z –0,87. $\Pr(z < 0{,}87) = 0{,}19$. Nous pouvons aussi utiliser l'écran suivant de la calculatrice pour accélérer le travail.

```
normalcdf(0,0.4,
0.45,0.057)
      .1901908713
```

Ainsi, que nous utilisions la transformation pour trouver l'aire appropriée sous la courbe standard normale ou l'information que nous donne cette courbe normale particulière, nous arrivons au même résultat : environ 19 % des échantillons comporteront moins de 40 % de bonbons orange.

d) Calcule la probabilité qu'une proportion de bonbons orange dans l'échantillon se trouve entre 0,35 et 0,55.

Le fait d'utiliser ces deux méthodes pour résoudre des problèmes démontrera encore mieux qu'elles sont équivalentes. Voici l'écran de la solution :

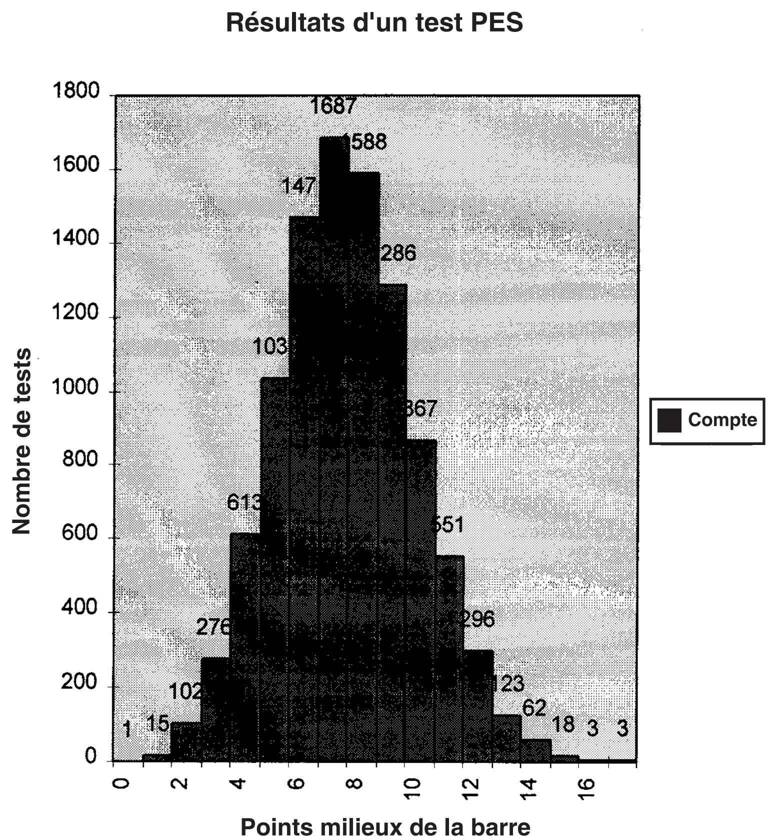
```
normalcdf(0.35,0
.55,0.45,0.057)
      .9206356941
```

Leçon 8 : Le Théorème de la limite centrale (suite)

e) Compare cette probabilité avec le résultat que tu as obtenu à la question j) dans la section Déroulement de la leçon 6. Dans cette question, on te demandait de trouver la même information au moyen d'une expérience mettant en cause un échantillon de 10 000 éléments.

Déroulement

Quand on mesure la perception extrasensorielle (PES), on demande aux sujets de reconnaître laquelle parmi quatre formes (cercle, carré, étoile ou vague) figure sur une carte qu'ils ne peuvent pas voir. Posons un test qui exige la reconnaissance de 30 cartes. Si le sujet se contente de deviner, on s'attend à ce qu'il devine 25 % des cartes sur l'ensemble de l'expérience (p = 0,25). Voici un graphique à barres illustrant les résultats de 10 000 tests simulés dans lesquels les sujets ont deviné les cartes au hasard.



a) Si un sujet devine, que nous révèle le TLC en ce qui a trait à la distribution d'échantillonnage de la proportion de réponses correctes dans l'échantillon? Donne la moyenne et l'écart type de la distribution, et décris sa forme.

b) Trace un croquis à main levée de cette distribution d'échantillonnage. Sur ton dessin, ombre l'aire qui correspond à la probabilité qu'un sujet qui devine obtienne 38 % ou plus de réponses correctes. À partir de cette aire, estime la valeur de la probabilité.

Leçon 8 : Le Théorème de la limite centrale (suite)

c) Utilise la formule de normalisation et la table des probabilités normales standard pour calculer la probabilité qu'un sujet qui devine obtienne 38 % ou plus de réponses correctes. Utilise la notation suggérée dans les exemples des activités de mise en marche.

d) Utilise ta calculatrice TI-83 pour obtenir la même information.

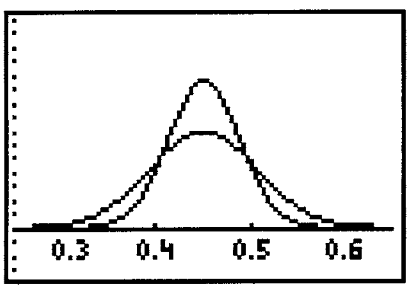
e) Étudie les 10 000 tests simulés de PES. Compare la probabilité obtenue en (d) avec la proportion des 10 000 tests simulés, dans lesquels un sujet qui devine a obtenu 38 % ou plus de réponses correctes. Les résultats sont-ils raisonnablement proches?

f) Serait-il surprenant qu'un sujet obtienne 38 % ou plus de réponses correctes s'il se contentait de deviner? Un tel événement surviendrait-il moins de 10 % du temps à long terme? Serait-il possible moins de 1 % du temps à long terme?

Exercice

1. Les questions suivantes portent de nouveau sur les bonbons Reese. Cette fois-ci, nous tiendrons pour acquis que les échantillons ont une taille de n = 175 et que les bonbons orange représentent encore 45 % de la population.

   a) Selon le TLC, quelle serait la dispersion de la proportion de bonbons orange d'un échantillon à l'autre? Décris non seulement la forme de la distribution, mais aussi la moyenne et l'écart type. Qu'est-ce qui diffère par rapport à un échantillon de 75?

   b) 

Ce croquis illustre les distributions d'échantillonnage des échantillons de 75 et de 175 éléments. Lequel est lequel? Ombre l'aire correspondant à la probabilité qu'une proportion de bonbons orange dans l'échantillon soit inférieure à 0,4 (pour un échantillon de 175 éléments). Estime la valeur de cette probabilité.

   c) Utilise la technique de la normalisation pour trouver la cote z de la proportion 0,4 de bonbons orange. Utilise ensuite soit la table, soit ta calculatrice pour calculer la probabilité qu'une proportion de bonbons orange dans l'échantillon soit inférieure à 0,4 (pour un échantillon de 175 éléments). De quelle façon cette probabilité est-elle différente de celle obtenue pour un échantillon de 75 éléments?

   d) Utilise ta calculatrice sans normaliser les données pour trouver les réponses aux questions de la partie (c).

   e) Calcule la probabilité qu'une proportion de bonbons orange dans l'échantillon (échantillon de 175 éléments) se trouve entre 0,35 et 0,55. De quelle façon le résultat obtenu est-il différent de celui obtenu pour un échantillon de 75 éléments?

Leçon 8 : Le Théorème de la limite centrale (suite)

2. Les questions suivantes portent sur l'expérience de PES.
   a) Si un sujet devine, obtiendra-t-il toujours 25 réponses correctes? Explique pourquoi.
   b) Selon le théorème de la limite centrale, de quelle façon la proportion de réponses correctes varierait-elle d'un sujet à l'autre si tous les sujets se contentaient de deviner? Précise la forme de la distribution de même que la moyenne et l'écart type. Trace le graphique de la distribution.
   c) Utilise le TLC pour trouver la probabilité qu'un sujet qui devine obtienne 27 % ou plus de réponses correctes sur 100 cartes. Trace le graphique de la distribution et ombre l'aire correspondant à cette probabilité.
   d) Selon la réponse que tu as obtenue en (c), dirais-tu qu'il serait très surprenant, plutôt surprenant ou pas tellement surprenant qu'un sujet obtienne 27 % ou plus de réponses correctes même s'il se contente de deviner à l'aveugle ce que représente chaque carte?
   e) Répète les parties (c) et (d) en supposant un pourcentage de 31 % de réponses correctes au lieu de 27 %.
   f) Répète les mêmes étapes en utilisant un pourcentage de 35 %.
   g) Combien de cartes un sujet devrait-il reconnaître correctement pour que la probabilité d'avoir réussi aussi bien ou mieux en se contentant de deviner soit de 0,025 seulement?

Sommaire

Tu as utilisé le Théorème de la limite centrale pour déterminer la moyenne et l'écart type pour plusieurs distributions normales.

Tu as utilisé la formule de la normalisation pour décrire l'information obtenue par rapport à la distribution standard normale, la distribution z. Tu as utilisé l'information normalisée de la table de distribution centrale normale pour calculer des probabilités.

Tu as calculé les mêmes probabilités sans normaliser l'information et sans la table, au moyen de la calculatrice TI-83.

Il est recommandé de discuter du contenu de cette leçon en classe pour s'assurer que tous les élèves comprennent les concepts importants.

Annexe I-2

Leçon 1 : Corrigé - Variables nominales

Déroulement

1. a) mesure
   b) nominale (binaire)
   c) nominale
   d) nominale (binaire)
   e) mesure
   f) nominale (binaire)
   g) mesure
   h) mesure
2. Il s'agit d'une variable de mesure; seules les valeurs entières sont acceptées.
3. Il s'agit d'une variable nominale.

4.-11. Ces questions utilisent les données de la classe enregistrées par les élèves. Ce type de mathématiques se passe d'explication et les étapes à suivre avec la calculatrice sont montrées. Ces questions visent à présenter la calculatrice et les distributions de variables types. Les élèves connaissent maintenant le graphique à barres simples.

Leçon 2 : Corrigé - Variables de mesure

Activités de mise en marche

1. Le graphique par points varie selon la classe. Il est relativement facile à dessiner et illustre la distribution des données.
   a) Variables
   b) L'***étendue*** est la distance entre les valeurs supérieures et inférieures des données. Elle nous indique dans quelle mesure les données sont étalées.
   c) La ***médiane*** est soit le nombre milieu dans un ensemble de données ordonné quand le nombre est impair, soit une valeur arbitraire entre les deux points de données entourant le centre d'un ensemble de données ordonné. En règle générale, la moyenne de ces deux points est choisie comme médiane.
      Exemple 1 : 1, 2, 3, 4, 5 médiane : 3
      Exemple 2 : 1, 2, 3, 4 médiane : 2,5 (ou toute valeur entre 2 et 3.)
   d) Le mode correspond aux valeurs qui reviennent le plus souvent.
      Exemple 3 : 1, 2, 2, 3, 4 mode : 2
      Exemple 4 : 1, 2, 2, 3, 4, 4 mode : 2, 4
   e) Pour trouver la ***moyenne***, il faut additionner des données et les diviser par leur nombre.
   f) La phrase devrait faire référence à l'étendue des données et au centre. La discussion devrait aider à préciser les trois façons de décrire le centre.
2. a) Une fois de plus, ce graphique par points varie d'une classe à l'autre.
   b) Si les résultats relatifs à l'expérience de voyage des élèves du secondaire sont biaisés, c'est peut-être parce qu'ils ont eu plus d'occasions de voyager que les plus jeunes. Discutez d'autres sources de biais.
3. Un élève sera disponible seulement après les heures de travail. Peut-être certains clients magasinent-ils seulement le matin. Ils sont différents sur cet aspect au moins de ceux qui magasinent l'après-midi, et leurs goûts aussi peuvent être différents. L'élève ne le saurait probablement pas. En plus, une élève peut hésiter à demander à certains clients d'essayer des tacos. Leur apparence et leur allure peuvent jouer dans cette réticence, ce qui rend l'étude non aléatoire. D'autres sources de biais sont possibles. Discutez-en.
4. a) La population à l'étude était probablement l'ensemble des électeurs de la région.
   b) La variable était l'ensemble binaire des réponses à la question.
   c) L'échantillon était l'ensemble des personnes qui ont envoyé un message électronique.
   d) Premièrement, des non-électeurs ont pu téléphoner. Ils ne font pas partie de la population visée. Deuxièmement, les électeurs qui n'ont pas une opinion marquée sur la question n'ont probablement pas appelé, et ils représentent peut-être le gros de l'électorat. Troisièmement, les électeurs qui se sentent émotivement concernés par la question auront tendance à envoyer des messages à répétition et à encourager leur entourage à faire de même. Si on constate une tendance connue parmi ces électeurs à privilégier l'une des deux réponses, le résultat du sondage par courrier électronique devrait être connu avant qu'il ne soit effectué. La décision de mener ce sondage a peut-être été prise en sachant que le point de vue du député serait appuyé.

