Unité H
Fonctions

FONCTIONS

Dans la présente unité, on s'attend à ce que les élèves effectuent des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions. L'accent est mis sur la compréhension du concept.

Les sujets comprennent :

· élaboration de fonctions à l'aide des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions;
· compositions de fonctions;
· fonctions réciproques;
· correspondance un à un;
· algorithmes de division;
· théorèmes du reste et des facteurs;
· division synthétique;
· détermination des zéros de fonctions polynomiales;
· caractéristiques de fonctions polynomiales et leurs représentations graphiques;
· fonctions rationnelles et leurs représentations graphiques.

Pratiques pédagogiques

Pour aider les élèves dans leur apprentissage, les enseignants devraient examiner les pratiques pédagogiques suivantes. Les enseignants devraient donner aux élèves des occasions :

· de représenter des situations précises à l'aide de représentations graphiques;
· de rechercher des compositions de fonctions;
· d'utiliser la technologie pour examiner les fonctions réciproques;
· de vérifier si les deux fonctions sont des réciproques;
· de déterminer si une fonction est une règle de correspondance un à un;
· de trouver les zéros de fonctions polynomiales graphiquement et algébriquement;
· de rechercher les caractéristiques de fonctions polynomiales à l'aide de la technologie;
· de rechercher les représentations graphiques et les caractéristiques d'une fonction rationnelle.

Matériel

· papier quadrillé
· calculatrices à affichage graphique ou logiciels informatiques

Durée

· 12 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Examiner la nature de relations, l'accent étant mis sur les fonctions

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

H-1 effectuer des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions

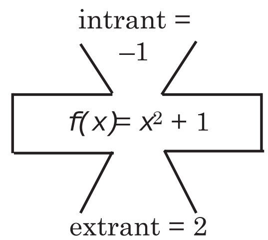
Communications
✔ Connections
✔ Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

Des expériences d'apprentissage différencié sont fournies à la fin de la présente unité (voir Annexes H-1 à H-6, pp. H-78 à H-83.)

· **définir une fonction**

Une ***relation*** entre deux variables, *x* et *y*, est un ensemble de paires ordonnées. Les valeurs de *x* sont les intrants ou le domaine et les valeurs de *y* sont les extrants ou l'image. Une **fonction** est une relation qui associe à toute valeur *x* du domaine une et une seule valeur *y*. On peut concevoir une fonction comme une machine dans laquelle on met une valeur (domaine) et la machine la transforme en un extrant (l'image)



On utilise souvent la lettre *f* pour nommer les fonctions. On peut également utiliser d'autres lettres, p. ex., $t(x)$, $s(x)$, $h(x)$, $g(x)$.

· **effectuer des opérations sur des fonctions**

Dans l'analyse des fonctions, il est utile de décomposer une fonction donnée en une combinaison de fonctions plus simples en se servant des diverses opérations.

Pour les exemples ci-dessous, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ et $g(x) = \sqrt{2x+3}$.

Opération	**Fonction qui en résulte**
Addition	Somme de deux fonctions
$(f + g)(x)$	$f(x) + g(x)$
e.g., $\dfrac{1}{x - 1} + \sqrt{2x+3}$	$\dfrac{1}{x - 1} + \sqrt{2x+3}$

- suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

1. Dans laquelle des relations suivantes y est une fonction de x?

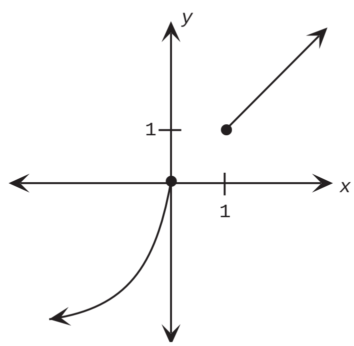
   a) $x^2 - y = 2$

   b) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

   c) $x^2 - y^2 = 2$

   d) $x - y^2 = 2$

2. Indiquez l'image de la fonction ci-dessous.



   a) $\{y \mid y \in \Re\}$
   b) $\{y \mid y \geq 1\}$
   c) $\{y \mid y \leq 0 \text{ ou } \geq 1\}$
   d) $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$

3. Parmi ce qui suit, lesquelles sont des fonctions de x?

   1. $y = \frac{2}{x - 6}$
   2. $y = 3x^2 - 7x + 1$
   3. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$
   4. $y^2 = 8x$

   a) 3, 4

   b) 1, 4

   c) 1, 2

   d) 2, 3

4. Parmi les relations suivantes, laquelle n'est pas une fonction de x?

   a) $y = x^2$
   b) $y^2 = x$
   c) $y = x^3$
   d) $y^3 = x$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Imprimé

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Exercices cumulatifs

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Solutions des exercices cumulatifs

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours d'enseignement à distance – Module 8, leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 effectuer des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **effectuer des opérations sur des fonctions** (suite)

Opération — **Fonction qui en résulte**

Soustraction — Différence de deux fonctions

$(f - g)(x)$ — $f(x) - g(x)$

p. ex., $\frac{1}{x-1} - \sqrt{2x+3}$ — $\frac{1}{x-1} - \sqrt{2x+3}$

Multiplication — Produit de deux fonctions

$(f \cdot g)(x)$ — $f(x) \cdot g(x)$

p. ex., $\frac{\sqrt{2x+3}}{x-2}$ — $\frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{2x+3}$

Division — Quotient de deux fonctions

$(f \div g)(x)$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$

p. ex., $\frac{1}{(x-1)\sqrt{2x+3}}$ — $\frac{\frac{1}{x-1}}{\sqrt{2x+3}}$

Les domaines des fonctions combinées algébriquement sont limitées à l'intersection des domaines de f(x) à celui de g(x). Le domaine de la fonction, qui résulte de une ou de plusieurs des quatre opérations est, de plus, limité de façon à exclure les valeurs qui donnent pour résultat un dénominateur de zéro.

Remarque : Le domaine de $f(x) = \{x \mid x \neq 1\}$ et le domaine de $g(x) = \left\{x \middle| x > -\frac{3}{2}\right\}$

Le domaine de $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, et $(f \cdot g)(x)$ est

$$\{x \mid x \neq 1\} \cap \left\{x \middle| x \geq -\frac{3}{2}\right\} = \left\{x \middle| x \geq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 1\right\}$$

Le domaine de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ est $\left\{x \middle| x > -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 1\right\}$

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
Visualisation

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Calcul mental

1. Si $f(x) = x^2 - 5$, trouvez $f(2)$.
2. Si $f(x) = x^2 - 1$, trouvez $f(f(1))$.

Problèmes

1. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, trouvez $f(1{,}25)$. Arrondissez votre réponse à deux décimales.
2. La valeur d'un cube dont les côtés sont de longueur x est donnée par la fonction $f(x) = x^3$. Trouvez $f(5)$. Expliquez ce que représente $f(5)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 effectuer des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions – *suite*

Communications
✔ **Connections**
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **effectuer des opérations sur des fonctions** (suite)

Exemple

Si $f(x) = x^2 - 5x + 2$ et $g(x) = -3x + 4$, trouvez

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

d) $(f \div g)(x)$

e) $(f \cdot g)(2)$

Solution

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$= (x^2 - 5x + 2) + (-3x + 4) = x^2 - 8x + 6$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$= (x^2 - 5x + 2) - (-3x + 4) = x^2 - 2x - 2$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$= (x^2 - 5x + 2)(-3x + 4)$
$= -3x^3 + 4x^2 + 15x^2 - 20x - 6x + 8$
$= -3x^3 + 19x^2 - 26x + 8$

d) $(f \div g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \dfrac{x^2 - 5x + 2}{-3x + 4} \qquad x \neq \dfrac{4}{3}$

e) $(f \cdot g)(2) = -3(2)^3 + 19(2)^2 - 26(2) + 8$
$= -24 + 76 - 52 + 8$
$= 8$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Calcul mental

Soit les fonctions f et g de sorte que $f = \{(2, 6)\ (3, 7)\ (4, 7)\}$ et $g = \{(6, 10)\ (7, 12)\}$, trouvez les valeurs de

a) $f(2) =$

b) $f(3) =$

c) $g(6) =$

d) $g(7) =$

e) $f(2) + g(7) =$

f) $f(3) - g(6) =$

g) $f(4) \cdot g(7) =$

h) $\dfrac{f(2)}{g(7)} =$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 effectuer des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions – *suite*

Communications
✔ Connections
✔ Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **effectuer des compositions de fonctions**

Une autre façon de combiner deux fonctions est de former la composition de l'une avec l'autre. La composition des fonctions, f et g, $(f \circ g)(x)$ se définit comme $f(g(x))$. L'image de g doit être dans le domaine de f.

Exemple

Si $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x + 2$, trouvez $f(g(x))$.

Solution

Vous pouvez voir les valeurs numériques de la composition en utilisant le tableau suivant.

x = intrant dans g	*g(x) = x + 2*	*g(x) = intrant dans f*	*f(x) = x - 1*	*f(g(x))*
−2	→	0	→	−1
−1	→	1	→	0
0	→	2	→	1
1	→	3	→	2
2	→	4	→	3

Lorsque l'on trouve la composition de $f(g(x))$, les valeurs de l'image de g seront toujours les valeurs du domaine de f ou vice versa pour $g(f(x))$.

Algébriquement :

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x + 2)$ Substituez la formule à $g(x)$.
$= (x + 2) - 1$ Appliquez la formule pour $f(x)$.
$= x + 1$ Simplifiez.

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, trouvez $(g \circ f)(x)$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(x - 1)$ Substituez la formule à $f(x)$.
$= (x - 1) + 2$ Appliquez la formule pour $g(x)$.
$= x + 1$ Simplifiez.

Remarque : $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ ne sont pas toujours égaux.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Problèmes

1. Trouvez $g(f(x))$ et $f(g(x))$ pour
   $f(x) = 3x + 2$
   $g(x) = 2x - 1$

   Est-ce que $f(g(x)) = g(f(x))$?

2. Si $f(x) = 7x^2 + x$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, trouvez $f(g(-1))$.

3. a) Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$, trouvez la valeur de $\frac{3f(1)}{2g(-1)}$.

   b) Si $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 2}$, trouvez $f(2)$.

   c) Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$, pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce que $f(g(x)) = g(f(x))$?

4. Une balle lancée en l'air a une vélocité donnée par $v(t) = 49 - 9{,}8t$. La fonction d'énergie cinétique est donnée par $K(v) = 0{,}4v^2$. Exprimez l'énergie cinétique de la balle comme fonction de temps $K(t)$.

5. Si $f(x) = 3x + \frac{x}{3} + 5$, trouvez la valeur de k pour laquelle

   $f(k) = 2f(k + 1)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 effectuer des opérations sur des fonctions et des compositions de fonctions – *suite*

Communications
✔ Connections
✔ Estimation et Calcul Mental
✔ Résolution
Raisonnement
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **effectuer des compositions de fonctions** (suite)

Exemple 1

Si $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = x^2$, trouvez

a) $f(g(x))$

b) $f(f(x))$

c) $g(f(x))$

d) $f(x) \div g(x)$

e) $\frac{1}{f(x)}$

Solution

a) $f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 + 2 = 3x^2 + 2$

b) $f(f(x)) = f(3x + 2) = 3(3x + 2) + 2 = 9x^2 + 8$

c) $g(f(x)) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

d) $f(x) \div g(x) = \frac{3x + 2}{x^2}$, $x \neq 0$

e) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x + 2}$, $x \neq \frac{-2}{3}$

Exemple 2

Comparaison de ventes

Le prix d'une nouvelle voiture est annoncé à 35 000 $. Le concessionnaire annonce un rabais du fabricant de 1 200 $ et un escompte de 12 %. Comparez le prix de vente obtenu de deux façons :
1) en soustrayant d’abord le rabais puis en prenant l’escompte;
2) en prenant l’escompte d’abord puis en soustrayant le rabais.

Solution

En utilisant la notation fonctionnelle, où x est le prix de la voiture, $f(x)$ est le prix après le rabais et $g(x)$ est le prix après l'escompte, les fonctions peuvent être représentées par

$f(x) = x - 1200$

$g(x) = 0,88x$

Option 1 - Rabais d'abord

$g(f35000) = g(35000 - 1200)$
$= g(33800)$
$= 0,88(33800)$
$= 29744$

Option 2 - Escompte d'abord

$f(g35000) = f(0,88 \times 35000)$
$= f(30800)$
$= 30800 - 1200$
$= 29600$

L'option 2 est meilleure pour l'acheteur.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Problèmes

1. a) Soit $h(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = 2x$, déterminez chacune des expressions suivantes:

   i) $\dfrac{g(h(6))}{h(g(9))}$ iii) $h(g(x))$

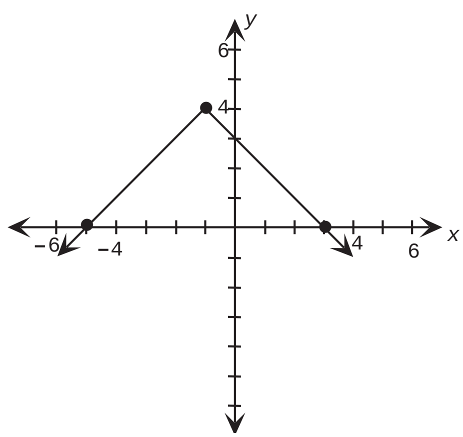
   ii) $\dfrac{g(g(5))}{h(g(5))}$ iv) $g(h(x))$

   b) Trouvez le domaine et l'image de $h(g(x))$.
   c) Trouvez le domaine et l'image de $g(h(x))$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ et $k(x) = x + 1$, écrivez :

   a) une équation définissant la composition de f avec k. Précisez le domaine et l'image.
   b) une équation définissant la composition de k avec f. Précisez le domaine et l'image.

