Unité G
Logique/Preuve

LOGIQUE/PREUVE

Dans cette unité, on s'attend à ce que les élèves puissent acquérir des connaissances dans les principes du raisonnement mathématique, qui servent à résoudre des problèmes ou à justifier des situations. L'accent est mis sur le processus de l'observation de données, de reconnaissance de motifs et d'émission de conjectures et de généralisations.

Les sujets comprennent :

· le raisonnement déductif et inductif;
· l'utilisation des connecteurs logiques tel « et », « ou » et « ni » dans la résolution de problèmes;
· la création de diagrammes de Venn;
· l'utilisation d'exemples et de contre-exemples pour analyser des conjectures;
· l'analyse d'énoncés « si…alors… »;
· la preuve d'assertions à l'aide du raisonnement direct et indirect.

Pratiques pédagogiques

Pour aider les élèves dans leur apprentissage, les enseignants devraient examiner les pratiques pédagogiques suivantes. Les enseignants devraient donner aux élèves des occasions :

· de mettre en application le raisonnement inductif et déductif dans une demande de renseignements scientifiques et mathématiques;
· d'examiner ou de dessiner des diagrammes de Venn;
· d'utiliser des contre-exemples ou des preuves;
· de faire la distinction entre un énoncé « si…alors… », sa réciproque et sa contraposé;
· de trouver des assertions à l'aide du raisonnement direct et indirect.

Matériel

· calculatrices à affichage graphique

Durée

· 12 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Mettre en application les principes du raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes et pour justifier des situations

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

G-1 faire la différence entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **définir le raisonnement inductif**

Le ***raisonnement inductif*** est le processus par lequel on trouve un principe général fondé sur la preuve de nombreux exemples précis. C'est le processus de l'observation de données, de la reconnaissance de motifs et de l'émission de généralisations à partir des observations. La plupart des recherches scientifiques et mathématiques commencent par le raisonnement inductif.

En géométrie, la plus grande partie du raisonnement se compose de trois étapes :

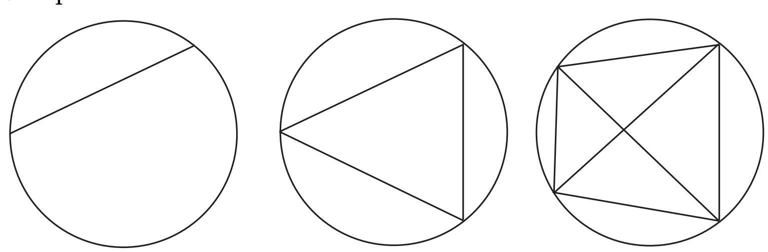
1. Cherchez un patron en utilisant plusieurs exemples pour déterminer si vous pouvez découvrir le patron.
2. Émettez une généralisation à l'aide de plusieurs exemples. On appelle cette généralisation une **conjecture**. Vous vérifiez alors à l'aide d'autres exemples afin de confirmer ou d'infirmer la conjecture.
3. Vérifiez que votre conjecture est vraie dans tous les cas en utilisant le raisonnement logique.

Lorsque vous utilisez les deux premières étapes, vous faites un raisonnement inductif de façon à former une conjecture. La troisième étape vérifie ou prouve la conjecture.

· **utiliser le raisonnement inductif pour former une conjecture et pour prouver la conjecture**

Exemple

Si deux points sont marqués sur la circonférence d'un cercle, on peut les joindre de façon à former une corde, qui divisera le cercle en deux régions. Si vous avez trois points, vous obtenez quatre régions. Ajoutez d'autres points et d'autres cordes et comptez le nombre maximal de régions que vous obtenez. Complétez le tableau.



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Exercices cumulatifs et réponses

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Solutions des exercices cumulatifs

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 7, Leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

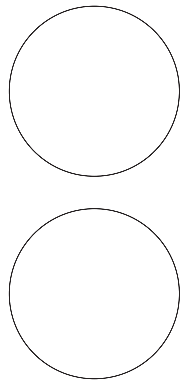
G-1 faire la différence entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif
– *suite*

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement inductif pour former une conjecture et pour prouver la conjecture** (suite)

Exemple *- suite*



Nombre de points	Nombre de régions
2	2
3	4
4	
5	

Émettez une conjecture à partir de vos résultats et vérifiez-la en dessinant toutes les cordes des six points et en formant le nombre maximal de régions. Comptez les régions.