Leçon 3 : Corrigé - Échantillon aléatoire simple

Activités de mise en marche

Les échantillons aléatoires simples en cause sont : {2, 26, 10, 15}, {11, 3, 16, 15}, {12, 23, 10, 18}. Les longueurs moyennes (au millimètre près) sont 21,75 mm, 22,75 mm et 18,5 mm. La distribution dans la classe aura une étendue relativement grande. La longueur moyenne résultant des moyennes calculées par chacun sera d'environ 20 mm.

Déroulement

Nous pouvons prédire que, quand la taille de l'échantillon est 10, la longueur moyenne obtenue par la classe sera près de celle obtenue auparavant, mais que l'étendue de la distribution des longueurs moyennes sera moins large qu'elle ne l'était pour un échantillon de quatre éléments. Cette prédiction est-elle correcte? Pourquoi? Si nous mesurons toutes les lignes, nous obtiendrons une longueur moyenne d'un peu plus de 20 mm.

Leçon 4 : Corrigé - Description de distributions

Activités de mise en marche

1. a) Ces distributions sont toutes relativement compactes et symétriques, mais les valeurs moyenne diffèrent. Que cela signifie-t-il?

   b) Ces distributions ont toutes des moyennes similaires et elles sont relativement symétriques, mais leur étendue est différente. Que cela signifie-t-il?

   c) Elles ont toutes des moyennes similaires mais, si la distribution dans G est relativement symétrique, celle de H est asymétrique vers la droite et celle de I asymétrique vers la gauche. Que cela signifie-t-il?

   d) La classe J semble similaire à la classe F; mais il semble y avoir une césure dans les résultats. On dira que la distribution est ***bimodale***. Peut-être la classe comporte-t-elle deux sous-groupes. Peux-tu expliquer pourquoi?

   e) La courbe de la classe C ressemble à celle de la classe G, sauf pour les points 42 et 94. Il s'agit de valeurs ***aberrantes***. Peux-tu essayer d'expliquer ce que cela signifie? Crois-tu que, dans un certain sens, ces valeurs sont liées à des populations différentes que la majorité des points?

   f) On constate de la ***granularité*** dans la classe L. À ton avis, que nous indique ce résultat à propos des notes ou des méthodes de notation?

Déroulement

1. a) Victoria a régné le plus longtemps.

   b) Édouard V a régné le moins longtemps.

   c) Victoria a régné pendant 63 ans et Édouard V pendant un peu moins d'un an. Le graphique à bâtons a cette apparence quand on passe d'une colonne à l'autre.

0	9 0 2 6 5 3 6 7 9 1
1	3 9 0 7 3 3 2 3 0 5
2	1 0 2 2 4 2 4 5 5
3	5 5 5 9 8 3
4	4
5	6 0 9
6	3

Quand les départs sont ordonnés, le graphique à bâtons ordonné a cette apparence.

0	0 1 2 3 5 6 6 7 9 9
1	0 0 2 3 3 3 3 5 7 9
2	0 1 2 2 2 4 4 5 5
3	3 5 5 5 8 9
4	4
5	0 6 9
6	3

Il semble que la distribution est asymétrique vers la droite (valeurs supérieures) et que la plupart des valeurs se situent entre 6 et 39 années (on a arbitrairement supprimé les 5 valeurs apparaissant à chaque extrémité).

Leçon 4 : Corrigé - Description de distributions (suite)

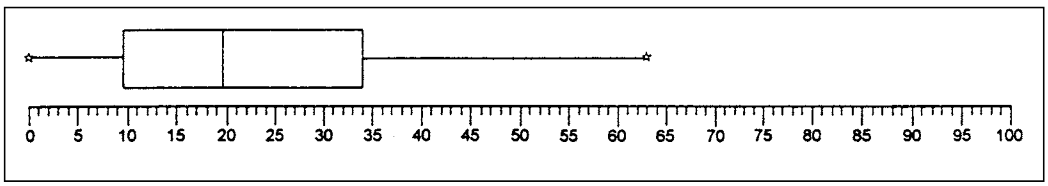
d) Si on compte 20 entrées à une extrémité ou l'autre, on voit que la valeur médiane se trouve entre 19 et 20 années. Disons 19,5 années.

e) Si on fait le compte dans les 10 entrées supérieures, nous voyons que le Q1 se trouve entre 9 et 10 années. Disons 9,5 années.

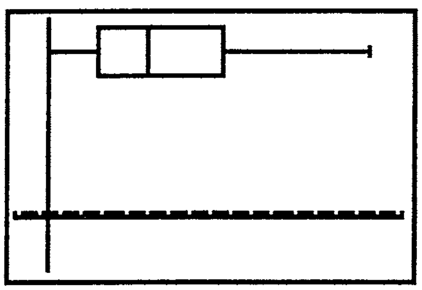
f) De même, si on compte les entrées inférieures (droite à gauche... grand à petit), nous constatons que Q3 se trouve entre 33 et 35 années. Disons donc 34 ans.

g) Ainsi, Min = 0, Q1 = 9,5, Md = 19,5, Q3 = 34, et Max = 63.

2. Le graphique en boîte devrait avoir cette apparence.

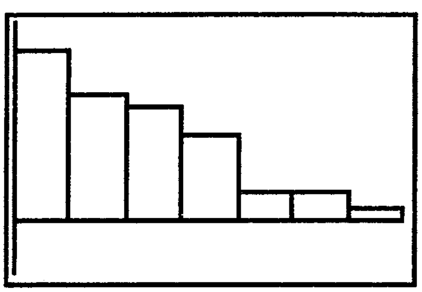


3. Le graphique en boîte affiché sur ta calculatrice aura cette apparence. Utilise la touche Trace pour afficher les valeurs en cinq points.



4. Les cinq points utilisés pour tracer le graphique en boîte, que nous avons trouvé auparavant, devraient être affichés sur ta calculatrice.

5. Le premier histogramme affiché a cette apparence. La Xscl ou la largeur de la barre est de 10,5 unités. Fais des essais en changeant cette valeur.

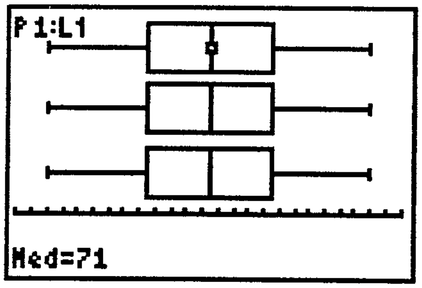


Leçon 5 : Corrigé - La règle empirique

Activités de mise en marche

a) Oui, ces distributions sont différentes. Les points de données ne sont pas les mêmes. Pour la classe 1, on obtient trois groupes de points avec deux groupes intermédiaires; pour la classe 2, la distribution des points est relativement égale dans toute l'étendue; pour la classe 3, on voit deux groupes avec trois points aux extrémités et au centre.

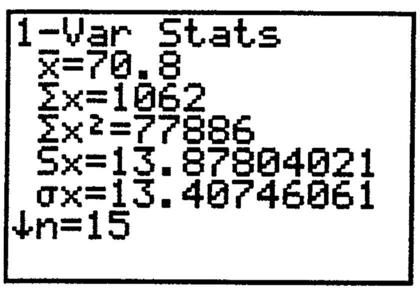
b) Les trois graphiques en boîte sont illustrés ci-dessous, avec la médiane dans le premier. Les listes utilisées étaient L1, L2 et L3.



c) Étant donné que les trois graphiques en boîte sont identiques, rien ne nous poussent à supposer que les distributions sont différentes.

Déroulement

1. Pour obtenir les données de la classe 1, appuie sur Stat, sélectionne Calc, puis 1-Var Stats, avant d'appuyer sur 2nd, sur L1 et sur ENTER. L'écran aura cette apparence.



Classe 2 : $\bar{x}$ = 70,93 et s_x = 11,8410125.

Classe 3 : $\bar{x}$ = 70,8 et s_x = 10,68510311.

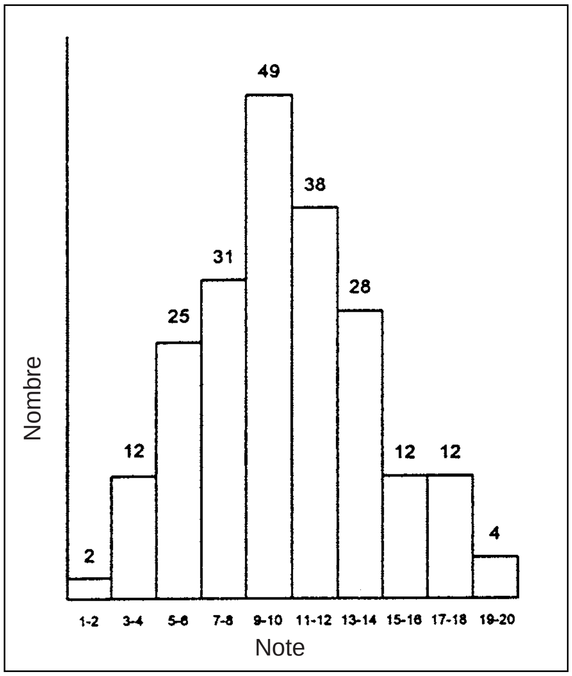
Nous n'avons pas besoin des autres valeurs affichées pour l'instant.

Les moyennes dans les deux classes sont identiques et la moyenne de l'autre classe est proche. Cependant, l'écart type diffère dans chaque cas. Cela nous indique que les distributions ne sont pas les mêmes.

2. Quand on inscrit les 7 points de données dans la colonne L4 et qu'on utilise le menu StatCalc, nous obtenons $\bar{x}$ = 1 600, médiane = 1 614, s_x = 189,2397 et écart interquartile de 1 792 – 439 = 353. Si on remplace 1 362 par 362, la médiane et l'écart interquartile restent les mêmes, mais la moyenne devient 1457,1429 alors que l'écart type devient 507,9391. Les valeurs aberrantes influent sur les changements dans les deux dernières. La médiane et l'écart interquartile restent les mêmes.

Leçon 5 : Corrigé - La règle empirique (suite)

3. Voici l'histogramme demandé.



4. Il semble avoir une forme de cloche et être symétrique.
5. Étant donné que 10,221 – 3,859 = 6,362 et que 0,221 + 3,859 = 14,08, les notes entre 6,362 et 14,08 se trouvent à l'intérieur d'un écart type de la moyenne. Ainsi, 146 notes, ou 146 ÷ 213 = 0,685 des notes se trouvent dans cette étendue.
6. De même, toutes les notes entre 2,5 et 17,9 sont à l'intérieur de 2 écarts types de la moyenne. Cela comprend toutes les notes sauf six. Par conséquent, 207 ÷ 213 = 0,972 des notes se trouvent à l'intérieur de 2 écarts types de la moyenne.
7. Il est très clair que toutes les notes se trouvent à l'intérieur de trois écarts types de la moyenne.