3. Soit la fonction $H(x)$ définie par la représentation graphique ci-dessous, trouvez la valeur de $H(H(-5))$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 déterminer la réciproque d'une fonction

Communications | ✔ Connections | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ Raisonnement | Technologie | ✔ Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir et vérifier une relation réciproque**

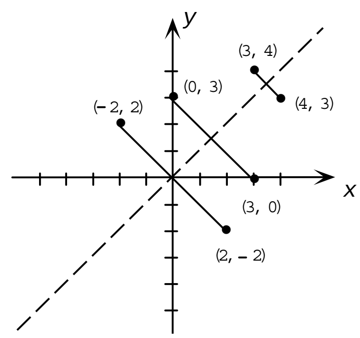
La réciproque d'une relation est l'ensemble de paires ordonnées obtenu en interchangeant les coordonnées de chaque paire ordonnée dans la relation. La représentation graphique de la réciproque est la ***réflexion*** de la représentation graphique de la relation par rapport à la droite $y = x$.

Certaines calculatrices graphiques ont une fonction DRAW qui dessinera la représentation graphique de la réciproque d'une fonction.

Exemple

Relation originale : $\{(-2, 2)\ (0, 3)\ (4, 3)\}$

Relation réciproque : $\{(2, -2)\ (3, 0)\ (3, 4)\}$



Étant donné qu'une fonction est une relation spéciale, si l'inverse d'une fonction $f(x)$ est également une fonction, on l'appelle une ***fonction réciproque*** de $f(x)$ et on l'écrit $f^{-1}(x)$.

Exemple 1

Trouvez la réciproque de $f(x) = 2x - 1$.

Solution

$y = 2x - 1$ Remplacez $f(x)$ par y.

$x = 2y - 1$ Interchangez x et y.

$x + 1 = 2y$

$\frac{x+1}{2} = y$ Isolez y.

$\frac{x+1}{2} = f^{-1}(x)$ Remplacez y par $f^{-1}(x)$.

– suite

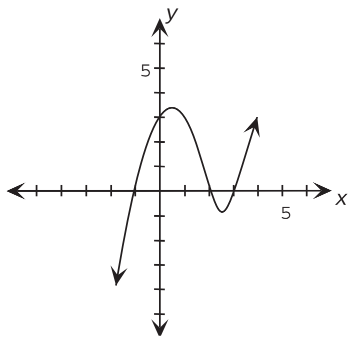
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Si un point (m, n) est sur la représentation graphique d'une relation, quel est le point correspondant sur la réciproque de la relation?

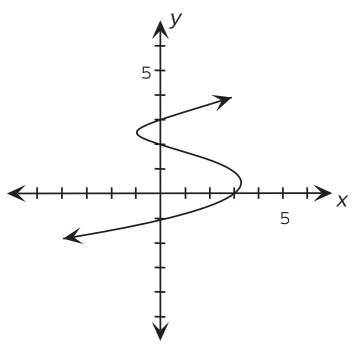
Choix multiples

Soit : représentation graphique de $y = f(x)$:

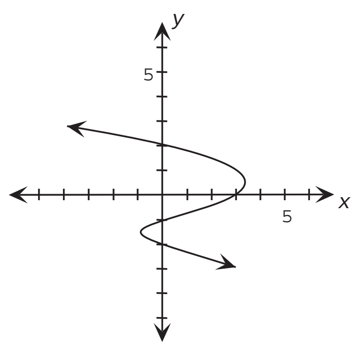


Une esquisse de la réciproque de $f(x)$ est

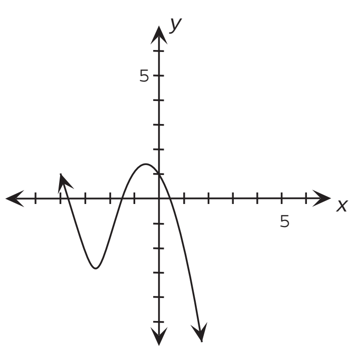
a)



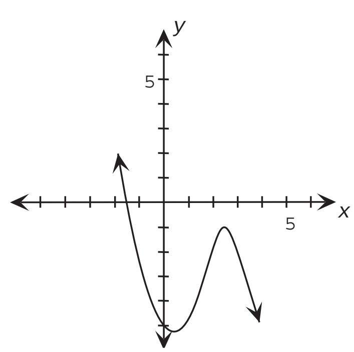
b)



c)



d)



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Imprimé

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours d'enseignement à distance – Module 8, Leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 déterminer la réciproque d'une fonction
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir et vérifier une fonction réciproque** (suite)

Exemple 1 *- suite*

Les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont reliées l'une à l'autre de cette façon. Si le point (a, b) repose sur la représentation graphique f, alors le point (b, a) repose sur la représentation graphique de f^{-1} et vice versa. Cela signifie que la représentation graphique de f est une réflexion de la représentation graphique de f^{-1} par rapport à la droite $y = x$.

Le domaine de f doit être égal à l'image de f^{-1} et vice versa.

Étant donné que $f(2) = 3$, alors $f^{-1}(3) = 2$, ce qui est la valeur originale de x, tel qu'il est indiqué ci-dessous.

$f(x) = 2x - 1$ $\qquad\qquad$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

Si $x = 2$

$f(2) = 2 \cdot 2 - 1$ $\qquad\qquad$ $f(3) = \dfrac{3+1}{2}$

$= 3$ $\qquad\qquad$ $= 2$

La valeur originale revient-elle dans tous les cas? On peut le vérifier en utilisant la composition de fonctions.

$$f(g(x)) = \quad = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \quad = x + 1 - 1 \quad = x$$

$$g(f(x)) = \quad g(2x-1) = \frac{2x-1+1}{2} \quad = \frac{2x}{2}$$

Remarque : La fonction $f(x)$ et la fonction $g(x)$ sont des réciproques l'une de l'autre si et seulement si $f(g(x)) = x$ et $g(f(x)) = x$.

Parce que les deux propositions produisent x, vous pouvez conclure que $f(x)$ et $g(x)$ sont des réciproques.

Lorsque vous avez affaire à des réciproques, une fonction « défait » ce que l'autre fait.

Communications	Résolution
✔ **Connections**	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

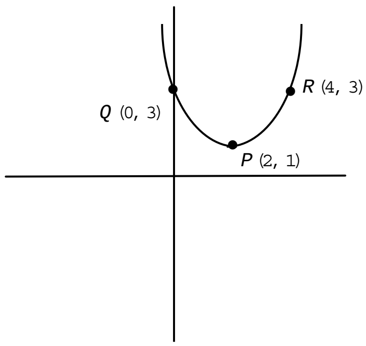
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Problème

a) Esquissez la réciproque de ce qui suit. Trouvez son domaine et son image.



b) Est-ce que la réciproque est aussi une fonction?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

H-2 déterminer la réciproque d'une fonction
– suite

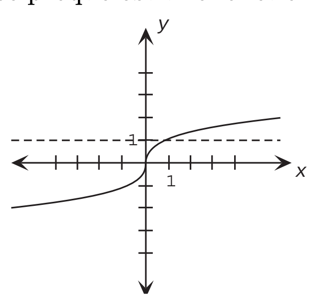
· **définir et vérifier une fonction réciproque** (suite)

Si $f(x) = 3x$, sa réciproque est $g(x) = \frac{1}{3}x$.

Si $f(x) = x - 1$, sa réciproque est $g(x) = x + 1$.

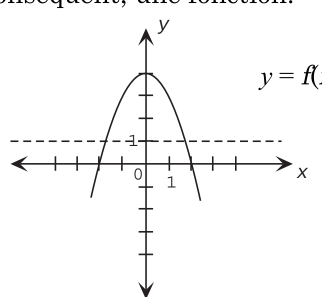
Une fonction n'a pas besoin d'avoir une réciproque. La fonction $f(x) = x^2$ n'a pas de réciproque si son domaine est $]-\infty, \infty[$. Pour avoir une réciproque, la fonction doit être ***un à un***. Cela signifie que non seulement chaque valeur de *x* correspond à exactement une valeur de *y*, mais aussi que chaque valeur de *y* correspond à exactement une valeur de *x*. On peut déterminer si une fonction est un à un en appliquant le test de la ***droite horizontale*** à sa représentation graphique.

Si la représentation graphique de la fonction $y = f(x)$ est telle qu'aucune droite horizontale ne croise la représentation graphique en plus d'un point, alors *f* est un à un et sa réciproque est une fonction.



---- test de la droite horizontale

La fonction *f* est un à un. Sa relation réciproque est, par conséquent, une fonction.



$y = f(x) = 4 - x^2$

La fonction *f* n'est pas un à un. Sa relation réciproque n'est pas une fonction.

Recherche

Si $f(x)$ ne passe pas le test de la droite horizontale, est-ce que sa relation réciproque échouera au test de la droite verticale et ne sera pas une fonction? Observez une droite horizontale lorsqu'elle est réfléchie par rapport à la droite $y = x$.

– suite

Communications	Résolution
✔ **Connections**	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

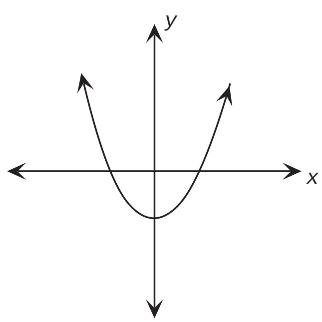
Problèmes

1. Si $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = \frac{x+1}{2}$, trouvez $f(g(x))$ et $g(f(x))$, et démontrez que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont des réciproques l'une de l'autre.
2. Est-ce que la réciproque de $f(x) = 2x - 5$ est une fonction? Justifiez votre réponse.
3. Au Manitoba, la taxe de vente est de 7 %. Le coût total C d'un article taxable dont le prix est (p) est $C = 0{,}07p + p$. Reformulez de sorte que C est l'intrant et p est l'extrant.
4. Si $f(x) = 3x - 5$, trouvez les coordonnées du point d'intersection des représentations graphiques de $f(x)$ et $f^{-1}(x)$.

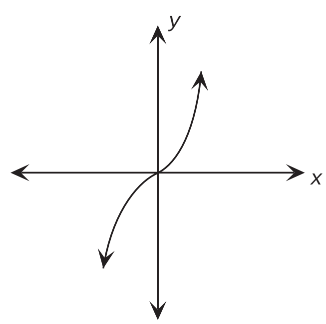
Choix multiples

Laquelle des fonctions suivantes est une fonction un à un?

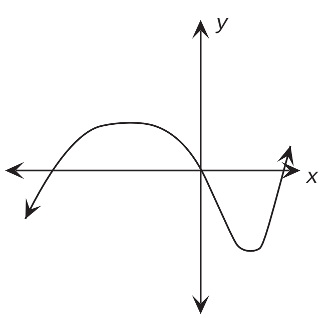
a)



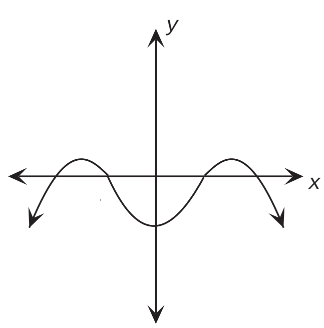
b)



c)



d)



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 déterminer la réciproque d'une fonction
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir et vérifier une fonction réciproque** (suite)

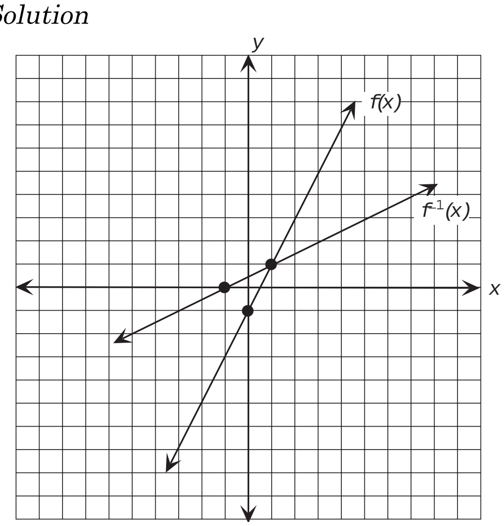
Pour des fonctions simples, trouvez la réciproque par inspection. Par exemple, si $f(x) = x - 4$ alors $f^{-1}(x) = x + 4$. Cependant, pour des fonctions plus compliquées, il vaut mieux utiliser la procédure suivante pour trouver la réciproque de la fonction.

1. Vérifiez pour vous assurer que f est un à un.
2. Écrivez la fonction sous la forme $y = f(x)$ et interchangez les valeurs de x et de y.
3. Trouvez y en termes de x, puis remplacez y par $f^{-1}(x)$.
4. Vérifiez si le domaine de f est l'image de f^{-1} et si le domaine de f^{-1} est l'image de f.

Exemple 2

Trouvez et reproduisez graphiquement la réciproque (le cas échéant) de $f(x) = 2x - 1$.

Solution



À partir de la représentation graphique, vous pouvez constater qu'il s'agit d'une fonction un à un parce qu'elle passe le test de la droite horizontale.

$y = 2x - 1$ Remplacez $f(x)$ par y.

$x = 2y - 1$ Interchangez les valeurs de x et de y.

$x + 1 = 2y$ Isolez y.

$y = \dfrac{x+1}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ Remplacez y par $f^{-1}(x)$.

