Annexe C-1

Exercice d'algèbre

- **décomposer des trinômes**

Les trinômes décomposés en facteurs devraient être exprimés sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$ ou a est un nombre premier inférieur à 10. La valeur de c devrait avoir un nombre minimal de facteurs.

Exemple

Décompose en facteurs

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 9x - 10$

c) $2x^2 - 5x + 3$

d) $x^2 - 4x - 12$

e) $2 \cos^2 x + \cos x - 1$

f) $5 \tan^2 x - 12 \tan x + 7$

Solutions

a) $(x + 3)(x + 2)$

b) $(x + 10)(x - 1)$

c) $(2x - 3)(x - 1)$

d) $(x - 6)(x + 2)$

e) $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

f) $(5 \tan x - 7)(\tan x - 1)$

- **trouver la valeur de *a, b* ou *c* quand deux des trois valeurs sont données**

Exemple

Soit $ax^2 + bx + c$, trouve les valeurs possibles de b si :

a) $a = 1$, $c = 6$

b) $a = 2$, $c = -5$

Solutions

a) $x^2 + bx + 6$ pourrait être décomposée en facteurs :

$(x + 6)(x + 1) \Rightarrow b = 7$

$(x - 6)(x - 1) \Rightarrow b = -7$

$(x + 2)(x + 3) \Rightarrow b = 5$

$(x - 2)(x - 3) \Rightarrow b = -5$

$\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 5, ± 7

b) $2x^2 + bx - 5$ pourrait être décomposée en facteurs :

$(2x + 5)(x - 1) \Rightarrow \quad b = 3$

$(2x - 5)(x + 1) \Rightarrow \quad b = -3$

$(2x + 1)(x - 5) \Rightarrow \quad b = -9$

$(2x - 1)(x + 5) \Rightarrow \quad b = 9$

$\therefore$ la valeur de b pourrait être ± 3, ± 9

- **décomposer en facteurs la différence de carrés**

Exemple

Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

a) $x^2 - 4$
b) $x^2y^2 - 1$
c) $\cos^2 x - \sin^2 x$
d) $x^2 - 49$
e) $x^4 - 16$

Solutions

a) $(x - 2)(x + 2)$
b) $(xy - 1)(xy + 1)$
c) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
d) $(x - 7)(x + 7)$
e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

- **décomposer en facteurs communs**

Exemple

Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

a) $9x^2 + 18$
b) $2x^2 + 6x + 4$
c) $\sin x - \sin x \cos x$
d) $8x^2 - 32$

Solutions

a) $9(x^2 + 2)$
b) $2(x + 2)(x + 1)$
c) $\sin x(1 - \cos x)$
d) $8(x - 2)(x + 2)$

- **résoudre des questions qui font appel à la décomposition en facteurs**

Les élèves devraient être en mesure de résoudre des équations simples sans démontrer les étapes de la décomposition en facteurs.

Exemple

Trouver la valeur de x dans chacune des équations suivantes :

a) $x^2 - 4 = 0$
b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $4x^2 + x = 0$

Solutions

a) $x = 2, -2$
b) $x = -2, x = -1$
c) $x = 0, x = -\frac{1}{4}$

- **simplifier des fractions complexes**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

  En calcul, l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise avec l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

  Exemple

  Simplifie :

  a) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{4x+1}{x-1}}$

  b) $\dfrac{2(x-h)^2}{x-h+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

  c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$

  d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

  Solutions

  a) $\dfrac{x+2}{4x+1}$

  b) $\dfrac{(x+1)2(x-h)^2-(x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

  c) $\sqrt{3}$

  d) $\dfrac{\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

- **trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs**

Exemple

Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

a) $\frac{2x-1}{x^2-4};\ \frac{x}{x-2}$

b) $\frac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3};\ \frac{x^2}{x^2-9}$

c) $\frac{\sin x}{\cos x};\ \frac{1-\sin x}{\sin x}$

Solutions

a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

c) $\cos x \sin x$

Mise en correspondance – Problème et solution

Anenxe C-2

Formules relatives à la différence

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Probléme

Trouve la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution

Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\dfrac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

Étape 3

Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Mise en correspondance –Problème et solution

Annexe C-3

Formules relatives à la somme

sin $(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

cos $(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Problème

Trouve la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution

Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\frac{7\pi}{12}$.

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}$$

Étape 3

Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Mise en correspondance – Problème et solution

Annexe C-4

Identités inverses

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identités du quotient

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Identités trigonométriques

Identités de base

dérivées de $x^2 + y^2 = r^2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

Autres relations pythagoriciennes

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Étapes générales de la résolution d'une équation

#1 Effectuer les opérations nécessaires pour réduire un côté de l'équation à la même forme que l'autre côté

#2 On peut accomplir l'étape 1 comme suit :

a) en effectuant les additions ou les soustractions appropriées

b) en effectuant les multiplications ou les divisions appropriées

#3 Simplifier la fraction et décomposer en facteurs si nécessaire :

a) essayer de reformuler les expressions trigonométriques en un seul terme

Exemple

$$\sin\theta\sec\theta = \tan\theta$$

Côté gauche $(\sin\theta)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta$$