Exercices

1. a) Robert a obtenu 184 points au-dessus de la moyenne au SAT.
   b) Kathy a obtenu 7,4 points au-dessus de la moyenne à l'ACT.
   c) Les deux échelles sont différentes. Il n'est pas facile de les comparer, encore moins de déterminer quelle note est la meilleure.
   d) La note de Robert se trouve à environ 1,06 écart type au-dessus de la moyenne.
   e) La note de Kathy se trouve à environ 1,42 écart type au-dessus de la moyenne.
   f) La cote z de Kathy, soit 1,42, est plus élevée que la cote z de Robert, soit 1,06.
   g) Étant donné que la cote z de Kathy est plus élevée que celle de Robert, elle a mieux réussi qu'une plus grande proportion des élèves qui ont participé au SAT que Robert par rapport aux élèves qui ont fait l'ACT. Par conséquent, la note de Kathy est meilleure.
   h) La cote z de Mike est $\dfrac{740-896}{174}$ soit environ –0,90. La cote z de Karine est

   $\dfrac{19-20{,}6}{5{,}2}$ ou environ –0,31.

   i) Étant donné que ces valeurs sont négatives, la cote z de Karine est plus élevée.
   j) Les cotes z négatives indiquent que la note brute est inférieure à la moyenne.

Leçon 6 : Corrigé - La signification statistique

Activités de mise en marche

a) Un échantillon comprend douze bonbons orange, cinq jaunes et huit bruns. Les réponses varieront.

b) La proportion de bonbons orange est une statistique.

c) Non.

d) La proportion de bonbons orange dans un échantillon est 0,48. Les réponses varient.

e) Non, tous n'auront pas la même proportion.

f) Le graphique par points sera relativement symétrique, avec un centre entre 0,4 et 0,5. S'il n'y a pas beaucoup de points (moins de 30), la symétrie ne sera peut-être pas aussi évidente.

g) Non, certaines personnes peuvent suggérer que la proportion dans la population est près de 0,4, et d'autres que cette valeur est plus près de 0,5. Quelques-uns peuvent suggérer des valeurs autour de 0,3 ou 0,6.

h) Une estimation de la proportion de bonbons orange dans la population se trouve entre 0,4 et 0,5. Les réponses varient.

i) La plupart des estimations seraient relativement proches. Certaines pourront se trouver assez éloignées des autres. Il est probable que Hershey mélange les couleurs assez bien et que seulement une petite proportion des emballages contiennent un mélange de couleurs qui varie de façon significative par rapport à l'ensemble des emballages.

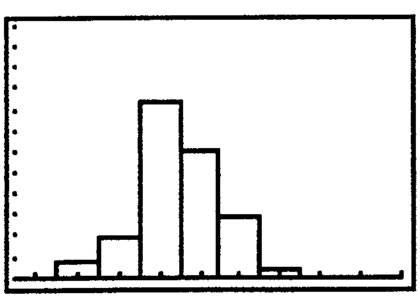
j) Un plus petit échantillon aurait donné un étendue plus large des proportions dans l'échantillon. Cela est dû au fait que chacun des nombres de bonbons dans une plus grande partie de l'échantillon et que le décompte des bonbons de couleur différente changerait la proportion de façon plus importante que ce ne serait le cas dans un échantillon plus grand.

k) Un échantillon plus grand aurait résulté en un regroupement plus étroit des proportions dans l'échantillon. Cela est dû au fait que chaque bonbon représente une proportion plus petite dans l'échantillon, ce qui a une influence moins grande sur la distribution que ce ne serait le cas pour un échantillon plus petit.

Déroulement

a) Cela peut prendre dix ou quinze minutes.

b) Un résultat produit un graphique qui a une apparence relativement symétrique et en forme de cloche, dans lequel la barre la plus haute comprend les valeurs de x telles que $0{,}35 \leq x \leq 0{,}45$. La première barre comprend les valeurs entre 0,15 et 1,25. La dernière comprend les valeurs entre 0,65 et 0,75. Voici le graphique :



Les réponses varient.

Leçon 6 : Corrigé - La signification statistique (suite)

c) Un calcul nous permet d'obtenir une moyenne de l'échantillon de 0,449. L'écart type pour 500 échantillons était 0,0965 ou environ 0,1. Cinquante échantillons devraient-ils donner le même résultat?

d) Oui, les proportions dans l'échantillon sont regroupées autour de 0,45.

e) Voici un ensemble de résultats pour les trois questions. Tes résultats (si on considère 50 échantillons) peuvent différer un peu.

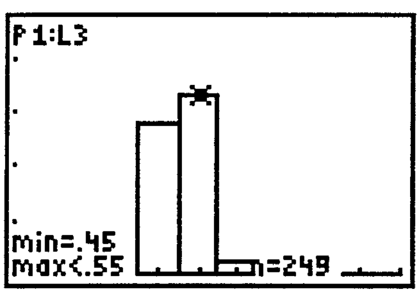
	Nombre de proportions dans l'échantillon	**Pourcentage de proportions dans l'échantillon**
À l'intérieur de $0,45 \pm 0,10$	356	71,2%
À l'intérieur de $0,45 \pm 0,20$	475	95%
À l'intérieur de $0,45 \pm 0,30$	500	100%

f) Il semble que 95 % des élèves auraient obtenu un paramètre de la population réelle à 0,20 de leurs statistiques (c'est-à-dire à l'intérieur de 2 écarts types de la moyenne.) Cela concorde avec la règle empirique.

g) Il est impossible de dire avec certitude si la valeur d'un échantillon se rapproche du paramètre de la population. On peut être raisonnablement certains que les résultats apparaissant dans le tableau ci-dessus sont sûrs, si on suppose que c'était le cas dans 95 % des échantillons.

h) Dans une expérience, on a obtenu une moyenne de 0,450027 et un écart type de 0,058.

i) Il y avait seulement quatre barres au lieu de six. Les notes étaient regroupées de la même façon, mais l'étendue semblait plus petite. Les barres du centre étaient plus grandes et les barres extérieures plus courtes. Voici le graphique produit par la calculatrice, où la barre la plus élevée est tracée. Une barre courte est cachée par les valeurs min-max.



Leçon 6 : Corrigé - La signification statistique (suite)

j) Voici un ensemble de résultats pour 500 échantillons. Les tiens ne seront peut-être pas exactement pareils.

	Nombre de proportions dans l'échantillon	**Pourcentage de proportions dans l'échantillon**
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}10$	460	82%
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}20$	500	100%
À l'intérieur de $0{,}45 \pm 0{,}30$	500	100%

Ce ne sont plus 72 % mais 92 % des proportions dans l'échantillon qui se trouvent à 0,10 de 0,45.

k) Un échantillon plus grand est plus susceptible de résulter en une proportion dans l'échantillon proche de la proportion dans la population.

l) En doublant l'écart type pour obtenir 0,116, nous obtenons une étendue de 0,450 - 0,116 à 0,450 + 0,116 dans l'expérience, soit entre 0,334 et 0,566.

m) Si on fait le tri dans la liste des proportions, seulement 28 des 500 échantillons ont une proportion de bonbons orange qui ne fait pas partie de l'étendue donnée. Ainsi, dans 472 échantillons, ou 94,4 % des échantillons, les proportions se trouvaient dans cette étendue.

n) La réponse à cette question est la même que la réponse à la question (g). Environ 95 % des échantillons auront une proportion de la population à l'intérieur de 2 écarts types par rapport à la proportion dans l'échantillon.

Exercice

1. Il est probable que cinq ou un nombre proche de cinq objets défectueux soient produits.
2. Certains peuvent obtenir quatre, d'autres six, et à l'occasion trois ou sept gadgets défectueux dans un lot. Il y en aura rarement moins que trois ou plus de sept.
3. Non. Il ne serait pas étonnant d'en obtenir quatre ou même trois.
4. Oui, cela serait inhabituel.
5. Oui, c'est vrai. Cela risque fort peu de se produire.

Déroulement

a) La donnée un tiers dans l'énoncé du problème est un paramètre parce qu'elle décrit la population d'objets produits.

b) La proportion dans l'échantillon est $\frac{4}{15}$ et son symbole est $\hat{p}$ (p chapeau).

c) Oui, il ne serait pas étonnant de trouver quatre gadgets défectueux si le tiers de la population étaient encore défectueux. Nous savons que la distribution d'échantillonnage serait centrée à cinq objets défectueux, et que l'ensemble de points formerait une cloche, y compris quatre et six objets défectueux dans un graphique par points.

Leçon 6 : Corrigé - La signification statistique (suite)

d) Non, la distribution d'échantillonnage comprendrait naturellement des nombres variés de gadgets défectueux, tel qu'il est décrit en (c).

e) Un essai a donné les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N° sur le dé	6	4	5	5	1	5	3	1	5	4	3	6	1	2	2
D ou C	C	C	C	C	D	C	C	D	C	C	C	C	D	D	D

Le premier lot comprenait 5 objets défectueux, soit le tiers (0,33).

f) Voici le résultat de quatre autres essais :

Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N° sur le dé	1	1	2	6	3	2	6	3	2	4	6	3	5	4	4
D ou C	D	D	D	C	C	D	C	C	D	C	D	C	C	C	C

Le deuxième lot comprenait de nouveau 5 objets défectueux, soit 1 sur 3 (0,33).

Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N° sur le dé	3	1	1	5	4	1	3	6	6	6	6	3	3	4	3
D ou C	C	D	D	C	C	D	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Le troisième lot comprenait 3 objets défectueux, soit 1 sur 5 (0,20).

Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N° sur le dé	2	6	6	1	1	2	6	6	3	5	5	3	5	6	2
D ou C	D	C	C	D	D	D	C	C	C	C	C	C	C	C	D

Le quatrième lot comprenait 5 objets défectueux, soit 1 sur 3 (0,33).

Gadget	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N° sur le dé	5	6	6	6	6	6	1	2	1	1	6	2	4	2	1
D ou C	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	C	D	C	D	D

Le cinquième lot comprenait 6 objets défectueux, soit 2 sur 5 (0,40).

g) Non.

h) Le graphique par points sera centré à 5 et relativement symétrique. Cependant, étant donné que l'échelle va plus loin sur la droite de 5 unités que sur la gauche, il est possible qu'il sera un peu asymétrique vers la droite. Notre connaissance des distributions d'échantillonnage nous indique que, si cette asymétrie existe, elle devrait être négligeable.

i) Seulement un des lots visés ci-dessus comprenait quatre gadgets défectueux ou moins. La proportion est 0,2.

j) Il est très probable que le processus produirait un lot comprenant quatre gadgets défectueux ou moins.

Leçon 6 : Corrigé - La signification statistique (suite)

k) À l'aide de ce programme, une expérience a donné les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

N^bre de gadgets défectueux	0	1	2	3	4	5	6	7
N^bre de lots	1	16	62	127	183	218	182	115

N^bre de gadgets défectueux	8	9	10	11	12	13	14	15
N^bre de lots	69	21	3	3	0	0	0	0

l) 369, ou 0,369 des échantillons, comprenaient 4 objets défectueux ou moins dans l'expérience ci-dessus.

m) Il est relativement possible qu'un lot contient 4 objets défectueux ou moins.

n) Ce résultat ne nous donne pas beaucoup de preuves d'amélioration parce qu'il aurait très bien pu se produire sans qu'aucune amélioration ne soit apportée.

o) 79 des échantillons (ou 0,079), comportaient 2 objets défectueux ou moins. C'est moins de 10 % mais, si 1000 lots sont produits chaque jour, on pourrait s'attendre à obtenir ce même nombre de gadgets défectueux dans un lot de 79.

p) Peut-être cela n'est-il pas si inhabituel. C'est une preuve bien mince qui ne nous permet pas d'affirmer que la modification a amélioré le processus.