– *suite*

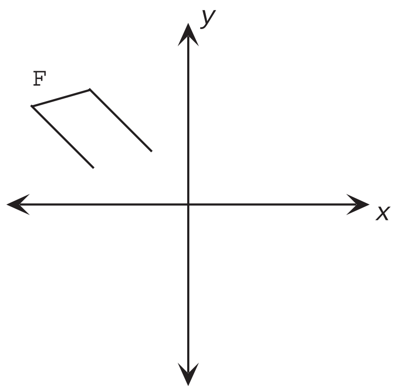
Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Problèmes

1. Soit la représentation graphique de la relation F ci-dessous, esquissez la représentation graphique qui représente le mieux sa relation réciproque.



2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{3x}{x+6}$, trouvez $f^{-1}(x)$.

3. Soit $f(x) = x + 5$, trouvez la valeur de $f^{-1}(3)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 déterminer la réciproque d'une fonction
– *suite*

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir et vérifier une fonction réciproque** (suite)

Vous pouvez vérifier pour voir si elles sont des réciproques en utilisant la composition de fonctions.

Si $f(f^{-1}(x)) = x$ et $f^{-1}(f(x)) = x$, alors elles sont des réciproques.

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2(x+1)}{2} - 1 = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ est la réciproque de $f(x) = 2x - 1$.

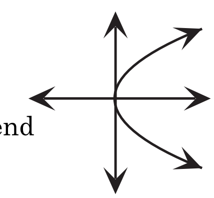
Le domaine et l'image des deux f et f^{-1} sont les nombres réels.

Exemple 3

Esquissez la réciproque de $f(x) = x^2$. Est-ce que la réciproque est une fonction? Pourquoi ou pourquoi pas?

Solution

La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas un à un (et par conséquent sa réciproque n'est pas une fonction) parce que $a^2 = b^2$ ne sous-entend pas que $a = b$. Par exemple, $(-1)^2 = 1^2$, mais $-1 \neq 1$.



Résultat d'apprentissage général

Représenter et analyser des situations qui font intervenir des expressions, des équations et des inégalités.

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes

Communications
Connections
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

· **déterminer des facteurs de polynômes**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Imprimé

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours d'enseignement à distance – Module 8, Leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **déterminer des facteurs de polynômes** (suite)

Les deux algorithmes pour la division polynomiale sont la division longue et la division synthétique. Vous examinerez d'abord la division longue, puis vous la mettrez en rapport avec la division synthétique.

Division longue

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad {}^{x^3}\!/_{x} \quad {}^{2x^2}\!/_{x} \quad {}^{x}\!/_{x} \\
 & \quad\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\
 & \quad x^2 \ + \ 2x \ + 1 \longleftarrow \text{quotient} \\
\text{diviseur} \longrightarrow x+2 & \overline{\big)\, x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \longleftarrow \text{dividende} \\
 & \underline{x^3 + 2x^2} \\
 & \qquad 2x^2 + 5x + 2 \\
 & \qquad \underline{2x^2 + 4x} \\
 & \qquad\qquad\quad x + 2 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{x + 2}
\end{array}
$$

Étapes pour diviser un polynôme par un binôme :

1. Écrivez le dividende et le polynôme diviseur en puissances décroissantes de la variable littérale.

   Exemple : Changez $4x^2 + 5x + x^3 + 2$ à $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

2. Divisez le terme principal du diviseur de façon à obtenir le premier terme du quotient.

   Exemple :

   $$\begin{array}{rl} & x^2 \\ x+2 & \overline{\big)\, x^3 + \cdots} \end{array} \quad \text{étant donnée que} \quad \frac{x^3}{x} = x^2$$

3. Multipliez le diviseur par ce nouveau terme du quotient en utilisant la loi distributive et soustrayez le résultat du dividende.

   Exemple :

   $$\begin{array}{rl} & x^2 \\ x+2 & \overline{\big)\, x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \\ & \underline{x^3 + 2x^2 \qquad\qquad} \\ & \qquad 2x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

   Le produit de x^2 et $x + 2$

   Le reste à la soustraction $x^3 + 2x^2$ de $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

– *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Connections Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **déterminer des facteurs de polynômes** (suite)

Division longue - suite

4. Traitez ce reste, obtenu à l'étape 3, avec le reste du dividende comme le nouveau dividende et répétez les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que le reste soit un degré inférieur au diviseur.

   On démontre ces étapes en répétant notre dernière question.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \\ \hline
x+2 & x^3+4x^2+5x+2 \\
 & \underline{x^3+2x^2} \\
 & \quad\ 2x^2+5x+2 \qquad \text{Nouveau dividende}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\ \hline
x+2 & x^3+4x^2+5x+2 \\
 & \underline{x^3+2x^2} \\
 & \quad\ 2x^2+5x+2 \\
 & \quad\ \underline{2x^2+4x} \\
 & \qquad\qquad x+2 \qquad \text{Nouveau dividende} \\
 & \qquad\qquad \underline{x+2} \\
 & \qquad\qquad\quad 0 \qquad \text{Degré } 0 < \text{Degré } 1 \text{ (de } x+2)
\end{array}$$

Exemple 1

Divisez $2x^2 - 4x - 3$ par $x - 3$.

Solution

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+2 \\ \hline
x-3 & 2x^2-4x-3 \\
 & \underline{2x^2-6x} \\
 & \qquad 2x-6 \\
 & \qquad \underline{2x-6} \\
 & \qquad\quad 3 \qquad \text{Degré } 0 < \text{Degré } 1\text{, 3 est votre reste.}
\end{array}$$

Pour vérifier votre réponse, montrez que $(x - 3)(2x + 2) + 3$ (Diviseur · Quotient + reste) est égal à $2x^2 - 4x - 3$ (Dividende).

– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Connections | Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes – *suite*

Communications
Connections
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **déterminer des facteurs de polynômes** (suite)

L'***algorithme de division*** énonce :

Si $f(x)$ et $d(x)$ sont des polynômes de sorte que le degré de $d(x)$ est inférieur ou égal au degré de $f(x)$, alors il existe des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ de sorte que

$f(x)$	$= d(x)q(x)$	$+ r(x)$
dividende	= (diviseur)(quotient) + reste	

où $r(x) = 0$ ou le degré de $r(x)$ est inférieur au degré de $d(x)$.

Si le reste $r(x) = 0$, alors $d(x)$ est un diviseur de $f(x)$.

Lorsque le diviseur est de la forme $x = \pm a$, on peut utiliser la ***division synthétique*** comme un raccourci à la division longue à l'aide de polynômes.

Lorsque l'on effectue la division synthétique, les termes du dividende doivent être disposés en ordre descendant de puissances et tous les termes manquants remplacés par un 0. Vous utiliserez uniquement les coefficients des termes pour effectuer la division. Le diviseur doit être de la forme $x \pm a$. Si $x - a$ est le diviseur, a est positif. Si $x + a$ est le diviseur, traitez-le comme $x - (-a)$ et utilisez a comme une valeur négative.

Exemple 1

Divisez $6x^3 + 16x - 19x^2 - 4$ par $x - 2$.

Solution

diviseur → 2	6	−19	16	−4	← coefficients de dividende
		12	−14	4	
	6	−7 $\quad 2 \times (-7)$	2 $\quad 2 \times 2$	0	
	coefficients des quotients			reste	

Quotient : $6x^2 - 7x + 20$ et le reste est zéro.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Divisez à l'aide de la division longue et écrivez sous la forme donnée par l'algorithme de division.

$2x^2 + x^3 - 3x - 4 \div x + 2$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes – *suite*

Communications
Connections
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **déterminer des facteurs de polynômes** (suite)

Exemple 1 - suite

Explication

Ramenez le 6, multipliez (2) × 6, placez 12 sous le -19.
Additionnez –19 + 12 = –7, multipliez 2 × (–7), et placez -14 sous 16.
Additionnez 16 + (–14) = 2.
Multipliez 2 × 2 et placez le 4 sous le –4.
Additionnez.
$\therefore\ 6x^2 - 19x + 16x - 4 = (x - 2)(6x^2 - 7x + 20)$

Les principales étapes de la **division synthétique** sont les suivantes :

1. Disposez les coefficients de $f(x)$ en ordre de puissances décroissantes de x (écrivez 0 comme le coefficient pour chaque puissance manquante).
2. Après avoir écrit le diviseur sous la forme x - a, utilisez a pour produire la deuxième et la troisième rangée de nombres comme suit. Ramenez le premier coefficient du dividende et multipliez-le par a : alors, additionnez le produit du deuxième coefficient du dividende. Multipliez cette somme par a, et additionnez le produit au troisième coefficient du dividende. Répétez le processus jusqu'à ce qu'un produit soit additionné au terme constant de $f(x)$.
3. Le dernier nombre de la troisième rangée de nombres est le reste. Les autres nombres de la troisième rangée sont les coefficients du quotient, qui est du degré 1 inférieur à $f(x)$.

Exemple 2

Utilisez la division synthétique pour diviser $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$ par $x + 3$.

Solution

Diviseur : $x + 3 = x - (-3)$.

$$\begin{array}{r|rrrrrl} \text{diviseur} \rightarrow\ 3 & 1 & 0 & -10 & -2 & 4 & \leftarrow \text{coefficients de dividende et coefficients de termes manquants} \\ & & -3 & 9 & 3 & -3 & \\ \hline & \underbrace{3 \quad -3 \quad -1 \quad 1}_{\text{coefficients des quotients}} & & & & \underbrace{1}_{\text{reste}} & \end{array}$$

$$(x^4 - 10x^2 - 2x + 4) \div (x + 3) = x^3 - 3x^2 - 1x + 1 + \frac{1}{x + 3}$$

ou

$$x^4 - 10x^2 - 2x + 4 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 - 1x + 1) + 1$$

Le reste obtenu dans la division synthétique a un lien intéressant avec les fonctions polynomiales.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Expliquez comment vous savez que $x-1$ est un facteur de $x^{15}-1$ sans effectivement faire la division.
2. Le polynôme $P(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + 11$ a un reste de -7 lorsqu'il est divisé par $(x + 2)$ et un reste de 14 lorsqu'il est divisé par $(x - 1)$. Trouvez les valeurs de b et de c.
3. Les zéros d'une fonction polynomiale sont 1, 2 et 3. Trouvez un polynôme avec cette propriété.
4. Quel est le reste lorsque $x^{10} - 15x + 18$ est divisé par $x - 1$?<
5. Les abscisses à l'origine de la représentation graphique d'une fonction polynomiale sont $3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Trouvez une fonction polynomiale ayant cette propriété.
6. $2x^2 + 3x^2 - 18x + 8$ est divisible par $x - 2$. Trouvez un autre binôme qui divise le polynôme.
7. Soit la fonction $f(x) = x^3 + kx^2 - 5x - 7$. Si -2 est un zéro, trouve la valeur de k.
8. Utilisez la division synthétique pour trouver le quotient et le reste : $x^3 - 7x + 6 \div x - 2$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utilisez le théorème du reste pour obtenir la valeur du reste**

> ***Théorème du reste***
> Si $P(x)$ est un polynôme, alors $P(a)$ est égal au reste lorsque $P(x)$ est divisé par $x - a$.

Exemple 1

Évaluez $f(-3)$ si $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2x + 4$.

Solution

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 10(-3)^2 - 2(-3) + 4 \\ &= 81 - 90 + 6 + 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Remarquez $f(-3) = 1$, ce qui représente le reste de l'exemple ci-dessus.

> Si un polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, alors le reste est $r = f(a)$.
>
> À partir de l'algorithme de division, $f(x) = (x - a)\ q(x) + r$, où r est le reste. Si $f(a) = (a - a)\ g(x) + r$ alors $f(a) = r$ représente le reste.

Exemple 2

Trouvez le reste lorsque $(x^4 - 2x^3 + 5x + 2) \div (x + 1)$.

Solution

En utilisant le théorème du reste, $f(a) = r$.

$x + 1$ est reformulé comme $x - (-1)$ pour déterminer que $a = -1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 + 5x + 2 \\ f(-1) &= (-1)^4 - 2(-1) + 5(-1) + 2 \\ &= 1 + 2 - 5 + 2 \\ f(-1) &= 0 \end{aligned}$$

> Lorsque le reste est 0, quelle relation doit exister entre le diviseur et le dividende?
>
> Cela signifie que le polynôme est divisible par le diviseur. Si on va une étape plus loin, cela signifie que $x + 1$ doit être un facteur de $f(x)$. On peut développer cette assertion en examinant le théorème des facteurs.

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

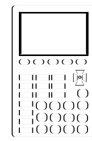
Si $x + 2$ est un facteur de la fonction polynomiale $P(x)$, alors

a) $P(-2) = 0$
b) $P(2) = 0$
c) $P(0) = 2$
d) $P(0) = -2$

Problème

Si $x^{10} - 15x + 18$ est divisé par $x - 1$, quel est le reste?

NOTES



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes
– *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Connections Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental** ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **trouver les facteurs d'un polynôme en utilisant le théorème des facteurs**

Théorème des facteurs

Un polynôme $P(x)$ a un facteur $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$

Preuve :

À l'aide de l'algorithme de division avec le facteur x - a, vous avez $f(x) = (x - a)\ q(x) + f(a)$.

En vertu du théorème du reste, $f(a) = r$, alors $f(x) = (x - a)\ q(x) + f(a)$.

Étant donné que $f(a) = 0$, alors $f(x) = (x - a)\ q(x)$, ce qui démontre que $x - a$ est un facteur de $f(x)$.