Côté gauche = Côté droit

Annexe C-5

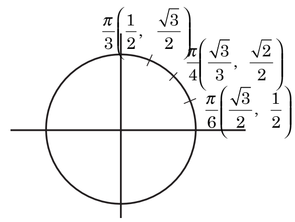
Méthode en trois points – Stratégies du vocabulaire

Terme/Concept :
Fonctions circulaires particulières

Formule/Équation :
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

Caractéristiques :
- coordonnées précises
- appartiennent au cercle unitaire
- multiples de tous les types dans chaque quadrant

Exemple :



Terme/Concept :
Équation trigonométrique du premier degré

Formule/Équation :
$2 \cos \theta + 4 = 5$

Caractéristiques :
-
-
-
-

Exemple :
$\cos \theta > 0$
Quadrants I, IV

$2 \cos \theta = 1$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Terme/Concept :
Équaiton trigonométrique du second degré

Formule/Équation :
$2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$

Caractéristiques :
- décomposition en facteurs nécessaire en générale
- possible d'utiliser une formule quadratique
-

Exemple :
Quadrants III, IV

$(2x+1)(x-1) = 0$

$\sin \theta = -\frac{1}{2} \qquad \sin \theta = 1$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Terme/Concept :
Identité de base

Formule/Équation :
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Caractéristiques :
- issue d'une équation générale du cercle unitaire
- utilisée pour résoudre une fonction trigonométrique si on connaît l'autre

Exemple :
Soit $\cos \theta = \frac{-5}{13}$, et θ appartient au Q II, trouve $\sin \theta$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\therefore \theta > 0$

$1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2 = \sin^2 \theta$

étant donné que $\sin \theta > 0$,

$\sin \theta = \frac{12}{13}$

Méthode en trois points - Stratégies du vocabulaire (*Three-Point Approach Vocabulary Strategy)* : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisée avec l'autorisation de l'éditeur.

Méthodes en trois points – Stratégie du vocabulaire

Annexe C-6

Terme/Concept :	**Formule/Équation :**
Différence des cosinus	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
Caractéristiques : • utilisée pour des angles non précisés • α et β sont deux angles qui correspondent à une différence par rapport à l'angle inconnu	**Exemple :** $\cos\frac{\pi}{12} \to \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ $= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Terme/Concept :	**Formule/Équation :**
Somme des cosinus	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
Caractéristiques : • utilisée pour des angles non précisés	**Exemple :** $\cos\frac{29\pi}{12} \to \cos\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ $= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{-\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Terme/Concept :	**Formule/Équation :**
Différence des sinus	$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
Caractéristiques : • utilisée pour des angles précis	**Exemple :** $\sin\frac{5\pi}{12} \to \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ $= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{-\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Terme/Concept :	**Formule/Équation:**
Somme des sinus	$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
Caractéristiques : • utilisée pour des angles non précisés	**Exemple:** $\sin\frac{17\pi}{12} \to \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ $= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Méthode en trois points – Stratégie du vocabulaire (*Three-Point Approach Vocabulary Strategy*) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisée avec l'autorisation de l'éditeur.

Inscription au journal

Annexe C-7

Inscription au journal nº 5

$(\cos \theta + \tan \theta \sin \theta) \cot \theta$

1. $\left(\cos \theta + \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta\right)\dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$

2. $\left(\cos \theta + \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\right)\dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$

3. $\dfrac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \dfrac{\overset{\sin \theta}{\cancel{\sin^2 \theta}}\ \cancel{\cos \theta}}{\cancel{\cos \theta}\ \cancel{\sin \theta}}$

4. $\dfrac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \dfrac{\sin \theta}{1}$

5. $\dfrac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \dfrac{\sin^2 \theta}{\sin \theta}$

6. $\dfrac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta}$

7. $= \dfrac{1}{\sin \theta}$

8. $= \csc \theta$

1. À la première étape, j'ai ramené les termes $\tan \theta$ et $\cot \theta$ à leur simple expression.
   $\left(\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ and } \cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$
2. Ensuite, j'ai effectué la multiplication à l'intérieur des parenthèses.
   $\left(\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \dfrac{\sin \theta}{1} = \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\right)$
3. J'ai ensuite multiplié le terme à l'extérieur des parenthèses par les deux termes se trouvant à l'intérieur. J'ai ensuite effectué l'élimination nécessaire dans le terme $\dfrac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta}$.
4. Après l'élimination, il restait le terme en (4).
   $\dfrac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \dfrac{\sin \theta}{1}$
5. J'ai ensuite trouvé un dénominateur commun pour effectuer l'addition.
6. Après avoir effectué cette addition, il restait le terme illustré en (6).
7. Ayant reconnu que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ était une identité de Pythagore équivalant à 1, j'ai simplifié l'expression pour obtenir $\dfrac{1}{\sin \theta}$.
8. J'ai aussi reconnu que $\dfrac{1}{\sin \theta}$ était l'inverse de $\csc \theta$; c'est ma réponse finale.