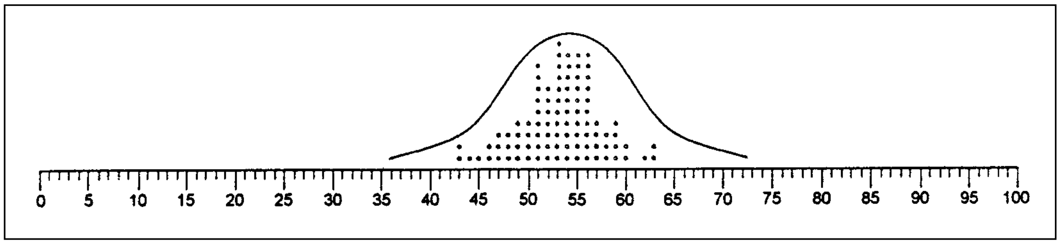
q) Seulement 1 lot sur 1000 ne comprenait aucun objet défectueux. Cela signifie qu'il est très improbable que les ingénieurs trouvent un tel lot à moins que la modification n'ait de fait amélioré le processus. Ce n'est pas une certitude cependant. Le programme dont il est question en (k) a produit un lot de ce type en supposant que le tiers de la production était toujours défectueux.

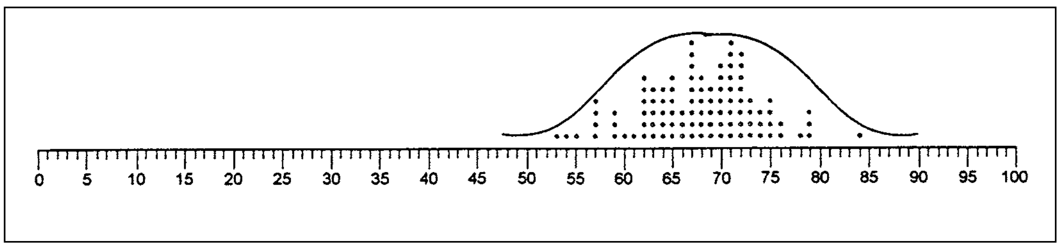
Leçon 7 : Corrigé - Aire sous la courbe normale

Activités de mise en marche

a) Les deux formes sont relativement symétriques autour d'un point sommet central, et décroissent à partir de ce point sommet dans chaque direction.

b)





c) La courbe la plus élevée est A, la plus à gauche est C et l'autre est la courbe B.

Déroulement

a) Voir les exemples donnés.

b) Ce sera la même chose. L'aire ne change pas.

c) Ce sera l'aire qui n'est pas comprise en (a) et en (b), soit 1 – 0,715661 = 0,284339.

d) Étant donné que la distribution est symétrique, la réponse sera la même qu'en (c).

e) Une façon d'y arriver est de noter que l'aire à gauche de –0,57 est la même que l'aire à droite de 0,57. Donc, la réponse est aussi 0,284339.

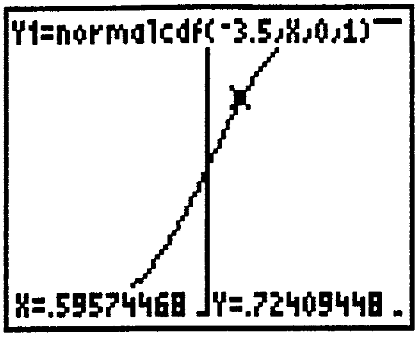
Tu peux faire cet exercice sans ta calculatrice, en considérant qu'il s'agit de l'aire entière sous la courbe, à l'exception de l'aire se trouvant entre le point 0,284339 à la gauche de –0,57 et de 0,284339 à la droite de 0,57. Ce devrait donc être 0,431322. Tu peux obtenir ce résultat avec ta calculatrice, comme il est illustré ci-dessous (si tu appuies sur ENTER).

```
normalcdf(-0.57,
0.57,0,1)
```

Tu obtiendras 0,4313223844.

f) Si tu utilises –7 comme limite à gauche, la calculatrice te dira que la probabilité est d'environ $3{,}5952 \times 10^{-5}$. C'est très faible. Peut-être est-il impossible d'être précis.

Leçon 7 : Corrigé - Aire sous la courbe normale (suite)

g) 

C'est l'écran qu'on obtient quand on applique la méthode expliquée à la leçon 7. J'ai fait un zoom d'un facteur 4 à quatre ou cinq reprises chaque fois pour tracer le point quand la valeur de y était 0,7258 et la valeur de x est 0,6010 (pour quatre chiffres significatifs). Cela signifie que $\Pr(z < k) = 0{,}7258$ quand $k \approx 0{,}6010$.

h) L'une des méthodes est la soustraction : $1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$. Cela signifie qu'il faut trouver la valeur de x qui correspond à une valeur de y de 0,9375 sur la courbe de la fdc. Avec la même technique que celle appliquée en (g), nous trouvons que la valeur de x est d'environ 1,5359. Cela signifie que $k \approx 1{,}5359$.

Normalisation des distributions normales

a) Deux méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème. Premièrement, nous appliquons la formule permettant de trouver les cotes z pour les QI de 110 et de 125. Si QI = 110, alors la cote z est $z_{110} = \dfrac{110-100}{15} = 0{,}6667.$

De même $z_{125} = \dfrac{125-100}{15} = 1{,}6667.$

Nous calculerons ensuite la valeur de la fdc (fonction de densité cumulative) pour trouver l'aire sous la courbe standard normale entre $z = 0{,}6667$ et $z = 1{,}6667$. Les résultats sont affichés dans l'écran ci-dessous.

```
normalcdf(0.6667
,1.6667,0,1)
      .2046948043
```

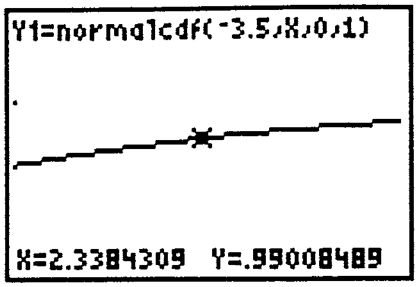
La deuxième méthode consiste à utiliser les données présentées. Le résultat est affiché dans l'écran suivant.

```
normalcdf(110,12
5,100,15)
      .2047021366
```

b) Assure-toi que tu obtiennes la même réponse sans égard à la méthode utilisée. La réponse est environ 4,8 %.

Leçon 7 : Corrigé - Aire sous la courbe normale (suite)

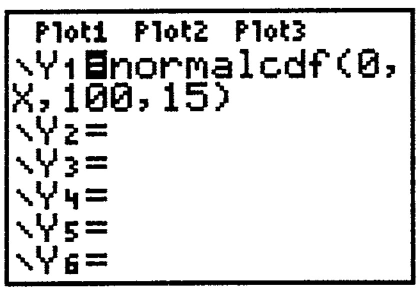
c) Tout d'abord, fais un zoom sur la courbe de la fdc pour la distribution normale standard. Tu vois que 99 % de la population se trouvent au-dessous d'un point se trouvant à environ 2,34 écarts types au-dessus de la moyenne. L'écran ci-dessous affiche le résultat.

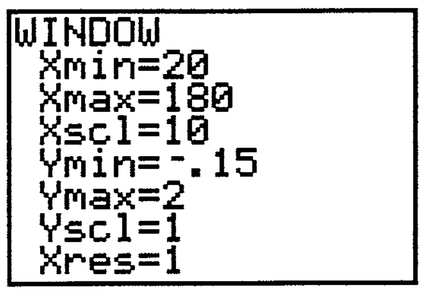


Utilise ensuite la formule de la transformation pour obtenir $2{,}338 = \dfrac{x-100}{15} \Rightarrow x = 135{,}07.$

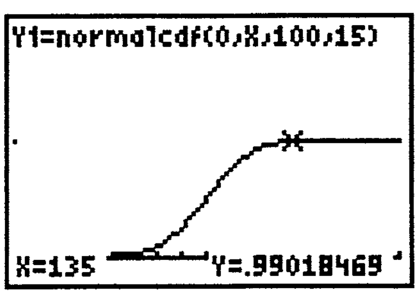
Ainsi, on peut dire que toute personne qui a un QI
supérieur à 135 se trouve dans le 1 % supérieur de la population.

- Voici une autre méthode : Utilise la courbe de la fdc, avec une moyenne de 100 et un écart type de 15. Entre l'équation, comme ci-dessous.





- Règle la fenêtre comme illustré.
- Appuie sur la touche GRAPH pour afficher la courbe, puis sur TRACE pour trouver qu'une personne dont le QI est 135 se trouve dans le 1 % supérieur de la population.



Leçon 7 : Corrigé - Aire sous la courbe normale (suite)

Exercice

1. a) Il semble que la moyenne est environ 50 et que l'écart type est d'environ 10.
   b) La moyenne est de 110 et l'écart type d'environ 25.
   c) Ici, la moyenne est d'environ –10 et l'écart type d'environ 10.
2. a) Montre qu'environ 8 % seulement des naissances surviennent avant 244 jours de grossesse. Remarque la limite inférieure utilisée. Est-elle raisonnable? En as-tu essayé d'autre? Pourquoi pas 0?

```
normalcdf(-200,2
44,266,16)
      .0845657788
```

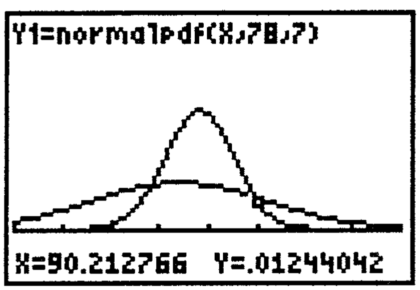
   b) Apparemment, environ 29 % des naissances surviennent après 275 jours de grossesse.

```
normalcdf(275,40
0,266,16)
      .2868876639
```

   c) C'est environ 17 %.
   d) Environ 46 % des naissances ont lieu à l'intérieur de ces limites.
3. a) La première équation s'applique à la classe de Mme Miller. La deuxième à celle de M. Sapinsky.

   La courbe la plus élevée correspond à la classe de Mme Miller.

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\Y1■normalpdf(X,
78,7)
\Y2■normalpdf(X,
74,18)
```



Remarque que les courbes se croisent à environ 90 %. Semble-t-il y avoir une aire plus importante sous le graphique de la classe de M. Sapinsky à la droite de 90 %? Probablement qu'une plus grande proportion de ses élèves ont obtenu un A. Est-ce qu'une plus grande proportion de ses élèves ont obtenu un F?

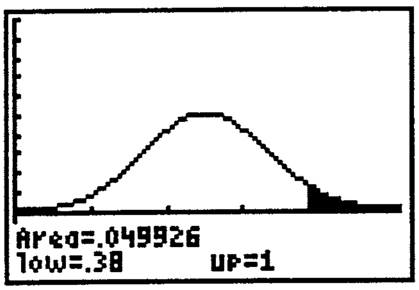
   b) Cet écran affiche les calculs. Il semble que moins de 5 % des élèves de Mme Miller ont obtenu une note au-dessus de 90, alors que 19 % des élèves de M. Sapinsky ont eu une telle note.
   c) Les calculs pour la note F seront similaires.