Solution

Il semble que pour cinq points, le nombre de régions suit le patron 2^1, 2^2, 2^3, $2^4 \ldots 2^n$. Mais dessinez le diagramme pour six points et comptez le nombre de régions.

Nombre de points	Nombre de régions
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31

Remarquez que le raisonnement inductif vous donne seulement une conjecture que vous pouvez vérifier de façon plus approfondie. Dans le présent cas, la vérification pour six points vous dit que votre conjecture n'était pas correcte.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Quel est le nombre maximal de régions qu'un cercle peut contenir en reliant n points sur le cercle?
2. Calculez le nombre de diagonales dans un octogone, compte tenu que le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés est $\frac{1}{2}n(n-3)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-1 faire la différence entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif
– *suite*

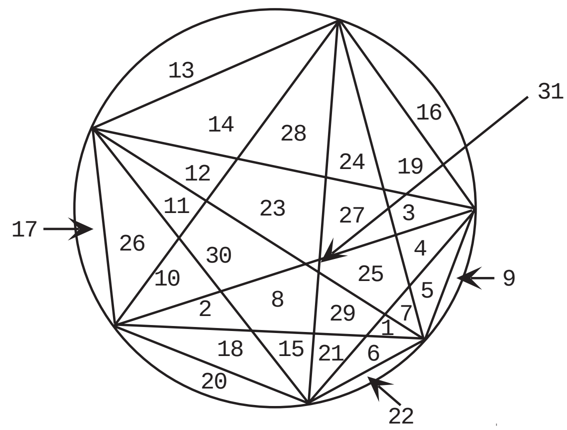
Communications | Résolution
✔ **Connections** | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement inductif pour former une conjecture et pour prouver la conjecture** (suite)

Exemple *- suite*

Solution - suite



(Cherchez le petit triangle quelque part au milieu.)

· **définir le raisonnement déductif**

> Le ***raisonnement déductif*** est le processus de raisonnement à partir d'énoncés acceptés jusqu'à une conclusion. C'est le processus qui permet de démontrer que si certains énoncés sont acceptés comme étant vrais, alors on peut démontrer que d'autres énoncés découlent de ceux-là. Déduire signifie raisonner à partir de faits connus. Lorsqu'un théorème est démontré, une structure existante est utilisée pour déduire de nouvelles parties de la structure.

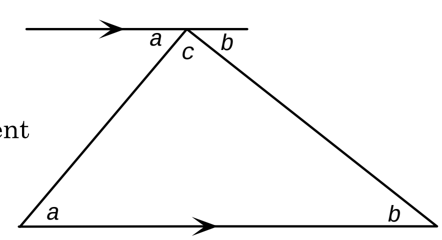
· **utiliser le raisonnement déductif pour arriver à une conclusion à partir d'un fait connu ou de faits connus**

Exemple 1

Démontrez par déduction que la somme des mesures a, b et c est 180°.

Solution

a) Dessinez un triangle.
b) Utilisez un côté comme base et dessinez un segment de droite parallèle sur le sommet opposé.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Parmi les exemples de raisonnement suivants, lesquels sont inductifs et lesquels sont déductifs?
   a) Tous les étudiants du deuxième cycle du secondaire doivent s'inscrire à un cours d'anglais. Tracy est une étudiante et elle conclut donc qu'elle doit suivre le cours d'anglais.
   b) Chaque fois que j'ai un match de hockey, j'ai un test le lendemain.
   c) Quiconque aime jouer au badminton aime jouer au tennis. Jeff aime jouer au badminton. Nous en concluons qu'il aime jouer au tennis.
   d) Le triangle ABC est un triangle équilatéral. Nous en concluons que $AB \cong AC$.
   e) Dans le cadre d'un projet de statistique, Jeannine a compté le nombre de voitures de couleurs différentes qui sont passées devant son école en l'espace de 20 minutes. Plus de la moitié des voitures étaient rouges. Elle a décidé que le rouge est la couleur la plus populaire pour les voitures.
2. Parmi les conclusions ci-dessus, lesquelles sont valables?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-1 faire la différence entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement inductif pour former une conjecture et pour prouver la conjecture** (suite)

Exemple 1 *- suite*

Solution - suite

c) Utilisez le fait connu que $a = a$, $b = b$, et c est inclus dans les deux $\therefore\ a + b + c = 180^{\circ}$.