À l'inverse, si $x - a$ est un facteur de $f(x)$, alors $f(x)$ divisé par $x - a$ donne un reste de 0.

Exemple 1

a) Déterminez si $x + 2$ est un facteur de $f(x) = x^3 - 6x - 4$.

b) Déterminez les autres facteurs de $f(x)$.

Solution

a) $x + 2$ sera un facteur si $f(-2) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= x^3 - 6x - 4 \\ f(-2) &= (-2)^3 - 6(-2) - 4 \\ &= -8 + 12 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Étant donné que le reste est 0, $x + 2$ doit être un facteur.

b) Faites la division synthétique pour trouver le quotient qui sera un facteur.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ & & -2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

Le quotient est $x^2 - 2x - 2$.

$\therefore f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 2)$.

En utilisant le dicriminant

$x^2 - 2x - 2 = (x - 1 - \sqrt{3}\,)(x - 1 + \sqrt{3}\,)$ d'où

$f(x) = (x + 2)(x - 1 - \sqrt{3}\,)(x - 1 + \sqrt{3}\,)$

Les facteurs sont :

$x + 2$, $x - 1 - \sqrt{3}$ et $x - 1 + \sqrt{3}$.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Un facteur de la fonction polynomiale $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est

a) $x - 6$
b) $x - 1$
c) $x + 2$
d) $x + 3$

Problèmes

1. Quelle est la valeur de k si $(x - 3)$ est un facteur de $f(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 4k$? Arrondissez votre réponse à deux décimales.

2. Démontrez si $(x + 1)$ est ou non un facteur de $P(x) = 3x^{19} + 2x^{10} + 1$.

3. Vérifiez si $x + 2$ est un facteur ou non de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8$.

4. Décomposez complètement en facteurs : $f(x) = x^3 + 8x^2 + 4x + 48$.

5. Lorsqu'un polynôme $f(x)$ est divisé par $2x + 1$, le quotient est $x^2 - x + 4$ et le reste est 3. Trouvez $f(x)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes
– suite

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
✔ **Estimation et Calcul Mental**	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **trouver les facteurs d'un polynôme en utilisant le théorème des facteurs** (suite)

Exemple 2

Décomposez complètement en facteurs $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solution

Lorsque vous examinez cette question, il n'est pas apparent quels choix vous devriez faire pour déterminer un facteur de la forme $x - a$.

Les choix peuvent être énoncés sous forme de nombres rationnels dont les numérateurs sont des facteurs du terme constant (terme sans une variable à l'intérieur) et dont les dénominateurs sont des facteurs du coefficient principal, qui est le coefficient de terme ayant le degré le plus élevé.

$$\therefore \quad a = \frac{\text{facteurs du terme constant}}{\text{facteurs du coefficient principal}}$$

Une fois que vous avez énoncé les valeurs possibles de a, vous pouvez utiliser le théorème du reste et le théorème des facteurs ou la division synthétique pour obtenir les facteurs.

Remarque : Lorsque le coefficient principal est 1, alors les valeurs de a sont simplement les facteurs du terme constant.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Parce que le coefficient de x^3 est 1, les valeurs possibles de a sont les facteurs de 6.

$a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Choisissez $a = 1$

Si $f(a) = 0$, alors x - a est un facteur

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 \\ &= 1 - 2 - 5 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x - 1$ est un facteur

Utilisez la division synthétique pour obtenir le deuxième facteur :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$\therefore$ quotient est $x^2 - x - 6$

Le quotient $x^2 - x - 6$ est décomposable en produit de facteurs :

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

On a donc :

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes
– suite

Communications
Connections
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **trouver les facteurs d'un polynôme en utilisant le théorème des facteurs** (suite)

Exemple 3

Décomposez en facteurs : $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Solution

Étant donné que le coefficient principal est de 2 et le terme constant est 3, les valeurs possibles de a sont :

$$a = \frac{\text{facteurs de 3}}{\text{facteurs de 2}} = \frac{\pm 1, \pm 3}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Vérifiez si $a = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 8(1) + 3 \\ &= 2 + 3 - 8 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ x - 1 est un facteur

Utilisez la division synthétique pour obtenir un deuxième facteur.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\ & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$\therefore$ Deuxième facteur: $2x^2 + 5x - 3$

Ceci se décomposera en facteurs : $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$.

$\therefore$ Les facteurs sont : $(x - 1)(2x - 1)(x + 3)$.

· **utiliser la technologie pour résoudre des polynômes**

> La décomposition en facteurs de polynômes n'est pas toujours possible ni pratique, mais lorsqu'elle l'est, elle peut être un outil précieux pour trouver et vérifier des zéros de fonctions polynomiales et les racines d'équations polynomiales.
>
> Exposez les élèves à la solution des polynômes à l'aide des calculatrices à affichage graphique (représentation graphique, résolveur d'équations, etc.). Demandez aux élèves d'utiliser une calculatrice graphique pour tracer la courbe et vérifier les solutions en localisant les zéros de la fonction. De plus, ils peuvent utiliser la fonction de résolution d'équations pour trouver les zéros.

Exemple

Décomposez en facteurs $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ à l'aide de la technologie graphique.

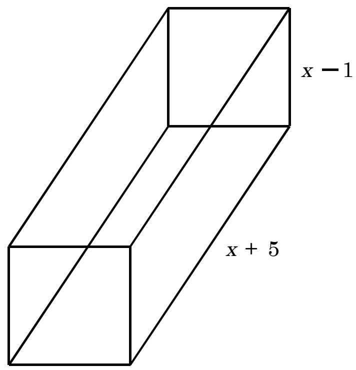
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

1.



Le volume du prisme rectangulaire est
$V = 3x^3 + 8x^2 - 45x - 50$.

Trouvez la dimension manquante.

2. Le polynôme $p(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + 11$ a un reste de -7 lorsqu'il est divisé par $(x + 2)$ et un reste de 14 lorsqu'il est divisé par $x - 1$. Trouvez b et c.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 utiliser le théorème du reste pour évaluer des expressions polynomiales et le théorème des facteurs pour déterminer les facteurs de polynômes – *suite*

Communications
Connections
✔ **Estimation et Calcul Mental**
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **trouver les facteurs d'un polynôme en utilisant le théorème des facteurs** (suite)

Exemple - suite

Solution

1. Appuyez sur Y= .
2. Entrez l'équation à côté de Y1.
3. Appuyez sur WINDOW et réglez une fenêtre conviviale :

   $X_{min} = -9,4$
   $X_{max} = 9,4$

4. Appuyez sur GRAPH .
5. Appuyez sur TRACE . Utilisez la flèche droite ▶ et la flèche gauche ◀ pour tracer. Trouvez la valeur de x lorsque $y = 0$.

   Réponse : $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$
   $y = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

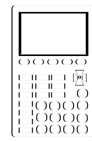
Utilisation du menu CALCULATE :

1. Appuyez sur 2nd (CALC).
2. Sélectionnez 2 : Zero.
3. Réglez les marges de droite et de gauche. (voir l'Unité A : Fonctions quadratiques.)

   Réponse : $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES



Problèmes

1. Représentez graphiquement la fonction sur une calculatrice graphique. (N'oubliez pas de régler une fenêtre convenable où

   $X_{min} = -9{,}4$ et $X_{max} = +9{,}4$) $y = x^5 - 3x^3 + 2x$

   a) Identifiez les valeurs relatives maximale et minimale et indiquez un intervalle pour chacune.

   b) Utilisez la touche TRACE pour trouver le maximum ou le minimum relatif.

   c) Utilisez la touche TRACE pour trouver le(s) zéro(s) de la fonction.

2. On doit confectionner une boîte ouverte à partir d'une pièce de papier de 17 cm sur 22 cm en découpant des carrés de dimensions *x* cm de chaque coin et en pliant les rabats pour former les côtés. Écrivez une fonction donnant le volume de la boîte en termes de *x*. Esquissez la représentation graphique de la fonction et utilisez-la pour estimer la valeur de *x* qui permet d'obtenir le plus grand volume.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Représenter et analyser des fonctions quadratiques, polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie le cas échéant.

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des polynômes de degrés variables**

Une fonction polynomiale est une expression qui peut s'écrire sous la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, où n est un entier non négatif.

Chaque partie de l'expression s'appelle un ***terme*** et chaque terme a un ***coefficient*** qui y est associé. Les termes sont habituellement écrits en puissances décroissantes de x. Le terme qui contient la puissance la plus élevée de x s'appelle le ***terme principal*** et son coefficient est ce que l'on appelle le ***coefficient principal***. La puissance de x contenue dans le terme principal s'appelle le **degré** du polynôme. Des polynômes des premiers degrés ont des noms particuliers énoncés dans le tableau ci-dessous.

Degré	Nom	Exemple de fonction
0	constant	$f(x) = 2$
1	linéaire	$f(x) = x + 2$
2	quadratique	$f(x) = x^2 - 5x + 6$
3	cubique	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 6$
4	bicarré	$f(x) = -3x^4 + x$
5	quintique	$f(x) = 5x^5 + 4x^3 - 6$

Dans le cas des fonctions polynomiales de degrés plus élevés, on les nomme en fonction de leur degré. Par exemple, $f(x) = x^8 + 6x^7 + 4x^2$ est un polynôme du huitième degré.

Chaque polynôme définit une fonction. Toute valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$ est la racine de l'équation et le zéro de la fonction.

Permettez aux élèves d'explorer des polynômes de degrés variables à l'aide de la technologie graphique.

Recherche 1

En quoi ces représentations graphiques sont-elles semblables? En quoi sont-elles différentes? En quoi les représentations graphiques ayant des coefficients principaux positifs sont-elles différentes des représentations graphiques ayant des coefficients principaux négatifs?

Utilisez la fenêtre Xmin = -6 Ymin = -6
Xmax = 6 Ymax = 6

a) $y = x^3$
b) $y = -x^3$
c) $y = x^3 - 2x^2 - x - 2$
d) $y = -x^3 + 2x^2 + x + 2$
e) $y = x^3 - 3x + 2$
f) $y = -x^3 + 3x - 2$

– suite

✔ **Communications** Résolution
Connections ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 8, Leçon 4, 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des polynômes de degrés variables** (suite)

Recherche 2

Représentez graphiquement les fonctions polynomiales suivantes du quatrième degré. Esquissez chaque représentation graphique et nommez-la. Utilisez la même fenêtre qu'auparavant. Décrivez les similitudes et les différences dans ces représentations graphiques.

a) $y = x^4$
b) $y = -x^4$
c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
e) $y = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x + 3$
f) $y = -x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 3$

Recherche 3

a) Si $Y_1 = (x - 1)(x - 2)(x + 2) = x^3 - x^2 - 4x - 4$

À quoi ressemblera cette courbe? Discutez de votre prédiction avec votre partenaire.

b) Quel terme de Y_1 a la plus grande influence pour maintenir la forme de la courbe?

Prédisez, puis représentez graphiquement chacune des équations suivantes :
$Y_2 = Y_1 + 4$
$Y_3 = Y_1 + x^2$
$Y_4 = Y_1 + 4x$
Que concluez-vous?

c) Faites des expériences avec Y_1 en modifiant les coefficients de x^2 et de x à d'autres entiers non nuls.

Avec votre partenaire, discutez des raisons des changements de la forme de la courbe.

Que concluez-vous?

d) Est-ce que l'on peut généraliser les conclusions auxquelles vous êtes parvenu en b) et c) ci-dessus pour une fonction cubique?

Répondez à cette question en examinant la fonction $y = x^3 + 5x^2 + 2x + 4$.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

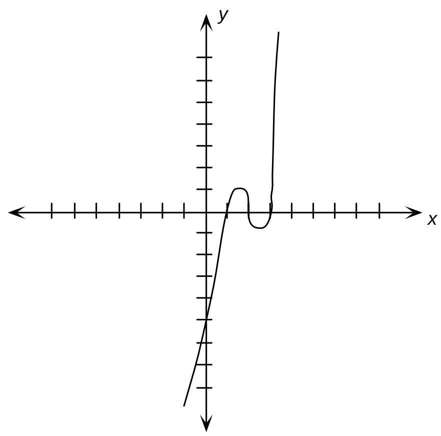
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des polynômes de degrés variables** (suite)

Recherche 4

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, identifiez les facteurs, les zéros, puis esquissez la courbe, vérifiez vos résultats à l'aide de la technologie graphique.

Solution partielle



À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique et d'autres fonctions cubiques, demandez aux élèves d'esquisser chaque représentation graphique sur du papier quadrillé.

Répétez cette procédure en utilisant d'autres fonctions telles des fonctions bicarrées ou des fonctions du degré 5, et ainsi de suite.

Les caractéristiques suivantes des fonctions polynomiales, f, du degré, n, devraient être prises en note.

1. La représentation graphique d'une fonction polynomiale est continue. Cela signifie que la représentation graphique n'a pas d'interruption - vous pourriez esquisser la représentation graphique sans soulever votre crayon du papier.
2. La représentation graphique d'une fonction polynomiale n'a que des courbures lisses. La représentation graphique de f a au maximum $(n - 1)$ changements de sens. Les changements de sens sont les points auxquels la représentation graphique change, passant de croissante à décroissante ou vice versa.

– *suite*

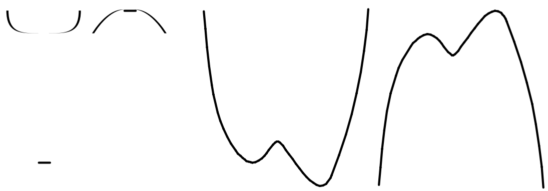
✔ **Communications** — Résolution
Connections — ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Les représentations graphiques de polynômes du degré 4 appartiennent à plusieurs types, dont certains sont indiqués ci-dessous.