```
normalcdf(20,90,
78,7)
       .956761902
normalcdf(20,90,
74,18)
       .811618672
```

Leçon 8 : Corrigé - Le Théorème de la limite central

Déroulement

a) Selon le TLC, la moyenne de la proportion de réponses correctes dans l'échantillon (si les sujets devinent) est 0,25 et l'écart type est $\sqrt{\dfrac{(0{,}25)(0{,}75)}{30}}$,ce qui donne environ 0,079. Le graphique a une forme de cloche et il est symétrique.

b) 

Ton dessin devrait avoir cette apparence. Il semble que l'aire soit d'environ 5 % seulement par rapport à l'aire totale sous la courbe. Nous obtenons cet affichage avec les réglages suivants : Xmin = 0, Xmax = 0.5, Ymin = –3 et Ymax = 10, puis en utilisant l'écran du menu DISTR DRAW.

c) La formule de normalisation associe à la valeur 0,38 de cette distribution une cote z d'environ 1,65, soit $z = \dfrac{0{,}38 - 0{,}25}{0{,}079}$ 1,65. La table affecte une valeur de 0,4505 à ce score. Cela signifie que 45 % des sujets obtiennent entre 25 % et 38 % de réponses correctes. Ainsi, environ 5 % seulement obtiendront 38 % de réponses correctes ou plus (50 % obtiennent moins que 25 réponses correctes).

d) Normalcdf(0, 0.38, 0.25, 0.079) = 0,949; donc environ 95 % des sujets obtiendraient 38 % ou moins de réponses correctes. Environ 5 %, comme auparavant, obtiendraient 38 % de réponses correctes ou plus.

e) 38 % de 30 équivaut à 11,4 : nous voulons donc connaître quelle proportion dans les 10 000 résultats ont deviné la bonne réponse 12 fois ou plus. La réponse est 605, soit 6,05. Cela semble raisonnablement proche.

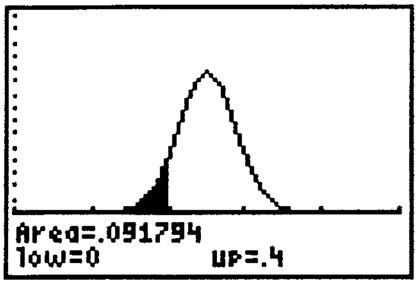
f) À long terme, un sujet obtiendrait 38 % de réponses correctes ou plus, environ 5 % seulement du temps s'il se contentait de deviner.

Exercice

1. a) Selon le TLC, dans les 2 cas la moyenne des proportions dans l'échantillon est 0,45 mais, bien que l'écart type pour les échantillons de 175 éléments soit $\sqrt{\dfrac{(0{,}45)(0{,}55)}{175}} = 0{,}0376$, il est de $\sqrt{\dfrac{(0{,}45)(0{,}55)}{75}} = 0{,}0574$ pour les échantillons de 75 éléments. Dans chacun des cas, la distribution est symétrique et en forme de cloche (autrement dit, c'est une courbe normale).

Leçon 8 : Corrigé - Le Théorème de la limite centrale (suite)

b) La courbe la plus haute et la plus étroite représente la distribution des échantillons comportant 175 éléments. L'écran ci-dessous illustre l'aire correspondant à la probabilité que la proportion de bonbons oranges dans un échantillon soit inférieure à 0,4; il semble que la probabilité que la proportion dans un échantillon se trouve dans cette région soit d'environ 0,09.



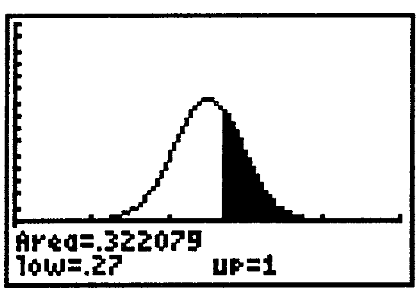
c) La cote *z* de 0,4 pour cette distribution est $\frac{0,4-0,45}{0,0376}$ Ñ–1,33. La table de la distribution normale réduite indique que 0,4082 de l'aire sous la courbe standard normale se trouve entre cette cote *z* et la moyenne. Autrement dit, 0,5 – 0,4082 = 0,0918 de l'aire se trouve à la gauche de la cote *z* –1,33.

Pour ce qui est de la distribution originale des proportions de bonbons orange dans l'échantillon, ce résultat nous indique que la probabilité qu'un échantillon comportant 175 éléments ait une proportion de bonbons orange inférieure à 0,4 est d'environ 0,09. ***Environ 9 % des échantillons comporteront moins de 40 % de bonbons oranges.***

Si nous utilisons un échantillon de 75 éléments au lieu, nous constatons que l'objet d'étude a une cote *z* de –0,8710. La table indique 0,3078, ce qui nous dit que 0,5 – 0,3078 = 0,1922 de l'aire se trouve à la gauche de cette cote *z*. ***Environ 19 % des échantillons comporteront moins de 40 % de bonbons oranges.***

d) Avec la commande normalcdf(0, 0.4, 0.45, 0.0376), nous obtenons environ 0,0917942541 ou 0,0918, comme c'était le cas ci-dessus pour l'échantillon de 75 éléments; si nous utilisons la commande normalcdf(0, 0.4, 0.45, 0.0574), nous obtenons 0,1918551544 ou environ 0,1919. C'est très proche de la valeur ci-dessus, et probablement plus proche encore de la valeur théorique correcte que ne l'était la réponse obtenue à l'aide de la table. (Nous aurions pu trouver une valeur plus exacte en interpolant à partir de la table.)

e) L'écran ci-dessous affiche les deux réponses. La première correspond aux échantillons de 175 éléments et la deuxième aux échantillons de 75 éléments.

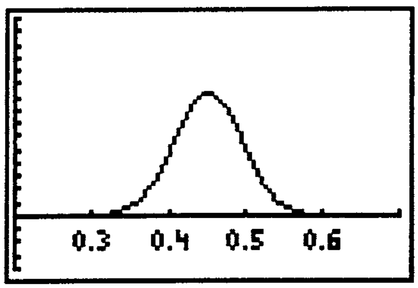


Il semble que plus de 99 % des échantillons comportant 175 éléments comprennent entre 35 % et 55 % de bonbons oranges, alors qu'environ 92 % seulement des échantillons de 75 éléments comportent ce pourcentage de bonbons oranges.

Leçon 8 : Corrigé - Le Théorème de la limite centrale (suite)

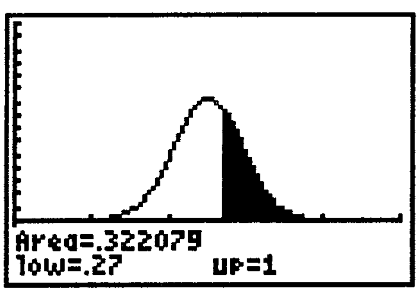
2. a) Si le sujet se contente de deviner, il pourrait obtenir 25 réponses correctes, mais il pourrait aussi en obtenir 24, 26, 23 ou 27 ou, à mesure que les probabilités diminuent, des nombres plus éloignés de 25. La proportion de réponses correctes devrait varier normalement d'un échantillon à l'autre, et à long terme le nombre moyen de réponses correctes sera 25, avec une distribution symétrique en forme de cloche autour de ce nombre.

   b) Selon le TLC, la distribution est normale et la moyenne est 0,25, avec un écart type de $\sqrt{\dfrac{(0{,}25)(0{,}75)}{100}}$ Ñ0,0433. Voici l'écran de cette distribution.



   c) La cote *z* associé à 27 % de réponses correctes devinées est $\dfrac{0{,}27-0{,}25}{0{,}0433}$ Ñ 0,4169.

   La table de valeurs sera d'environ 0,1628. Nous savons que la moyenne 0,5 + 0,1628 = 0,6626 est la proportion d'échantillons dans lesquels moins de 27 % des cartes sont devinées correctement. Ainsi, 1– 0,6626 = 0,3374 ou environ 34 %, des échantillons comprennent au moins 27 % de réponses correctes. Utilise la commande ShadeNorm(0.27, 1, 0.25, 0.0433) pour obtenir l'écran suivant de la solution :

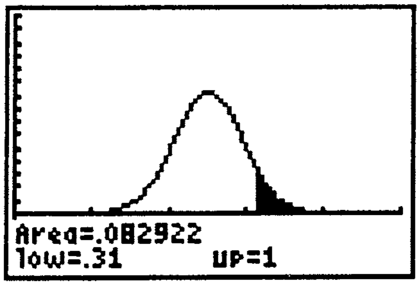


   La proportion montrée ici indique qu'environ 32 % des échantillons comportent au moins 27 % de cartes devinées correctement. C'est la seconde fois que la calculatrice donne un résultat qui ne concorde pas avec le résultat obtenu à l'aide de la table. Cela est dû au fait que les valeurs de la table augmentent à intervalle discret de 0,01 unité. Étant donné que la calculatrice donne des résultats moins éloignés, la solution est plus précise.

   d) Il ne serait pas surprenant du tout qu'un sujet devine 27 % de réponses correctes au plus. Cela surviendra une fois sur trois.

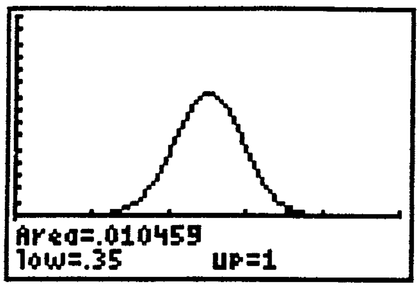
Leçon 8 : Corrigé - Le Théorème de la limite centrale (suite)

e) Voici le résultat d'une probabilité que le sujet obtienne au moins 31 % de réponses correctes.



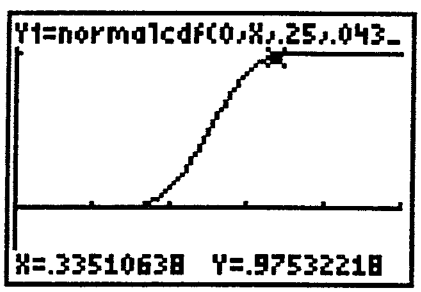
Cette fois-ci, la probabilité a chuté à environ 8 %. Il serait plus surprenant d'obtenir ce résultat que le précédent mais, encore une fois, on devrait s'attendre à ce que ce résultat se produise à quelques reprises à l'intérieur de 30 échantillons. (Les statisticiens conviennent que si moins de 30 échantillons sont étudiés, la distribution s'approche très approximativement de la normale.)

f)



Il semble que dans seulement environ 1 % des échantillons, un sujet devinerait 35 % ou plus des cartes correctement après un grand nombre d'essais. Ainsi, si un sujet y arrive vraiment, il vaut la peine de vérifier.

g) Pour que l'échantillon d'une personne se trouve au-dessous de 0,025 de la courbe, cette personne devrait avoir deviné presque toutes les cartes correctement, comme c'était le cas dans la partie (f) ci-dessus. Voici l'écran de la fonction de densité cumulative, avec le curseur positionné sur un point qui se trouve à 97,5 % de l'aire à sa gauche, ce qui laisse seulement 2,5 % à la droite. Autrement dit, la valeur de x de ce point est notre réponse à la question.



Des données plus significatives sur le plan de la précision peuvent être obtenues si on fait un zoom autour du point.

Annexe I-3

Leçon 1 : Variables nominales

Activités de mise en marche

Le module de statistique impose une lourde charge aux élèves. Ceux et celles qui acceptent de relever le défi et qui sont en mesure de composer avec la charge imposée ont besoin de toute l'aide possible. L'enseignant doit très bien connaître les activités du module, l'utilisation de la calculatrice, ainsi que la terminologie et les notions du domaine de la statistique. Il peut contribuer au bon déroulement de l'apprentissage en prévoyant d'avoir à portée de main des tableaux de collecte de données et en informant les élèves des échéances pour la présentation des données et des devoirs.

Le contenu des leçons 1 à 4 ne devrait pas être nouveau pour la plupart des élèves et sera vu plus rapidement si c'est le cas. S'il ne s'agit pas d'une simple révision, les élèves devront consacrer plus de temps à ces leçons et faire les exercices joints aux présentes notes. Dans tous les cas, des discussions en classe portant sur les notions principales aideront les élèves à comprendre la matière.

L'enseignant peut faire circuler la feuille intitulée **Enquête numéro 1** pendant que les élèves répondent aux questions. Soulignez l'importance d'écrire de manière lisible. Étant donné que les données recueillies lors de cette enquête seront utilisées dans des exercices subséquents, il faut faire circuler la feuille en question.

Les feuilles de réponses pour les questions 3 et 4 doivent également être remplies. Ces renseignements seront utilisés ultérieurement. Il est probablement utile de garder des exemplaires de ces feuilles de données pour compléter les données dans le cas de classes de petite taille.

Si les élèves travaillent de manière autonome, les feuilles de données peuvent être envoyées par la poste ou par télécopieur. Les élèves doivent avoir accès à un bon nombre de points de données pour chacune des questions. Dans le cas d'un groupe composé de moins d'une trentaine d'élèves, les données de deux classes peuvent être réunies.

Déroulement

Les questions 1 à 6 sont simples. Lorsque les élèves tracent le graphique à barres, ils peuvent laisser un espace entre les barres. Il se peut que certains élèves sachent utiliser la calculatrice TI-83; vous pouvez alors les encourager à réaliser un graphique à barres avec leurs données, mais ils n'ont pas à le faire maintenant. La représentation des données sous forme de graphiques est décrite dans une leçon ultérieure.

Leçon 1 : Variables nominales (suite)

Enquête nº 1

Élève	Sexe	Politique	1 cent	Valeur	Élève	Sexe	Politique	1 cent	Valeur
1					19				
2					20				
3					21				
4					22				
5					23				
6					24				
7					25				
8					26				
9					27				
10					28				
11					29				
12					30				
13					31				
14					32				
15					33				
16					34				
17					35				
18					36				

- Quel est votre sexe?
- Lequel des trois mots suivants décrit le mieux votre allégeance politique : libérale, modérée ou conservatrice?
- Le Canada devrait-il conserver ou abolir la pièce de 1 cent comme pièce de monnaie légale?
- Quelle est selon vous l'utilité de la statistique pour la société sur une échelle de 1 (utilité nulle) à 9 (très grande utilité)?

Leçon 1 : Variables nominales (suite)

Exercice

1. Dans le cas de chacune des variables mentionnées ci-après, détermine s'il s'agit d'une variable nominale (catégorie) ou d'une variable de mesure. S'il s'agit d'une variable nominale, indique si elle est binaire ou non.

   Ta taille, ton poids, la couleur de tes cheveux, ton mois de naissance, les cours que tu suis, la possession d'une carte de crédit (oui ou non).

2. Considère les réponses à la question sur l'allégeance politique.
   a) Combien d'élèves (pourcentage) ont indiqué être « libérale »? - « conservatrice »? - « modérée »?
   b) Représente les données sous forme d'un graphique à barres.
   c) Rédige une phrase ou deux sur ce que montrent tes calculs et ton graphique au sujet de la distribution des tendances politiques.