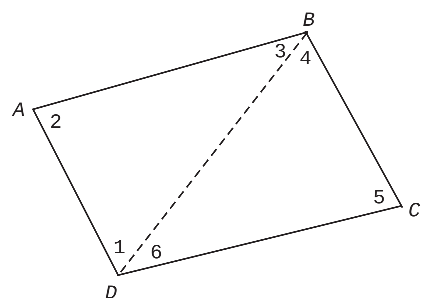
L'exemple ci-dessus peut également s'appliquer aux quadrilatères ou à n'importe quel autre polygone.

Exemple 2

Démontrez que la somme des angles d'un quadrilatère est 360°.

Solution

Dessinez un quadrilatère ABCD. Tracez la diagonale BD. Utilisez le fait **connu** que la somme des angles d'un triangle est 180°.



La somme des angles du quadrilatère

$= \angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA$

$= \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1$

$= \underbrace{\angle 1 + \angle 2 + \angle 3}_{\text{somme des angles du triangle ABC}} + \underbrace{\angle 4 + \angle 5 + \angle 6}_{\text{somme des angles du triangle BCD}}$

$= 180^{\circ} + 180^{\circ}$

$= 360^{\circ}$

· **démontrer des énoncés de façon déductive et/ou inductive**

Exemple

Démontrez les prémisses suivantes. Dans la mesure du possible, utilisez à la fois le raisonnement déductif et le raisonnement inductif.

a) Les angles intérieurs d'un polygone ont un total de $180(n - 2)^{\circ}$ où n est le nombre de côtés.

b) La somme des n entiers consécutifs impairs en commençant par 1 est n^2.

c) Si a et b sont des angles complémentaires, alors sin α = cos β.

Communications	Résolution
✔ **Connections**	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	Visualisation

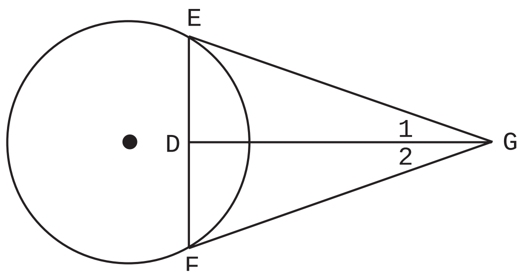
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

GE et GF sont tangentes au cercle en E et F respectivement. GD est une médiane.

Vérifiez que $\angle 1 \cong \angle 2$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-2 expliquer et mettre en application des connecteurs logiques tel « et », « ou » et « non » pour résoudre des problèmes

- ✔ **Communications**
- Connections
- Estimation et Calcul Mental
- ✔ **Résolution**
- ✔ **Raisonnement**
- Technologie
- ✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **mettre en application les connecteurs logiques « et », « ou » et « non » pour résoudre des problèmes**

> « Et », « ou » et « non » sont des connecteurs logiques qu'on utilise d'une façon précise en raisonnement mathématique. Le fait de dire « A ou B » est utilisé en mathématique dans le sens inclusif. Lorsque nous disons que « A ou B » est vrai, cela signifie que A pourrait être vrai ou que B pourrait être vrai ou que les deux, A et B, pourraient être vrais. Dire « A et B » signifie l'ensemble qui est commun aux deux.

Exemple 1

Prenez la situation suivante.

Ensemble A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Ensemble B = {2, 4, 6, 8}
Ensemble C = { 4, 8}

Ce sont trois ensembles de nombres. On dit de chaque nombre de l'ensemble qu'il est un élément.

Énumérez les éléments de l'ensemble :

a) Nombres qui appartiennent à l'ensemble B **et** à l'ensemble C
Solution : {4, 8}

b) Nombres qui appartiennent à l'ensemble A **et** à l'ensemble C
Solution : {4, 8}

c) Nombres qui appartiennent à l'ensemble B **ou** à l'ensemble C
Solution : {2, 4, 6, 8}

d) Nombres qui appartiennent à l'ensemble A **et** non à l'ensemble B
Solution : {1, 3, 5, 7, 9}

e) Nombres qui appartiennent à l'ensemble A **et** à l'ensemble B
Solution : {2, 4, 6, 8}