(a) (b) (c) (d)

Examinez le graphique de $y = (x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 2)$

$$= x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 8x - 12$$

et déterminez les changements dans les coefficients des termes qui produiraient chacune des formes ci-dessus.

2. Utilisez la technologie graphique pour examiner la représentation graphique de $y = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$ en modifiant les valeurs dans les registres a, b, c et d.

3. Expliquez ce que l'on entend par une représentation graphique continue?

4. Nommez une caractéristique de la représentation graphique de $f(x) = |x|$ qui n'est pas partagée par les représentations graphiques de fonctions polynomiales.

5. Est-ce que la représentation graphique de $f(x) = 2x^4 - 3x$ monte ou descend vers la droite? Comment pouvez-vous le dire? Que se passe-t-il du côté gauche?

6. Énoncez le nombre maximal de changements de sens dans les représentations graphiques suivantes :

   a) $f(x) = x^3 - 4x$
   b) $g(x) = x^6 - 4x^2$
   c) $f(x) = -x^2 - 5x + 6$
   d) $g(x) = x^5 - 4x^3 + 6$
   e) $f(x) = -3x^4 - 5x + 6$

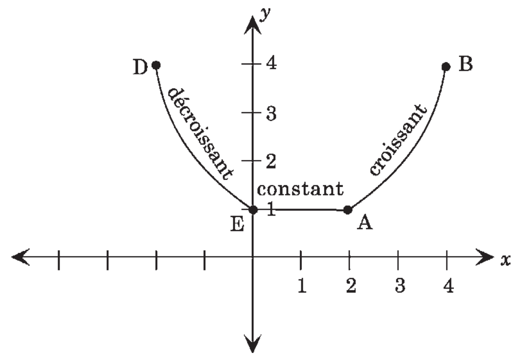
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des polynômes de degrés variables** (suite)

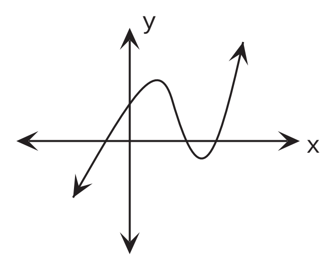
Une fonction, f, est croissante dans l'intervalle si pour n'importe quelle valeur de x_1 et de x_2 dans l'intervalle, $x_1 < x_2$ implique que $f(x_1) < f(x_2)$



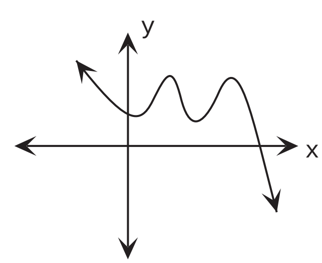
3. Si le coefficient principal de la fonction polynomiale est positif, alors la représentation graphique est ascendante vers la droite. Si le coefficient principal est négatif, alors la représentation graphique est descendante vers la droite.

4. a) Lorsque le degré, n, d'un polynôme est impair, la représentation graphique a un comportement opposé vers la gauche et vers la droite.

   Si le coefficient principal est positif (>0), alors la représentation graphique est descendante vers la gauche et ascendante vers la droite.



   Si le coefficient principal est négatif (<0), alors la représentation graphique est ascendante vers la gauche et descendante vers la droite.



– *suite*

✔ **Communications**	Résolution
Connections	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Pouvez-vous dire si la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x - 4$ a une valeur maximale ou minimale sans représenter graphiquement la fonction? Expliquez.
2. Esquissez $h(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Nommez tous les points d'intersection avec les axes.
3. Esquissez la représentation graphique de $f(x) = x^3 - 20x^2 + 100x$. Nommez et énoncez les coordonnées de tous les points d'intersections avec les axes.
4. Soit $f(x) = 3x^2 - 2kx^2 + (k - 1)x + 10$. Si -2 est un zéro de cette fonction, trouvez la valeur de k.
5. Trouvez les abscisses à l'origine x de la représentation graphique de $p(x) = 2x(x^2 - 3)$.
6. Quel est le nombre maximal d'intersections avec l'axe x qu'une fonction bicarrée peut avoir? Y a-t-il un nombre minimal?
7. Représentez graphiquement $y = x^2(x^2 - 4)$. Quel est le domaine et l'image de cette fonction?

Inscription au journal

À l'aide de la définition d'une fonction croissante comme guide, écrivez une définition pour une fonction décroissante et pour une fonction constante.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

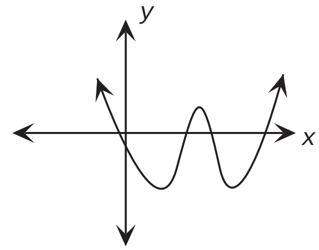
H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

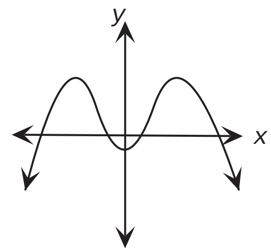
· **explorer des polynômes de degrés variables** (suite)

b) Lorsque le degré, n, d'un polynôme est pair, alors sa représentation graphique a le même comportement vers la gauche et vers la droite.

Si le coefficient principal est positif (>0), alors la représentation graphique est ascendante vers la gauche et vers la droite.

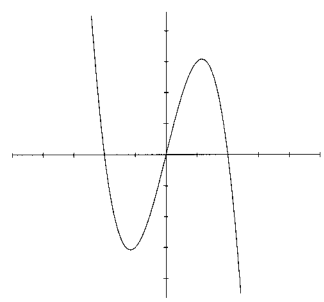


Si le coefficient principal est négatif (<0), alors la représentation graphique est descendante vers la gauche et vers la droite.



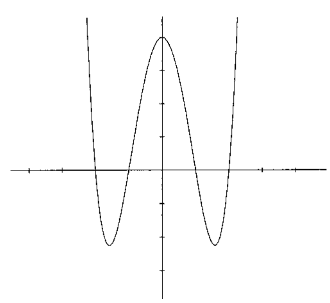
5. La fonction, f, a au maximum n racines réelles. Si vous avez une fonction cubique, vous pouvez vous attendre au plus à trois racines.

Lorsque vous avez une fonction bicarrée, vous pouvez vous attendre à ce qu'il y ait au maximum quatre racines, et ainsi de suite.



$f(x) = -x^3 + 4x$
Cubique – au plus 3 racines

La représentation graphique d'une fonction cubique est formée comme un « S de côté », tel qu'il est illustré.



$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Bicarré – au plus 4 racines

Les équations bicarrées ont une forme en W ou en M.

– *suite*

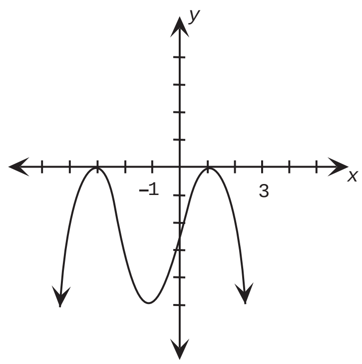
✔ **Communications** — Résolution
Connections — ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Une fonction qui représente le mieux l'esquisse donnée est



a) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 1)$
b) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 1)$
c) $f(x) = -(x - 3)^2(x + 1)^2$
d) $f(x) = -(x + 3)^2(x - 1)$

Problème

La représentation graphique d'une fonction polynomiale du troisième degré touche mais ne traverse pas l'axe des *x* au point (1, 0) et traverse l'axe des *x* au point (-2, 0). Écrivez une équation pour cette fonction polynomiale.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

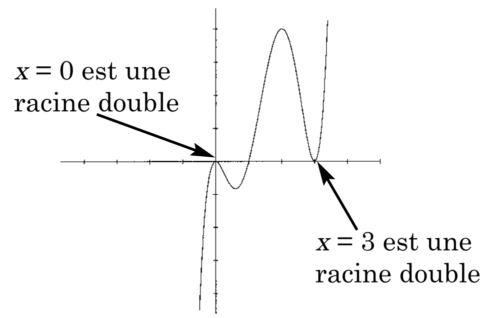
H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des polynômes de degrés variables** (suite)

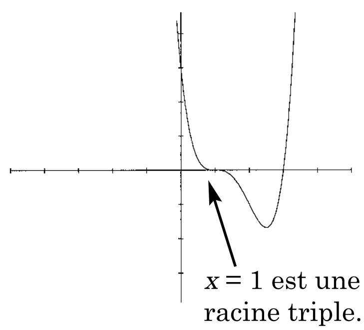
6. Si un polynôme $f(x)$ a un facteur au carré tel que $(x - c)^2$, alors $x = c$ est considérée une racine double de $f(x) = 0$. La représentation graphique de $y = f(x)$ est tangente à l'axe des x au point $x = c$, tel qu'il est illustré ci-dessous.

Quintique (5e degré)
$y = x^2(x - 1)(x - 3)^2$



Si un polynôme $P(x)$ a un facteur au cube tel $(x - c)^3$, alors $x = c$ est une racine triple de $P(x) = 0$. La représentation graphique de $y = P(x)$ s'aplatit environ au point $(c, 0)$ et traverse l'axe des x à ce point, tel qu'il est illustré dans la figure ci-dessous.

Bicarré
$y = (x - 1)^3(x - 3)$



✔ **Communications** Résolution
Connections ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Esquissez la fonction polynomiale $g(x) = x^2(x + 5)$ et nommez les points d'intersection avec les axes sur la représentation graphique.
2. Trouvez une fonction polynominale qui a pour zéros 2, -3 et $-\frac{1}{2}$
3. Trouvez tous les zéros de la fonction polynomiale $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, sachant que $P(-1) = 0$.
4. Déterminez les zéros de la fonction polynomiale $f(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

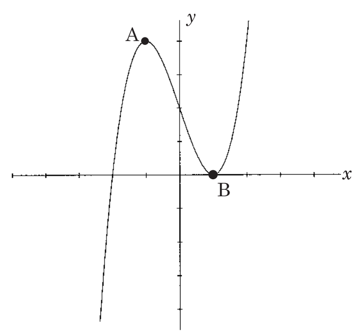
H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer les minimums et maximums relatifs**

Les ***fonctions quadratiques*** ont un maximum ou un minimum. Si la représentation graphique de la fonction s'ouvre vers le haut, la fonction a un minimum. Si la représentation graphique de la fonction s'ouvre vers le bas, elle a un maximum.

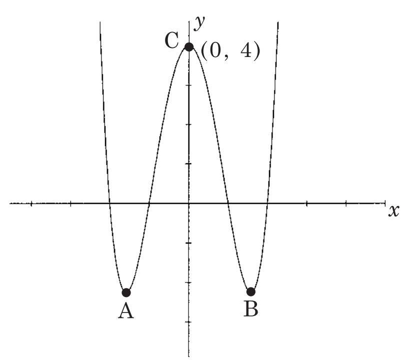
Les ***fonctions cubiques*** n'ont ni de maximum ni de minimum, mais elles peuvent avoir des minimums relatifs ou maximums relatifs dans certains intervalles.



$y = x^3 - 3x + 2$

· **explorer les minimums et maximums absolues**

Les ***fonctions bicarrées*** ont soit un maximum absolu, soit un minimum absolu. Elles peuvent également avoir des maximums ou minimums relatifs dans des intervalles.



$y = x^4 - 5x^2 + 4$

Elle a un minimum absolu aux points A et B lorsque $y \approx -2{,}2$.

Elle a un maximum relatif au point C lorsque $y = 4$.

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Esquissez la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ et déterminez :

a) ses zéros;

b) ses comportements vers la droite et vers la gauche;

c) les extremums.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser l'analyse des signes pour représenter graphiquement des polynômes**

Une autre caractéristique que vous pouvez utiliser pour esquisser la représentation graphique d'une fonction polynomiale est d'utiliser l'analyse des signes en vérifiant une valeur de x à chaque intervalle déterminé par les zéros (voir Unité C : Algèbre).

Exemple

Esquissez la représentation graphique de la fonction cubique décomposée en facteurs $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

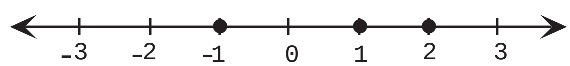
Solution

Pour trouver le zéro, si $f(x) = 0$

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$$
$$x = -1,\ x = 1,\ x = 2$$

Les zéros sont à –1, 1 et 2.

Intervalles de vérification :

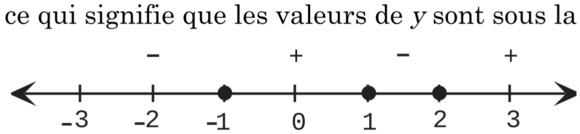


Intervalle : $x > 2$, test $x = 3$
$f(3) = (3 + 1)(3 - 1)(3 - 2) =$ + produit,
+ + +
ce qui signifie que les valeurs de y sont au-dessus de la droite

Intervalle : $-1 < x < 2$, vérifiez $x = 1{,}5$
$f(1{,}5) = (1{,}5 + 1)(1{,}5 - 1)(1{,}5 - 2) =$ – produit,
+ + –
ce qui signifie que les valeurs de y sont sous la droite

Intervalle : $-1 < x < 1$, vérifiez $x = 0$
$f(0) = (0 + 1)(0 - 1)(0 - 2) =$ + produit,
+ – –
ce qui signifie que les valeurs de y sont au-dessus de la droite

Intervalle : $x < -1$, vérifiez $x = -2$
$f(-2) = (-2 + 1)(-2 - 1)(-2 - 2) =$ – produit,
– – –
ce qui signifie que les valeurs de y sont sous la droite



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

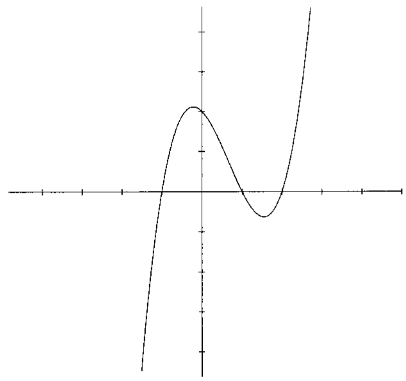
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser l'analyse des signes pour représenter graphiquement des polynômes** (suite)

Pour obtenir la position de la courbe, vous pourriez marquer des points à l'intérieur de l'intervalle, mais s'il s'agit d'une esquisse et vous savez que c'est cubique, rappelez-vous que ce sera un « S de côté ». La représentation graphique ressemblera à celle-ci.