3. Le tableau ci-dessous indique le nombre de blessures liées à la pratique de sports qui ont été traitées aux États-Unis au cours d'une année récente, ainsi que les estimations du nombre de personnes pratiquant les diverses activités sportives.

Sport	Blessures	Participants	Sport	Blessures	Participants
Basket-ball	646 678	26 200 000	Pêche	84 115	47 000 000
Cyclisme	600 649	54 000 000	Équitation	71 490	10 000 000
Baseball	459 542	36 100 000	Planche à roulettes	56 435	8 000 000
Football	453 684	13 300 000	Hockey	54 601	1 800 000
Soccer	150 449	10 000 000	Golf	38 626	24 700 000
Natation	130 362	66 200 000	Tennis	29 936	16 700 000
Volley-ball	129 839	22 600 000	Patinage	29 047	7 900 000
Patin à roulettes	113 150	26 500 000	Ski nautique	26 633	9 000 000
Haltérophilie	86 398	39 200 000	Quilles	25 417	40 400 000

   a) Si l'on utilise le nombre de blessures comme mesure du danger d'un sport, quel est le sport le plus dangereux? Le cyclisme ou le football? Le soccer ou le hockey? La natation ou la planche à roulettes?
   b) Entre les données du tableau dans la calculatrice et calcule le taux de blessures par mille participants, dans le cas de chaque sport. D'après ce taux, quel est le sport le plus dangereux? Le cyclisme ou le football? Le soccer ou le hockey? La natation ou la planche à roulettes?
   c) Commente et compare tes réponses aux questions a) et c).
   d) Indique les trois sports les plus dangereux et les trois sports les moins dangereux, d'après le taux de blessures par mille participants.
   e) Identifie certains facteurs liés au danger d'un sport. (Quels sont les renseignements que tu pourrais utiliser pour produire une estimation plus précise du danger d'un sport?)

Leçon 1 : Variables nominales (suite)

Solutions

1. La taille et le poids sont des variables de mesure. Le mois de naissance, la couleur des cheveux et les cours que tu suis sont des variables nominales, mais non binaires, bien que l'on puisse affirmer que les mois peuvent être dénombrés. Quant à la possession d'une carte de crédit, il s'agit d'une variable nominale binaire.

2. Les réponses varient.

3. Le nombre de blessures par mille participants a été arrondi à une décimale près.

Sport	Blessures/ 1000	Sport	Blessures/ 1000
Basket-ball	24,7	Pêche	1,8
Cyclisme	11,1	Équitation	7,1
Baseball	12,7	Planche à roulettes	7,1
Football	34,1	Hockey	30,3
Soccer	15,0	Golf	1,6
Natation	2,0	Tennis	1,8
Volley-ball	5,7	Patinage	3,7
Patin à roulettes	4,3	Ski nautique	3,0
Haltérophilie	2,2	Quilles	0,6

a) Le cyclisme semble être plus dangereux que le football. Le soccer semble être plus dangereux que le hockey. La natation semble être plus dangereuse que la planche à roulettes.

b) Le tableau ci-dessus montre les divers taux de blessures par mille participants.

c) Toutes nos observations en (a) sont en ordre ascendant.

Une des observations pourrait être que six fois plus de personnes jouent au soccer qu'au hockey et que, même si le nombre de blessures est plus élevé au soccer, ce taux est loin d'être six fois plus élevé. Le tableau des taux montre que la probabilité d'une blessure est deux fois plus élevée au hockey qu'au soccer dans le cas de groupes composés du même nombre de participants.

d) Le football, le hockey et le basket-ball sont les sports les plus dangereux. Les quilles, le golf et la pêche ou le tennis sont les moins dangereux. On pourrait aussi classer la pêche et le tennis dans un ordre donné en utilisant plus de décimales. Devrions-nous faire ce calcul? Si oui, pourquoi?

e) Mon choix est le contact physique. Ce facteur est lié aux « contacts » entre les adversaires. Cependant, il y a certainement d'autres facteurs.

Leçon 2 : Variables de mesure

Activités de mise en marche

1. Les graphiques par points sont relativement faciles à réaliser à la main. Une fois terminés, ils ressemblent aux graphiques à barres. En effet, on peut tracer des lignes autour des points pour obtenir un graphique à barres. Nous utilisons des graphiques à points en raison de la facilité avec laquelle ils peuvent être réalisés à partir des données brutes recueillies. La calculatrice TI-83 ne permet pas d'effectuer facilement des graphiques à points, mais elle permet de tracer un graphique à barres correspondant à un graphique à points si l'on établit la largeur des barres (échelle x) à 1 unité. Lorsqu'on trace le graphique, la calculatrice indique la hauteur de chaque barre. Elle indique également les valeurs minimum et maximum de x pour chacune des barres. Si tu veux utiliser une échelle statistique classique, utilise 0,5 comme valeur minimum pour x. Chaque barre aura alors la valeur entière en son centre.

   Tu peux réaliser un graphique à points à l'aide de la calculatrice TI-83, mais il faut faire quelques opérations. Voici un exemple. Commence par entrer dans L1 les données du tableau. (Ces données datent de 1996 et ont trait à la hauteur (en pieds) de grands immeubles de Philadelphie (Pennsylvanie)).

548	405	375	400	475	450	412
375	364	492	482	384	490	492
490	435	390	500	400	491	945
435	848	792	700	572	739	572

Regroupe les immeubles dans des catégories à intervalles de dix pieds, de la façon suivante : déplace le curseur de manière à mettre le nom de la colonne L2 en surbrillance et appuie sur ENTER. Au bas de l'écran, le curseur devrait clignoter à côté de L2 =. Appuie sur MATH, choisis NUM, puis round (et ENTER). Appuie maintenant sur L1/10,0) pour afficher un écran comme celui qui suit (figure 1). Appuie sur ENTER pour voir que dans L2, les hauteurs sont arrondies au plus près multiple de 10, comme suit (figure 2).

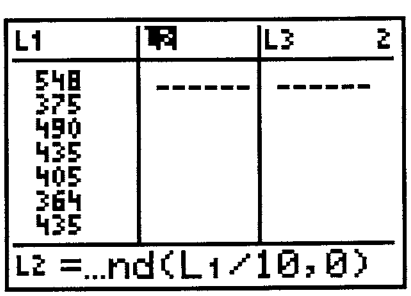


Figure 1

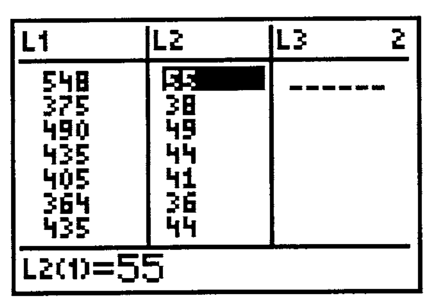


Figure 2

Leçon 2 : Variables de mesure (suite)

Effectue maintenant le tri dans L2 (choix 2 du menu STAT) pour faire apparaître les listes reproduites ci-après.

Dans L3, entre le nombre d'occurrences pour chaque valeur. Par exemple, entre 1 à côté de la valeur 36. Entre 1 à côté de la première valeur 38, 2 à côté de la deuxième et 3 à côté de la troisième. Entre 1 à côté de la valeur 39, 1 à côté de la première valeur 40, 2 à côté de la deuxième, etc.

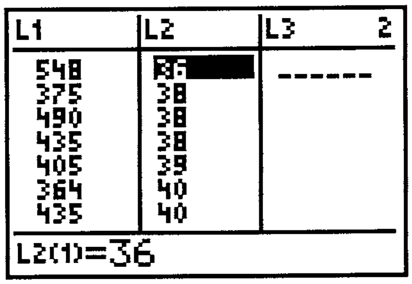


Figure 3

Appuie maintenant sur 2nd, puis sur STAT PLOT; choisis une représentation graphique et en particulier un graphique à points (premier choix), avec L2 comme liste X et L3 comme liste Y. Utilise la touche ZOOMSTAT pour obtenir un graphique à points comme celui-ci :

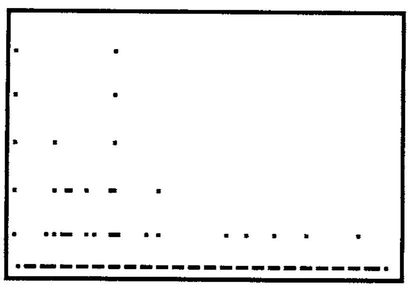


Figure 4

Il ne vaut peut-être pas la peine d'utiliser la calculatrice pour tracer des graphiques à points, mais tu préféreras peut-être cette méthode.

1. Si les élèves travaillent de manière autonome, il faut recueillir les données pour cette question. Un tableau ou une page qui peut être copié ferait l'affaire. Si l'enseignant établit la méthode de collecte de données et en informe les élèves, il doit également donner une date limite pour l'entrée de toutes les données. Cette façon de procéder permet de s'assurer que les élèves qui travaillent plus rapidement ont accès aux données lorsqu'ils en ont besoin.

Leçon 2 : Variables de mesure (suite)

Exercice

1. Décris la population, ainsi qu'un échantillon raisonnable, dans les cas énumérés ci-après.
   a) Un sondage d'opinions portant sur le contrôle des armes à feu.
   b) Une enquête sur l'emploi effectuée mensuellement par le gouvernement.
   c) Une pâtisserie a recours aux services d'un statisticien pour déterminer quel genre de publicité permettrait de faire augmenter les ventes de petits pains Kaiser.
   d) Un éditeur de musique essaie de déterminer si des stations de radio diffusent suffisamment ses titres.
2. Certaines stations de radio ont créé des numéros de téléphone « 900 » qui permettent d'enregistrer le nombre d'appels qu'elles reçoivent. Les auditeurs sont invités à composer tel numéro s'ils veulent répondre « OUI » à une question, ou tel autre numéro s'ils veulent répondre « NON ». Ils n'ont pas à dire un mot. Or, ces sondages téléphoniques font parfois des prédictions qui sont tout à fait différentes des faits une fois qu'ils sont rendus publiques. Quelles sont certaines des raisons qui peuvent expliquer cela?
3. Étudie les données recueillies précédemment auprès de la classe sur l'utilité de la statistique. Utilise le graphique à points que tu as réalisé pour répondre à ces questions.
   a) Combien d'élèves ont estimé l'utilité de la statistique à 5 sur l'échelle de 1 à 9? Quel est le pourcentage de ces élèves?
   b) Quelle proportion des élèves a estimé l'utilité de la statistique à une valeur supérieure à 5?
   c) Quelle proportion des élèves a estimé l'utilité de la statistique à une valeur inférieure à 5?
   d) Résume en quelques phrases ce que révèle le graphique à points sur la distribution des évaluations des élèves relatives à l'utilité de la statistique. Commente en particulier au degré d'acquiescement des élèves sur la question.

Leçon 2 : Variables de mesure (suite)

Réponses

1. a) La population pourrait être le groupe de personnes qui ont droit de vote dans la région en question. Un échantillon pourrait être composé d'un groupe restreint de personnes sélectionnées de façon aléatoire sur une liste de votants.

   b) La population pourrait être un groupe de personnes d'une circonscription donnée qui ont l'âge de voter et qui ne sont pas inscrites à une école ou à un programme de formation, ou un groupe de personnes qui ont occupé un emploi au cours de la dernière année, ou un quelconque autre groupe. Cette question montre la nécessité de définir clairement la population, afin d'éviter toute confusion.

   c) La population d'une enquête était composée d'acheteurs qui dépensent chaque semaine un montant supérieur à une certaine limite en produits d'épiceries. L'échantillon était composé de personnes sortant du magasin Safeway de Polo Park au cours d'une semaine donnée.

   d) Une telle population pourrait être composée de stations de radio AM qui diffusent de la musique pop. Ces stations prétendent peut-être qu'elles diffusent les 40 premières chansons du palmarès un certain nombre de fois par semaine. Un échantillon pourrait être composé d'un groupe de stations choisies au hasard à l'échelle du pays.

2. Un appelant ayant une opinion bien arrêtée sur la question pourrait composer à plusieurs reprises le même numéro sans révéler son identité. Ces appels seraient alors considérés comme des appels provenant de nombreuses personnes et les résultats obtenus seraient trompeurs.

3. Ces questions aboutiront probablement à un résumé indiquant un éventail de taux proches d'une valeur centrale. Les pourcentages enregistrés peuvent varier d'un groupe à l'autre.

Leçon 3 : Échantillon aléatoire simple

Activités de mise en marche

La meilleure façon de recueillir ces données consiste peut-être à afficher un tableau au mur où les élèves peuvent inscrire les longueurs moyennes. Ces données devraient être recueillies pour des échantillons de 4 et de 10 droites respectivement. Il faudrait également fixer une date limite.

Exercice

Si vous voulez effectuer une simulation de l'expérience relative à la proportion de filles dans votre classe, vous pouvez utiliser la calculatrice TI-83. Voici un exemple de simulation. Supposons qu'il y a un nombre d'élèves **É** dans votre classe, dont un nombre de filles **F**. Chaque élève choisit cinq noms dans un échantillon aléatoire simple. Les noms des filles sont identifiés par des chiffres allant de **1** à **F**. Les nombres **F+1** jusqu'à **É** sont attribués aux noms des garçons.

Le programme **Sample** utilisé ici simule ce processus. Les chiffres compris entre **1** et **É** sont choisis au hasard, sans double compte, dans des ensembles de nombres **T**. (Des ensembles de noms **T** différents peuvent avoir les mêmes nombres.) Ces ensembles de nombres **T** sont ordonnés par ordre ascendant et chaînés pour former la liste L3. Les élèves peuvent consulter cette liste pour déterminer combien de filles ont été choisies dans chaque échantillon.

```
Entre « Nbre D'ÉLÈVES? », É
Entre « TAILLE DE L'ÉCHANTILLON? »,T
Entre « Nbre d'ÉCHANTILLONS? »,U
ClrList L1,L2,L3
U+1→ Z
Lbl C
Z-1→ Z
Lbl A
seq(randInt(1,S),X,1,T,1)  L1
SortA(L1)
List(L1) → L2,
If prod(L2)=0
Goto A
If Z=U
Goto B
augment(L1,L2) → L3
While Z>1
Goto C
Else
End
Stop
Lbl B
L1 → L3
Goto C
End
```

Leçon 3 : Échantillon aléatoire simple (suite)

Longueurs moyennes des segments de droite

	Échantillon de 4 noms	Échantillon de 10 noms		Échantillon de 4 noms	Échantillon de 10 noms
1			19		
2			20		
3			21		
4			22		
5			23		
6			24		
7			25		
8			26		
9			27		
10			28		
11			29		
12			30		
13			31		
14			32		
15			33		
16			34		
17			35		
18			36		

Leçon 3 : Échantillon aléatoire simple (suite)

Exercice

Utilise la liste de ta classe pour effectuer cette expérience. Celle-ci a trait à des données nominales plutôt qu'à des données de mesure.

- Choisis cinq noms au hasard (à l'aide du générateur de nombres aléatoires de ta calculatrice, ou à l'aide d'une table de nombres aléatoires).
- Consigne le nombre de noms de filles choisies.
- Recueille et enregistre les données recueillies par la classe, et enregistre également le nombre de statistiques qui a été recueilli.
- Entre les statistiques dans une liste de l'éditeur de statistiques de ta calculatrice TI-83.
- Place le curseur sur l'entête d'une colonne vide. L'affichage ressemblera à celui-ci.

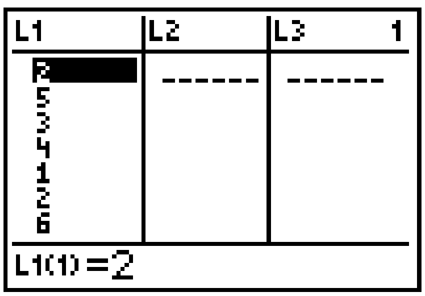


Figure 1

- Appuie maintenant sur ENTER. Le curseur descend au bas de l'écran et clignote à côté du symbole « = ». (Figure 2).

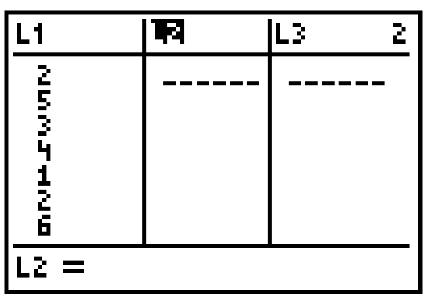


Figure 2

- Appuie sur 2nd puis sur L1 et ensuite sur / 5 . Appuie maintenant sur ENTER. La nouvelle liste indiquera la proportion de filles dans tes échantillons.
- Tu peux maintenant réaliser un graphique à points qui montre la distribution d'échantillon de ces statistiques.
- Refais le même exercice, mais en utilisant cette fois-ci un échantillon de dix noms.
- La dispersion de la proportion de filles choisies est-elle acceptable? Y a-t-il un biais? Quelle est la proportion moyenne choisie? Cette moyenne correspond-elle au nombre prévu? La taille de l'échantillon a-t-elle une incidence sur la dispersion de la statistique par rapport au paramètre?

Leçon 4 : Description de distributions

Activités de mise en marche

Les élèves devraient être en mesure de répondre aux questions a), b) et c). La question d) pourrait être difficile parce que certaines des distributions précédentes sont bimodales ou trimodales. Le point bas autour de 50 indique que la population présumée est en fait composée de 2 groupes distincts. La définition de la population était peut-être inadéquate.

Déroulement

Les élèves voudront peut-être entrer les données dans une liste de la calculatrice TI-83 et faire le tri de cette liste. Le tracé de base ordonné peut alors être réalisé immédiatement. La calculatrice TI-83 peut être utilisée pour obtenir le sommaire de cinq nombres. Après avoir entré les données dans L1 (ou dans toute autre liste), utilise les fonctions STAT, CALC, 1-Var Stats et tape 2nd L1. Tu devras utiliser la flèche descendante pour parcourir les statistiques à la recherche de la médiane et des quartiles.

La calculatrice produit également un tracé en boîte. Appuie sur 2nd Y= pour afficher l'écran STAT PLOT. Choisis Plot 1, place le curseur sur le mot On et appuie sur ENTER. De manière analogue, sélectionne le type de tracé en boîte qui a une ligne médiane dans la boîte et choisis L1 comme liste X et fréquence. Il se peut que tu doives modifier les dimensions de la fenêtre de graphique. La fonction ZOOM 9 est un moyen rapide d'afficher la fenêtre pour des tracés statistiques. En appuyant sur TRACE et en utilisant les flèches « droite » et « gauche », tu peux obtenir les valeurs du sommaire de cinq nombres.

Leçon 4 : Description de distributions

Exercice

1. Le tableau ci-dessous contient un échantillon de temps de réaction d'un sujet à un certain stimulus. Il comprend 90 entrées. Le temps a été mesuré en millisecondes.

10	14	11	15	07	07	20	10	14	09	08	06	12	12	10	14	11	13
13	11	12	10	08	09	14	18	12	10	10	11	07	17	12	09	09	11
14	12	12	10	09	07	11	09	18	06	12	12	10	08	14	15	12	11
11	08	11	10	13	08	11	11	13	20	06	13	13	08	09	16	15	11
20	08	17	12	19	14	17	12	18	16	15	16	10	20	11	19	20	13

   Produis un ***tracé à tiges*** de ces données et utilise-le pour trouver le sommaire de cinq nombres relatif à la distribution des données.

   a) Fais un tracé en boîte à la main, puis à l'aide de la calculatrice. Compare les deux tracés.

   b) Utilise ta calculatrice pour trouver le sommaire de cinq nombres relatifs à la distribution des données. Compare tes réponses avec celles obtenues en (a).

   c) Utilise la calculatrice pour produire un histogramme indiquant cette distribution des données.

   d) Tu as étudié les affichages et tu connais les valeurs de la moyenne et de la médiane relatives à cette distribution des données. Explique pourquoi la moyenne et la médiane tombent aux points où elles se trouvent. Ces valeurs sont-elles proches ou éloignées l'une de l'autre?

2. Trace un graphique qui montre la distribution de la consommation d'essence sur l'autoroute par les voitures 1996 mentionnées ci-après. Explique ton choix de graphique.

MODÈLE	Milles/gallon	MODÈLE	Milles/gallon
Buick Century	31	Lexus GS300	24
Buick Regal	29	Lexus LS400	24
Cadillac Eldorado	26	Lincoln Mark VIII	24
Chrysler Cirrus	29	Mazda 626	24
Dodge Stratus	36	Nissan Maxima	24
Ford Taurus	29	Oldsmobile Aurora	24
Ford Thunderbird	26	Oldsmobile 88	24
Hyundai Sonata	29	Rolls-Royce Silver Spur	24
Infiniti I30	28	Toyota Camry	24
Infiniti Q45	22	Volkswagon Passat	24
Jaguar XJ12	16	Volvo 850	24

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

3. En 1995, les salaires moyen et médian versés aux joueurs de baseball des ligues majeures étaient de 275 000 dollars et de 1 089 000 dollars. Lequel des montants représente le salaire moyen et quel est le salaire médian? Justifie ta réponse.

4. Voici une série qui représente les périodes d'affectation des professeurs du département de statistique : {22, 19, 13, 8, 6, 4, 3, 1, 0}.

   a) Trouve les valeurs de la moyenne et de la médiane relatives à cette série.

   b) Supposons maintenant qu'on ait entré par erreur le nombre 222 comme première valeur. Calcule de nouveau les valeurs de la moyenne et de la médiane avec cette valeur au lieu du nombre 22.

   Remarque : Une mesure dont la valeur demeure relativement inchangée en présence de valeurs aberrantes (c'est-à-dire des points de données éloignés de la majorité des points) est dite ***résistante***.

   c) Laquelle des deux valeurs est résistante : la médiane ou la moyenne? Rédige quelques phrases pour expliquer pourquoi chacune des valeurs est, ou n'est pas, résistante.

Leçon 4 : Description de distributions (suite)

Réponses

1. Tu n'as peut-être pas besoin d'une réponse dans ce cas. Est-ce que d'autres élèves ont obtenu les mêmes résultats?

2. Cette question, par contre, pourrait nécessiter une discussion. Tu pourrais avoir choisi un graphique à tiges. Un graphique à points comporterait peu de points à chaque valeur « milles/gallon » et aurait en somme peu d'intérêt. Des tracés à tiges ou des graphiques à points pourraient être plus intéressants et montrer comment les données sont réparties. La distribution est-elle asymétrique? Quelle est sa portée? Quelle est sa valeur centrale? Ces aspects devraient être visibles (du moins approximativement).

   Un tracé en boîte serait également un choix intéressant et devrait révéler le même genre d'information si tu sais comment la chercher. Pourquoi ne pas essayer plusieurs types de tracé? Compare les diverses caractéristiques.

3. Nous savons que la majeure partie des équipes est composée de joueurs qui ne sont pas des vedettes. Plus de joueurs gagnent des salaires relativement faibles par rapport aux joueurs qui touchent des montants faramineux. Étant donné que la médiane est la valeur au-dessus de laquelle on trouve la moitié des salaires, cette valeur pourrait être assez faible, comparativement à la moyenne, qui est la valeur moyenne de tous les salaires. En effet, les montants astronomiques contribuent beaucoup à cette moyenne mais ne changent rien au fait que de nombreux joueurs gagnent relativement peu.

   Je pense que la valeur médiane est 275 000 dollars... ce qui n'est pas si mal! Il se peut fort bien que la moyenne soit propulsée à 1 089 000 dollars par quelques salaires très élevés.

4. a) Dans ce cas, la valeur médiane est clairement 8. La moyenne est environ 8,4.

   b) La valeur médiane est toujours 8. La moyenne est environ 30,7, ce qui correspond à une augmentation importante.

   c) La valeur médiane est résistante, la valeur moyenne non. Les questions auxquelles tu as répondu jusqu'ici devraient t'avoir permis de bien comprendre les raisons pour lesquelles il en est ainsi. Discute de ces raisons avec d'autres élèves.

Leçon 5 : La règle empirique

Déroulement

Les élèves peuvent utiliser leur calculatrice pour trouver la moyenne et l'écart type dans ce cas. Efface les listes de statistiques et appuie sur STAT et EDIT. Déplace le curseur au-dessus des noms des colonnes, puis vers la droite, jusqu'à ce que s'affiche une zone de nom libre. Tape le mot **COTE** dans cette zone, et dans la colonne correspondante, entre les chiffres 1 à 20. Procède de la même manière pour créer les listes **COMPTE** et **PROD**.

Après avoir entré les fréquences dans la liste **COMPTE**, place le curseur sur l'en-tête de la colonne **PROD** et appuie sur ENTER. Appuie sur 2nd et LIST, choisis **SCORE**, appuie sur * et enfin choisis la liste **COMPTE** et appuie sur ENTER. Les produits des colonnes **COTE** et **COMPTE** sont affichés dans la colonne PROD. Par la suite, passe à l'écran initial de la calculatrice, appuie sur 2nd et LIST, sélectionne le menu MATH, choisis SUM et appuie sur ENTER. Appuie sur 2nd et LIST et choisis **PROD** avant d'appuyer de nouveau sur ENTER. Le résultat, qui est la somme de toutes les cotes, est 2 177. Étant donné qu'il *y* avait 213 cotes, la cote moyenne est 2 177 ÷ 213 = 10,22 .

Comme dans le cas du problème sur le taux de métabolisme, pour trouver l'écart type des scores, nous devons créer des colonnes désignées par les noms **ÉCART** (écart des scores par rapport à la valeur moyenne) et **CARÉC** (carrés des déviations par rapport à la moyenne). Les contenus de **ÉCART** sont obtenus par le calcul **COTE** – 10,22, dans le cas de chaque entrée. La calculatrice effectue cette opération pour nous. Les contenus de **CARÉC** sont simplement les carrés des valeurs de la colonne **ÉCART**. Étant donné qu'il y a plusieurs cas de scores particuliers, il faut créer une autre colonne, désignée par le nom **TOTAL**, dont les contenus sont obtenus en multipliant **COMPTE** par **CARÉC**. Lorsqu'on veut connaître la somme de la colonne TOTAL, la calculatrice donne ***3156,6292***. Ainsi, d'après la formule mentionnée à la page I-80,

$$s_x = \sqrt{\frac{3156{,}6292}{212}}.$$

On obtient 3,8587. Nous avons donc $\overline{x}$ = 10,221 et S_x = 3,859.

Leçon 6 : La signification statistique

Activités de mise en marche

Mettez un tableau à la disposition des élèves pour qu'ils y inscrivent les réponses à la question 1d). Fixez une date limite pour l'inscription de toutes les réponses. Les élèves qui travaillent de manière autonome ont tendance à prendre du retard s'il n'y a pas de rappel.

Déroulement

Vous pouvez charger ce programme-ci, ainsi que d'autres programmes, dans un ordinateur et les récupérer à l'aide du programme TI-Graph Link. Il s'agit d'un programme fourni par Texas Instruments avec un câble qui se branche dans un port série. Les programmes peuvent être transférés d'une calculatrice à une autre au moyen de câbles courts fournis avec les appareils et de la touche LINK. (Appelez ce programme ***BONBONS***.)