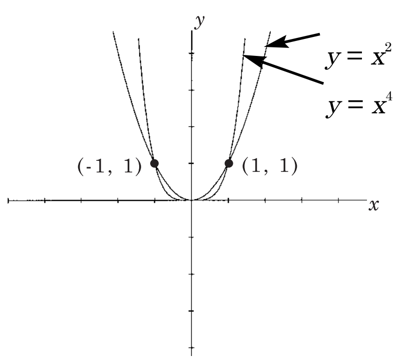


$y = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

· **utiliser des transformations pour esquisser les représentations graphiques**

Vous pouvez utiliser des transformations pour certaines de vos esquisses de représentations graphiques.

Les fonctions polynomiales qui ont les représentations graphiques les plus simples sont les fonctions monomiales $f(x) = a_n x^n$. Lorsque n est pair, la représentation graphique est semblable à la représentation graphique de $f(x) = x^2$. Lorsque n est impair, la représentation graphique est semblable à la représentation graphique de $f(x) = x^3$. En outre, plus la valeur de n est grande, plus la représentation graphique d'un monôme est plate sur l'intervalle $-1 \le x \le 1$.



Lorsque n est impair, la représentation graphique de $y = x^n$ est tangente à l'axe des x à l'origine.

– *suite*

✔ **Communications** | Résolution
Connections | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

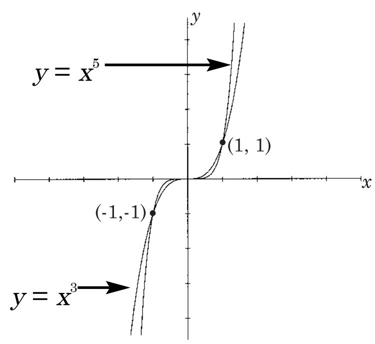
NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

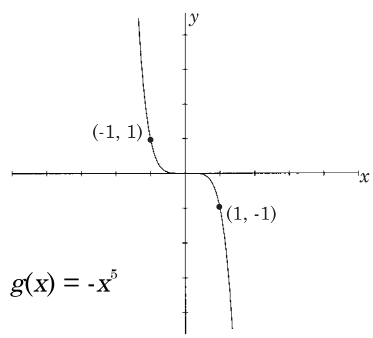
H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

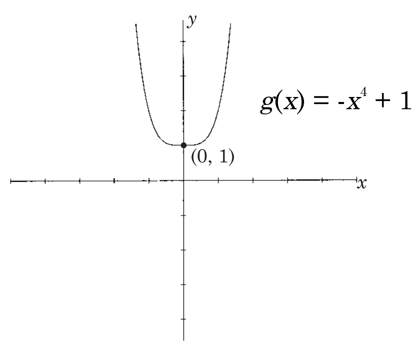
· **utiliser des transformations pour esquisser les représentations graphiques** (suite)



Réflexion : Pour esquisser la représentation graphique de $g(x) = -x^5$, faites une réflexion de la représentation graphique de $f(x) = x^5$ par rapport à l'axe des *x*.



Déplacement vertical : Pour esquisser la représentation graphique de $g(x) = x^4 + 1$, déplacez la représentation graphique de $f(x) = x^4$ vers le haut d'une unité.



– suite

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

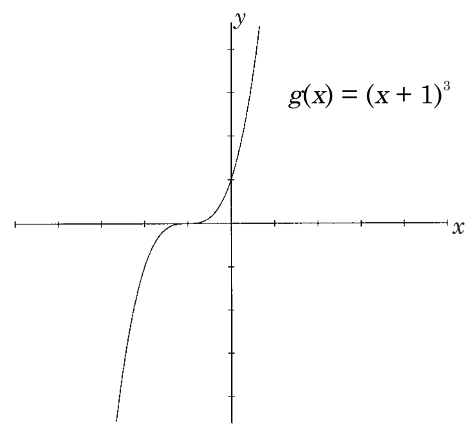
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

· **utiliser des transformations pour esquisser les représentations graphiques** (suite)

Déplacement horizontal : Pour esquisser la représentation graphique de $g(x) = (x + 1)^3$, déplacez la représentation graphique de $f(x) = x^3$ d'une unité vers la gauche.



L'ordonnée à l'origine *y* de la représentation graphique d'une fonction survient lorsque $x = 0$. Les abscisses à l'origine *x* sont les ***zéros*** de la fonction. À un point d'intersection avec l'axe *x*, la valeur de la fonction est zéro.

Si vous connaissez l'équation de la fonction, vous pouvez utiliser la technologie : Utilisez la fonction TRACE pour trouver les zéros et les maximums ou minimums relatifs.

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir une fonction rationnelle**

Une ***fonction rationnelle*** est une fonction de la forme

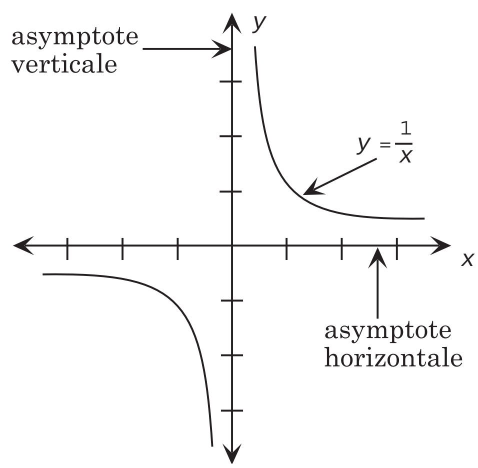
$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}}$$

où $p(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes et le domaine de la fonction rationnelle consiste de toutes les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \neq 0$.

Remarque : Limitez les numérateurs et les dénominateurs à des polynômes linéaires et quadratiques.

· **définir des asymptotes verticales et horizontales**

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale de la représentation graphique de $f(x)$.
La droite $y = 0$ est l'asymptote horizontale.



La droite $x = a$ est une ***asymptote verticale*** de la représentation graphique de f si $f(x) \to \infty$, ou $f(x) \to -\infty$ quand $x \to a$ à droite ou à gauche de a.

La droite $y = b$ est une ***asymptote horizontale*** de la représentation graphique de f si $f(x) \to b$, quand $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

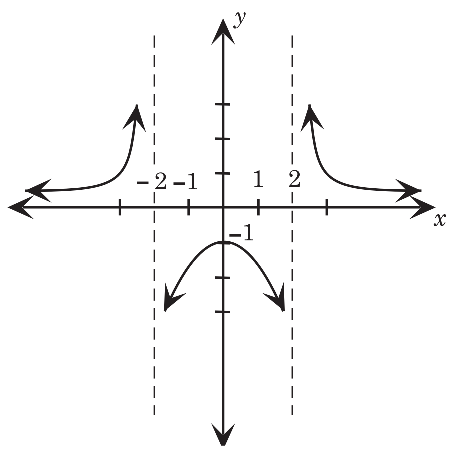
L'esquisse d'une fonction rationnelle est illustrée. Le domaine de la fonction est :

a) $\{x \mid x \in R\}$;

b) $\{x \mid x \neq 0\}$;

c) $\{x \mid x \leq -1 \text{ ou } x > 0\}$;

d) $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer les fonctions rationnelles**

Recherche

a) Reproduisez graphiquement $Y_1 = \frac{1}{x}$ dans une fenêtre appropriée.

d) Décrivez la transformation qui survient à mesure que vous représentez graphiquement :

$$Y_2 = \frac{1}{x} + 3$$

$$Y_3 = \frac{1}{x+3}$$

Utilisez des termes tels que déplacement vertical, déplacement horizontal et asymptotes.

c) Prédisez à quoi ressemblera une représentation graphique de $Y_4 = \frac{1}{x-3} - 3$, puis représentez-la graphiquement dans la fenêtre appropriée.

· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticales et horizontales et d'autres points de discontinuité**

Directives pour représenter graphiquement des fonctions rationnelles

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes n'ayant aucun facteur commun.

1. Trouvez et marquez l'ordonnée à l'origine y (le cas échéant) en évaluant $f(0)$. N'oubliez pas que l'ordonnée à l'origine y est un point sur l'axe des y et que par conséquent x est 0.
2. Trouvez les zéros du numérateur (le cas échéant) en résolvant l'équation $p(x) = 0$. Marquez alors les abscisses à l'origine x correspondantes.
3. Il peut être difficile de représenter graphiquement des fonctions rationnelles uniquement par des points de marquage. Si vous identifiez les discontinuités, y compris les asymptotes, avant de faire la représentation graphique, cela peut vous aider à trouver les principales caractéristiques de sorte que vous pouvez faire une esquisse raisonnable.
4. Esquissez les asymptotes verticales correspondantes en résolvant l'équation du dénominateur $q(x) = 0$ pour trouver les zéros du dénominateur. La représentation graphique de $f(x)$ a une asymptote verticale à chaque zéro réel de $q(x)$.
5. Trouvez et esquissez l'asymptote horizontale (le cas échéant) en utilisant la règle suivante pour trouver l'asymptote horizontale :
   La représentation graphique de $f(x)$ a au maximum une asymptote horizontale.
   a) Si le degré de $p(x)$ est inférieur au degré de $q(x)$, alors la droite $y = 0$ est l'asymptote horizontale.

– suite

✔ **Communications** Résolution
Connections ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

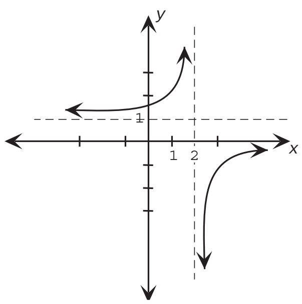
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

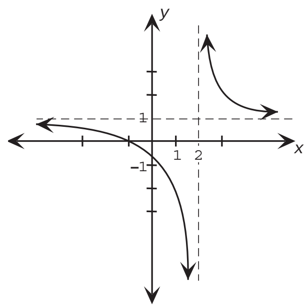
Choix multiple

1. Laquelle des représentations graphiques représente le mieux $y = \dfrac{x+1}{x-2}$?

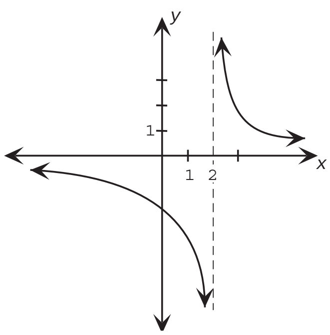
a)



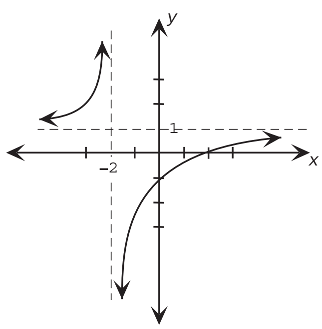
b)



c)



d)



2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$, lequel des énoncés suivants est vrai?

   a) L'asymptote horizontale est $y = 3$.
   b) L'asymptote horizontale est $y = 0$.
   c) Le graphique ne comporte aucune asymptote horizontale ou verticale.
   d) L'asymptote verticale est $x = 1$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticales et horizontales et d'autres points de discontinuité** (suite)

b) Si le degré de $p(x)$ = degré de $q(x)$, alors la droite $y = \frac{a}{b}$ est une asymptote horizontale où a est le coefficient principal de $p(x)$ et b est le coefficient principal de $q(x)$.

c) Si le degré de $p(x)$ est supérieur au degré de $q(x)$, la représentation graphique ne comporte aucune asymptote horizontale.

6. La représentation graphique d'une fonction rationnelle peut être discontinue à une valeur de x sans avoir une asymptote. Cela peut se produire si le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun.
7. Utilisez l'analyse des signes pour illustrer là où la portion de la fonction est négative et là où elle est positive.
8. Utilisez des courbes lisses pour compléter la représentation graphique entre les asymptotes verticales et au-delà.

Exemple 1

Représentez graphiquement

$$Y_1 = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

$$Y_2 = \frac{1}{x - 1} + 2$$

(Il serait peut-être à conseiller de tracer un ensemble de points au lieu de tracer une courbe continue.)

Que remarquez-vous?

Solution

Lorsque vous divisez $2x - 1$ par $x - 1$, vous obtenez $\frac{1}{x - 1} + 2$.

Cela vous aide à voir la transformation de base.

Exemple 2

$$f(x) = \frac{2x}{x + 1}$$

Trouvez l'équation de l'asymptote verticale et l'équation de l'asymptote horizontale de cette fonction.