```
For(N,1,50,1)
ClrHome
Output(5,5,"SAMPLE")
Output(5,12,N)
25 → dim(L1)
50 → dim(L2)
seq(iPart(rand+0,45),X,1,25,1)
sum(L1) → L2 (N)
L2(N)/25 → L3(N)
End
PlotsOff
0,05 → Xmin
1 → Xmax
0,1 → Xscl
–1 → Ymin
40 → Ymax
25 → Yscl
1 → Xres
Plot1(Histogram, L3)
DispGraph
```

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

Exercice

Ces questions pourraient faire l'objet d'une brève discussion en classe. Dans le cas d'élèves qui travaillent de manière autonome, vous pourriez les informer quelques jours à l'avance de la tenue de cette activité. Cela encouragera peut-être les plus lents à progresser.

Déroulement

Mettez un tableau à la disposition des élèves pour qu'ils y inscrivent les résultats de la simulation. Certains élèves n'ont probablement pas de dés. Voici un programme (DICE) qui simule le jet d'un dé ou de deux dés.

```
AxesOff
FnOff :PlotsOff
0 → Xmin:94 → Xmax
0 → Ymin:57 → Ymax
Menu("***OPTIONS***","ONE DIE",1,"TWO DICE",2)
Lbl 1
1 → Z
Goto 0
Lbl 2
2 → Z
Lbl 0
0 → C
If Z=1
45 → H:25 → V
If Z=2
25 → H:25 V
ClrDraw
Lbl J
iPart((rand*6+1) → A
58-V → Q
H → P
Line(P-10,Q-12,P+13,Q-12)
Line(P+13,Q-12,P+13,Q+9)
Line(P+13,Q+9,P-10,Q+9)
Line(P-10,Q+9,P-10,Q-12)
If A=1
Text(V,H,"°")
If A=2
Then
Text(V-6,H-6,"°"):Text(V+6,H+6," ")
End
```

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

```
If A=3
Then
Text(V,H,“°”):Text(V-6,H-6,“°”):Text(V+6,H+6,“°”)
End
If A=4 or A=5 or A=6
Then
Text(V-6,H-6,“°”):Text(V-6,H+6,“°”):Text(V+6,H-6,“°”):Text(V+6,H+6,“°”)
End
If A=5
Text(V,H,“°”)
If A=6
Then
Text(V,H-6,“°”):Text(V,H+6,“°”)
End
If Z=2 and C=1
Then
Pause
Goto 0
End
If Z=2
Then
H+40 → H
C+1 → C
Goto J
End
Pause
Goto 0
Stop
```

Leçon 6 : La signification statistique (suite)

Ce programme (WIDGT) a été conçu par Allan J. Rossman et son exécution prend environ dix minutes.

```
ClrHome
AxesOn
Disp “HOW MANY”
Input “BATCHES?”,S
Output(8,3,“PLEASE WAIT”)
PlotsOff
ClrDraw
FnOff
ClrList ʟMIDPT
ClrList ʟWIDGT
0 → dim( ʟWIDGT)
For(I,1,16)
0 → ʟWIDGT(I)
End
For(I,1,S)
max(randBin(15,1/3,1)) → W
ʟWIDGT(W+1)+1 → ʟWIDGT(W+1)
Output(5,8,I)
End
ClrHome
Disp « »
Pause ʟWIDGT
For(I,0,15)
I → MIDPT(I+1)
End
0 → Xmin
15 → Xmax
0 → Ymin
max( ʟWIDGT)+5 Ymax
1 → Xscl
Ymax/10 → Yscl
Plot1(Histogram, ʟMIDPT,WIDGT)
PlotsOn 1
DispGraph
```

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale

Déroulement

Jusqu'à tout récemment, les statisticiens utilisaient des tables pour trouver la valeur de zones situées au-dessous de la courbe standard normale. Ces tables contiennent des cotes z qui indiquent la distance, en écarts types, à laquelle se trouve une valeur donnée par rapport à la moyenne de la population. (Une telle table est reproduite ci-dessous.) Une ***cote z*** de 1,0 indique une valeur située à un écart type au-dessus de la moyenne, et la table indique que la proportion d'une population à distribution normale située entre la valeur moyenne et la cote z de 1,0 est de 0,3413. Autrement dit, environ 34 % de la population est située entre la valeur moyenne et un écart type au-dessus de cette moyenne.

Trois faits importants

1. La valeur indiquée par la table représente la région au-dessous de la courbe standard normale située entre la moyenne (ou centre) de la distribution et le point auquel on s'intéresse.

   Par exemple, la valeur de la zone située entre la moyenne et un écart type vers la droite est de 0,3413. On peut donc dire que $\Pr(0 < z < 1) = 0{,}3413$.

2. La valeur de l'aire totale au-dessous de la courbe est 1; la valeur de chaque moitié de cette aire est donc 0,5. Nous pouvons donc calculer la valeur de la zone située à la droite ou à la gauche d'un point donné.

   Pour connaître la proportion de la population située à la gauche de $z = 1$, on ajoute cette valeur à celle de la zone située à la gauche de la moyenne. C'est-à-dire :
   $\Pr(-\infty < z < 1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$.

3. La courbe est symétrique autour de la moyenne; la zone à droite d'un point donné est donc égale à la zone à gauche de ce point.

   Ainsi, si l'on veut connaître la proportion de la population située à la droite de $z = 1$, on peut effectuer la soustraction $0{,}5 - 0{,}3413$, ce qui donne 0,1587.

Leçon 7 : Aire sous la courbe normale (suite)

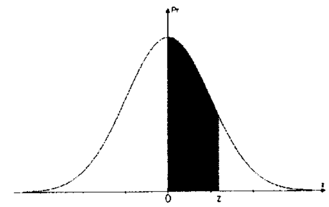


Table de distribution standard normale
Pr(0 < z < z)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999