✔ **Communications**	Résolution
Connections	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trouvez les équations des asymptotes verticales et horizontales, de

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

b) $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 9}$

c) $y = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– suite

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticales et horizontales et d'autres points de discontinuité** (suite)

Exemple 2 *- suite*

Solution

Étape 1 : asymptote verticale

si $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, alors $x = -1$ est une asymptote verticale pour la représentation graphique de la fonction étant donné que le numérateur n'est pas zéro et le dénominateur est zéro lorsque $x = -1$.

Étape 2 : asymptote horizontale

Il y a trois façons très répandues de déterminer cette asymptote.

Méthode 1

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x+1 & 2x \\ & \underline{2x+2} \\ & -2 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$$

Si x est très grand, y est presque égal à 2.
L'asymptote est $y = 2$.

Méthode 2

Si $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, alors sur la représentation graphique de f, $y = \dfrac{2x}{x+1}$

Cela implique que :

$$y(x+1) = 2x$$
$$xy + y = 2x$$
$$xy - 2x = -y$$
$$2x - xy = y$$
$$x(2 - y) = y$$
$$x = \frac{y}{2-y}$$

Lorsque $y = 2$, le numérateur de $\frac{y}{2-y}$ n'est pas zéro et le dénominateur est zéro. Ainsi, l'équation de l'asymptote horizontale pour la représentation graphique de « y » est $y = 2$.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Déterminez si chacun des exemples suivants est une fonction rationnelle, une fonction polynomiale ou une autre forme de fonction, et justifiez votre conclusion.

a) $y = x^2 - 3x + \sqrt{7}$

b) $y = (x - 5)^{-1}$

c) $y = \dfrac{1}{5}x^4 + 3x^3 - 12x - 0{,}75$

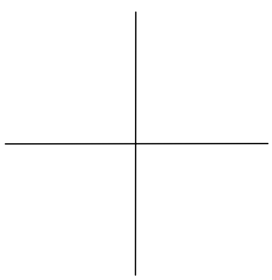
d) $y = \sqrt{7x^2} + x^2$

e) $y = 2^x - 9$

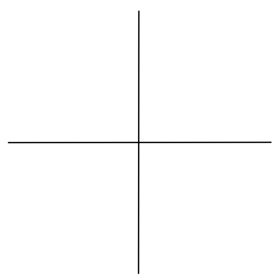
f) $y = \dfrac{3x - 7}{x^2 - 5x + 6}$

2. Examinez les fonctions suivantes. Lesquelles pourraient être des représentations graphiques de fonctions rationnelles, et lesquelles pourraient être des représentations graphiques de fonctions polynomiales?

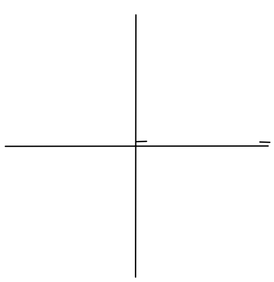
a)



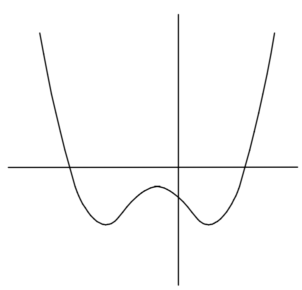
b)



c)



d)



3. Écrivez des équations pour les représentations graphiques de la question 2 ci-dessus. Utilisez votre calculatrice graphique pour les vérifier.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticales et horizontales et d'autres points de discontinuité** (suite)

Exemple 2 *- suite*

Solution - suite

Méthode 3

On peut trouver l'asymptote en utilisant des coefficients principaux a et b dans

$y = \dfrac{a}{b}$ pour parvenir à

$y = \dfrac{2}{1}$

$y = 2$

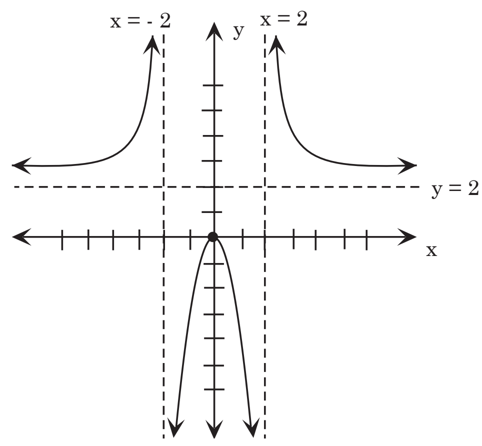
Exemple 3

Représentez graphiquement et décrivez la fonction en termes de domaine, d'équations d'asymptotes.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Solution

Le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun.



ordonnée à l'origine Trouvez $f(0)$

$$f(0) = \frac{2 - 0^2}{0^2 - 4} = 0$$

abscisse à l'origine Si $2x^2 = 0$

$x = 0$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

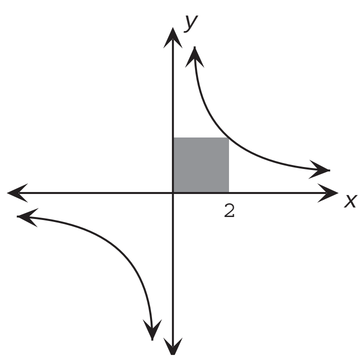
Problèmes

1. Soit $y = \dfrac{3x}{x+4}$:

   a) déterminez les équations des asymptotes qui existent pour cette fonction;
   b) esquissez la fonction, illustrant toutes les asymptotes et les points d'intersection avec les axes.

2. Deux sommets d'un rectangle sont (0, 0) et (2, 0). On trouve un autre sommet sur la représentation graphique de $y = \dfrac{6}{x}$. Trouvez l'aire du rectangle.

   (***Remarque :*** Le diagramme n'est pas dessiné à l'échelle.)



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

✔ **Communications**
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticales et horizontales et d'autres points de discontinuité** (suite)

Exemple 3 *- suite*

Solution - suite

Asymptote verticale

Si le dénominateur $x^2 - 4 = 0$, trouvez les zéros et tracez les droites verticales traversant ces zéros.

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 2$ ou $x = -2$

Asymptote horizontale

Étant donné que le degré du numérateur est le même que celui du dénominateur, l'équation de l'asymptote horizontale est le rapport du coefficient principal du numérateur et du dénominateur.

Analyse des signes

$x > 2$ — + à mesure que la courbe approche $x = 2$ de la droite, elle va à l'infini positif.

$-2 < x < 2$ — – à mesure que la courbe approche $x = 2$ de la gauche, elle va à l'infini négatif et à mesure qu'elle approche $x = -2$ de la droite, elle va à l'infini négatif.

$x < -2$ — + à mesure que la courbe approche $x = -2$ de la gauche, elle va à l'infini positif.

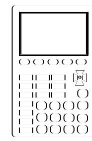
Les points d'intersection avec les axes sont à l'origine. La représentation graphique approche l'asymptote horizontale en provenance du dessus de là où $x > 2$ et $x < -2$.

Remarque : Vous pouvez toujours déterminer les coordonnées de quelques points dans la région pour vous aider.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES



Problèmes

1. Utilisez un outil graphique pour représenter graphiquement $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ et prédire le domaine, l'image et les zéros. Décrivez la symétrie.

2. Utilisez la technologie pour reproduire graphiquement

   $f(x) = x^3 - 4x^2 + k$ pour diverses valeurs de k.

   a) Estimez les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x) = 0$ semble avoir une racine double.

   b) Démontrez que $k = 0$ garantit que $f(x) = 0$ a une racine double.

   c) Démontrez que $k = \dfrac{256}{27}$ garantit que $f(x) = 0$ a une racine double.

3. Représentez graphiquement $y = x^2 - 1$, identifiez les zéros de cette fonction et utilisez-les pour prédire les asymptotes de $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)}$.

   Puis, représentez graphiquement $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)}$, en utilisant un outil graphique. Comparez les deux représentations graphiques, en tenant compte du domaine, de l'image, des asymptotes et des zéros.

4. Pour la fonction suivante $y = \dfrac{2}{x^2 - 9}$

   a) Trouvez l'équation ou les équations de l'asymptote verticale ou des asymptotes verticales (le cas échéant).

   b) Trouvez l'équation ou les équations de l'asymptote horizontale ou des asymptotes horizontales (le cas échéant).

   c) Esquissez la représentation graphique. Illustrez l'ordonnée à l'origine et l'asymptote ou les asymptotes (le cas échéant).

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-4 décrire, représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales et rationnelles à l'aide de la technologie
– *suite*

✔ **Communications** | Résolution
Connections | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
| ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

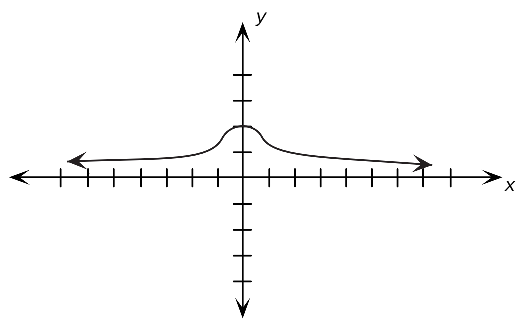
· **représenter graphiquement des fonctions rationnelles en trouvant les asymptotes verticale et horizontale et d'autres points de discontinuité** (suite)

Exemple 4

Représentez graphiquement et décrivez la fonction en termes du domaine, de l'image et des équations d'asymptotes.

$$g(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

Solution



Domaine : R
Image :]0, 2]
Asymptotes : $y = 0$

Exemple 5

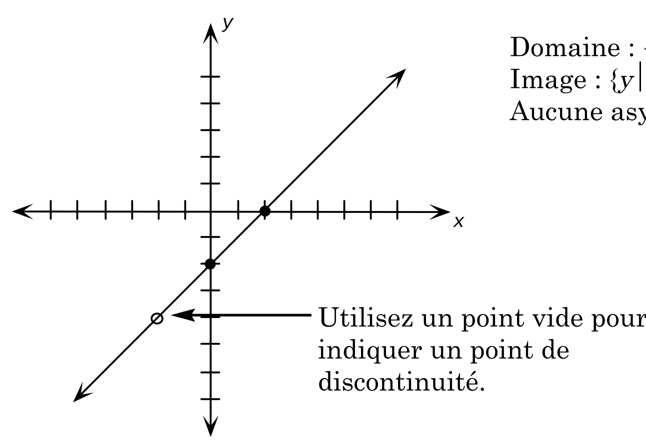
Représentez graphiquement et décrivez la fonction en termes du domaine, de l'image, et des équations d'asymptotes.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Solution

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}$$

Par conséquent, le point de discontinuité est à $x = -2$.



Domaine : $\{x \mid x \neq -2\}$
Image : $\{y \mid y \neq -4\}$
Aucune asymptote

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Trouvez le point de dicontinuité de $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$.

Choix multiple

Pour la fonction $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 4}$, un énoncé vrai est :

a) une équation d'une asymptote verticale est $x = 2$;

b) l'image est $\left\{ y \middle| -\dfrac{1}{4} \leq y < 0 \right\}$;

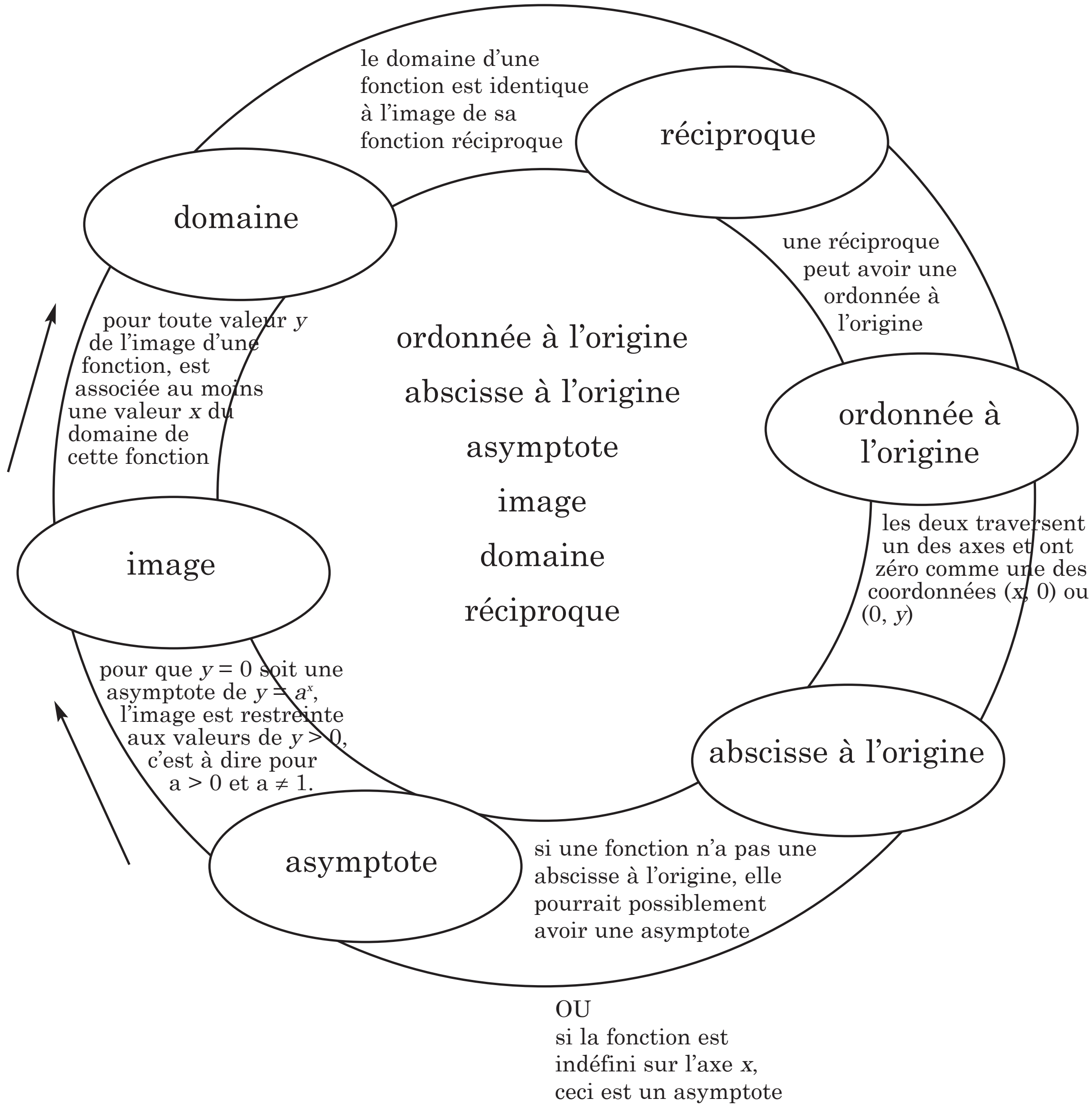
c) l'abscisse à l'origine est $-\dfrac{1}{4}$;

d) le domaine est $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.

Exemple

Annexe H-1

Cycle de vocabulaire



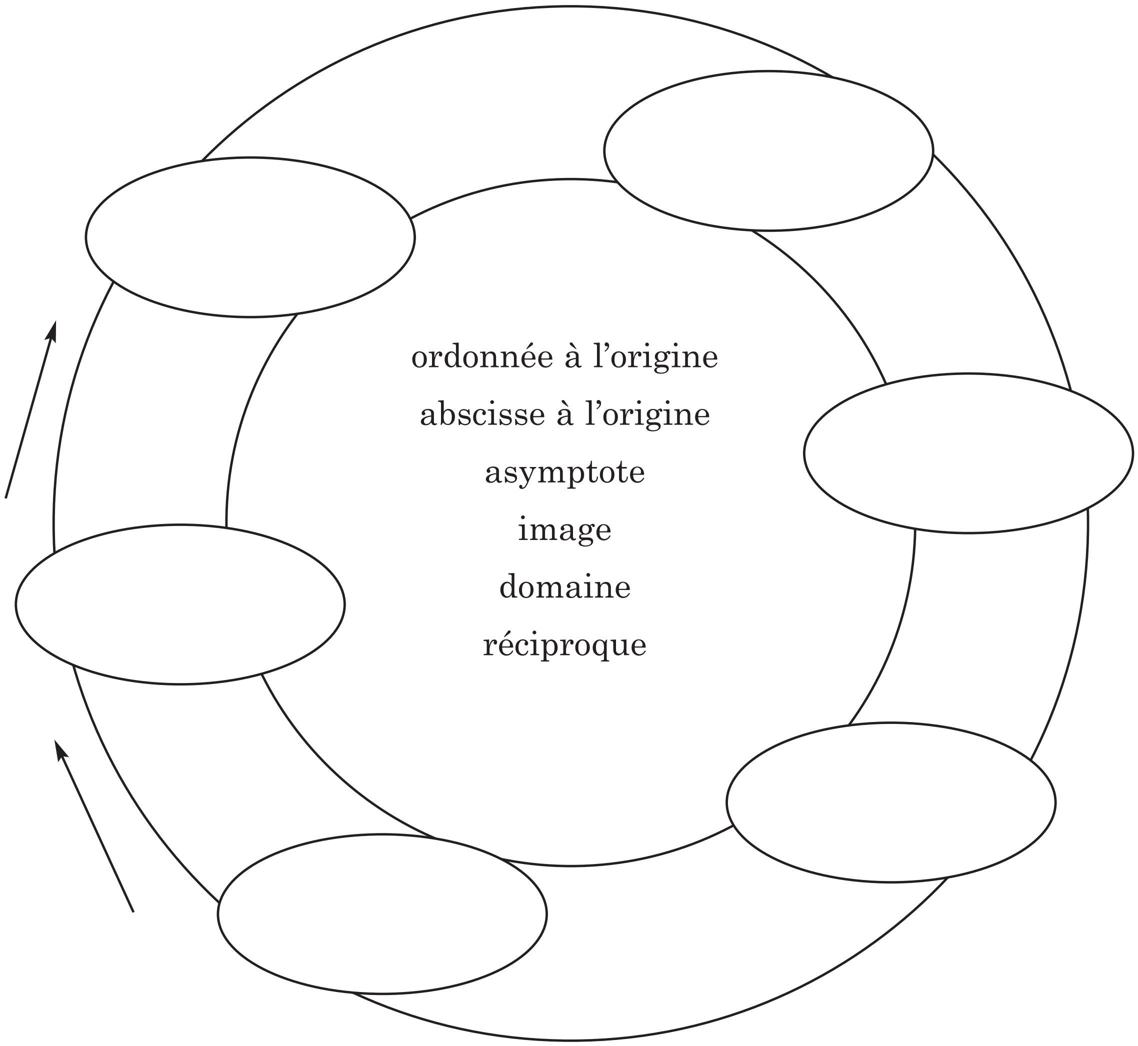
Directives

Lisez la liste de mots dans le cercle ci-dessus. Choisissez un mot et placez-le dans un ovale. Dans l'ovale suivant, placez un autre mot qui est relié au premier. Ils peuvent être des synonymes, des antonymes, des étapes dans un processus, des exemples de quelque chose, et ainsi de suite. Soyez prêt à compléter l'énoncé 'le mot A est relié au mot B parce que ...'. Rédigez une note dans la bande entre les mots pour vous rappeler de la relation. Continuez ce processus jusqu'à ce que vous ayez placé tous les mots. Prévoyez d'avance; les derniers mots peuvent être plus difficiles à placer.

Adapted Word Cycle : Tiré de *Reading — A Novel Approach*. Texte de Janice Szabos. Illustrations par Vanessa Filkins. © 1984 par *Good Apple*, une division de Frank Schaffer Publications, 23740 Hawthorne Boulevard, Torrance, CA 90505.

Annexe H-2

Word Cycle



Directives

Lisez la liste de mots dans le cercle ci-dessus. Choisissez un mot et placez-le dans un ovale. Dans l'ovale suivant, placez un autre mot qui est relié au premier. Ils peuvent être des synonymes, des antonymes, des étapes dans un processus, des exemples de quelque chose, et ainsi de suite. Soyez prêt à compléter l'énoncé 'le mot A est relié au mot B parce que ...'. Rédigez une note dans la bande entre les mots pour vous rappeler de la relation. Continuez ce processus jusqu'à ce que vous ayez placé tous les mots. Prévoyez d'avance; les derniers mots peuvent être plus difficiles à placer.

Note :

En raison de droits d'auteur, nous sommes dans l'impossibilité d'afficher le contenu suivant :

- Annexe H-3 - Exemple, Problème/Objectif
- Annexe H-4 - Problème/Objectif

Prière de vous référer au document imprimé. On peut se procurer ce document au Centre des manuels scolaires du Manitoba.

Centre des manuels scolaires du Manitoba
site : www.mtbb.mb.ca
courrier électronique : mtbb@merlin.mb.ca
téléphone : 1 800 305-5515 télécopieur : (204) 483-3441
nº du catalogue : 90399
coût : 35,15 $

Exemple

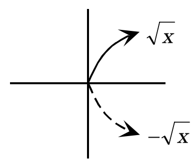
Annexe H-5

Réflexions et fonctions réciproques

Réflexions

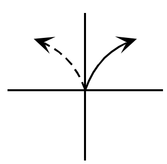
Graphiquement

Trace $f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = -\sqrt{x}$



Lorsque toutes les valeurs de “y” changent de signe, le graphique est réfléchi par rapport à l’axe des “*x*”.

Trace $h(x) = \sqrt{x}$
$h(x) = \sqrt{-x}$



Lorsque toutes les valeurs de “*x*” changent de signe, le graphique est réfléchi par rapport à l’axe des “*y*”.

Algébriquement

$k(x) = -f(x)$

Le graphique sera réfléchi par rapport à l’axe des “*x*” car toutes les valeurs de “*y*” changent de signe.

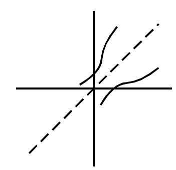
$k(x) = f(-x)$

Le graphique sera réfléchi par rapport à l’axe des “*y*” car toutes les valeurs de “*x*” changent de signe.

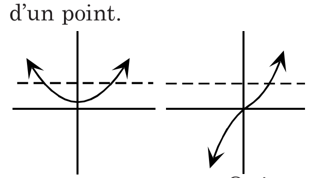
Fonctions réciproques

Graphiquement

Les fonctions *f* et *g* sont des réciproques si elles reflètent l’image l’une de l’autre par rapport à la droite $y = x$.



Le test de la droite horizontale nous indique si une fonction peut avoir une réciproque. La réciproque d’une fonction n’existe pas si une droite horizontale coupe la fonctoin à plus d’un point.



Non Oui

Algébriquement

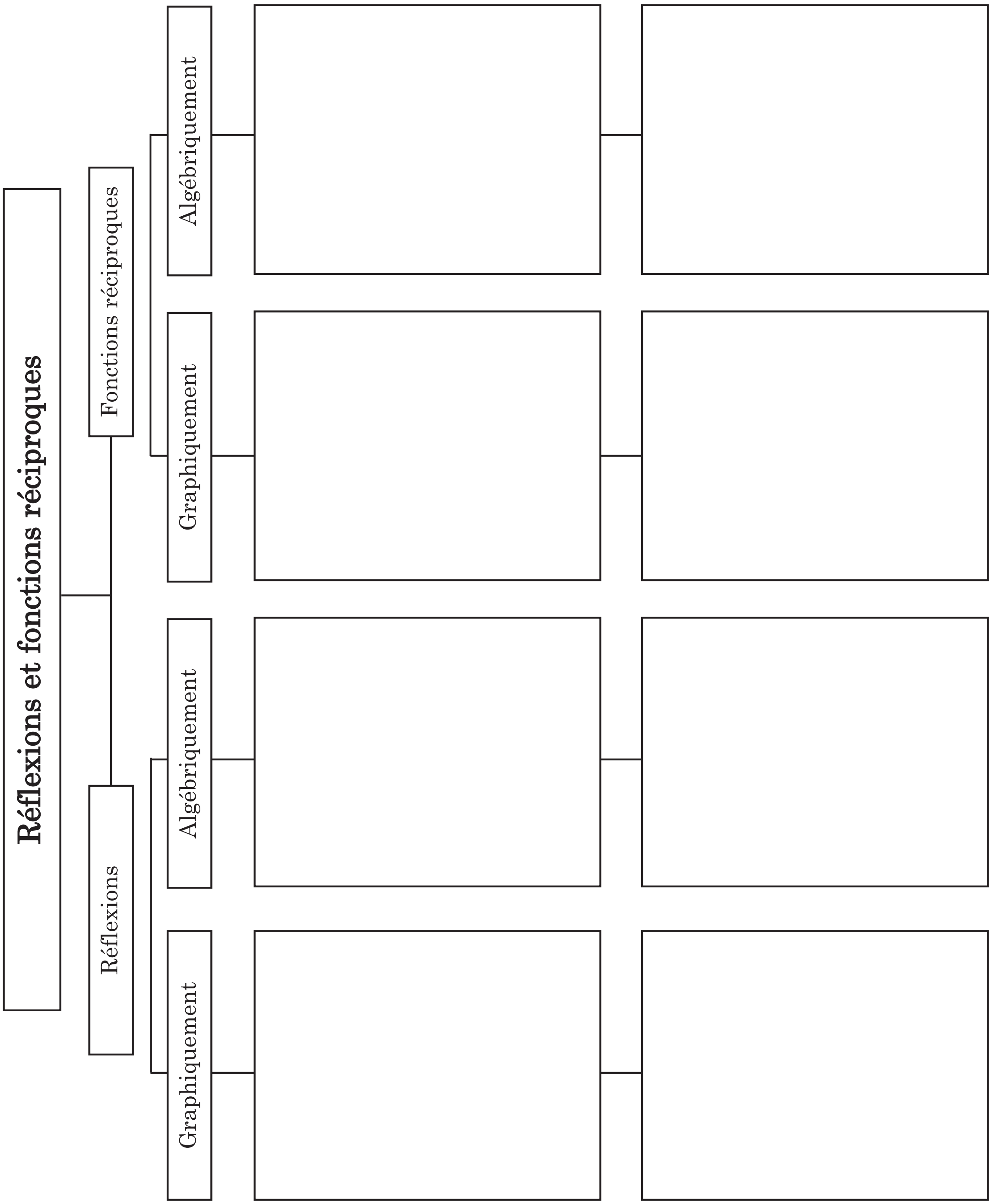
Pour résoudre, échange les variables de “*x*” et “*y*” et résous pour “*y*”. Si on peut résoudre pour “*y*”, les deux fonctions sont réciproques.

Trouve la réciproque de $f(x) = 5x - 1$.

$$y = 5x - 1$$
$$x = 5y - 1$$
$$x + 1 = 5y$$
$$\frac{x+1}{5} = y$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}$$

Step/Solution Map : Utilisation autorisée par Joyce McCallum, Morden Collegiate, Western S.D. No. 47.

Annexe H-6



Step/Solution Map : Utilisation autorisée par Joyce McCallum, Morden Collegiate, Western S.D. No. 47.