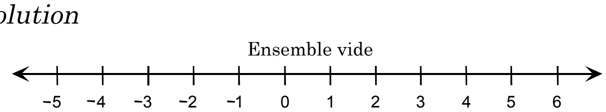
Exemple 2

Sur une droite numérique, indiquez la région correspondant à chacun des énoncés suivants :

a) $x < 2$ **et** $x > 5$

b) ($x < 4$ **et** $x < -1$) **et** ($x > -5$)

Solution

a) 

b) 

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Sur une droite numérique, indiquez la région correspondant à chacun des énoncés suivants :

a) $x < 2$ **ou** $x < 5$

b) $x < 2$ **et** $x < 5$

c) $x \leq 2$ **ou** $x > 5$

d) $x < 5$ **et non** $x > 2$

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 7, Leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

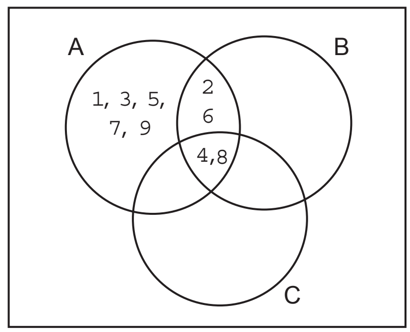
G-2 expliquer et mettre en application des connecteurs logiques tel « et », « ou » et « non » pour résoudre des problèmes – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser des diagrammes de Venn pour résoudre des problèmes concernant des ensembles**

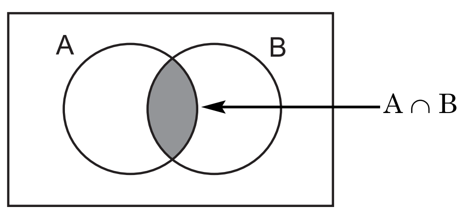
On peut représenter les ensembles par des figures qu'on appelle diagrammes de Venn. Lorsque l'on dessine un diagramme de Venn, on doit commencer par un rectangle pour représenter un ensemble universel. À l'intérieur du rectangle, on dessine des cercles pour représenter les sous-ensembles de l'ensemble universel.

L'*exemple 2* précédent pourrait être représenté par un diagramme de Venn.

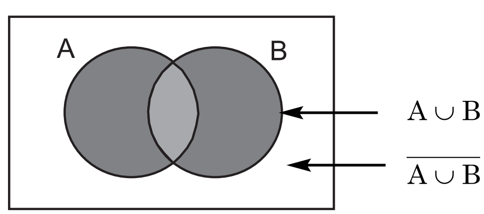


Comme vous pouvez le constater, on peut utiliser le diagramme de Venn pour représenter la façon dont un ensemble est trié.

Si A et B sont deux ensembles qui se chevauchent, l'ensemble d'éléments que A et B ont en commun est une intersection de A et de B et est représentée par $A \cap B$. C'est la région ombrée dans le diagramme.



Les éléments qui appartiennent soit à l'ensemble A soit à l'ensemble B représentent l'union des ensembles A et B qui est représentée comme $A \cup B$. C'est la zone ombrée dans le diagramme de Venn suivant.



– *suite*

✔ **Communications** ✔ **Résolution**
Connections ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul mental
Technologie
✔ **Visualisation**

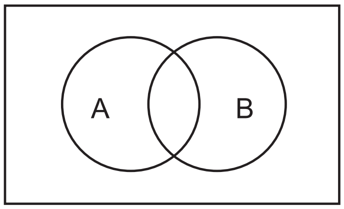
STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

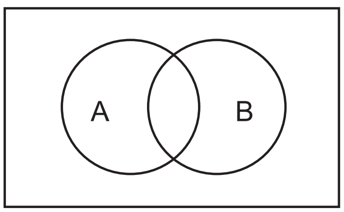
Calcul mental

Soit : Les ensembles A et B représentés par des cercles. Représentez n'importe quelle combinaison de « et », « ou » et « non » en ombrant les parties appropriées du diagramme.

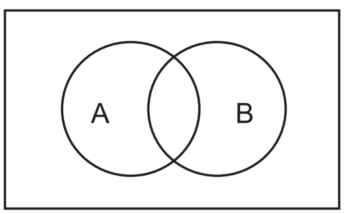
a) A **et** B



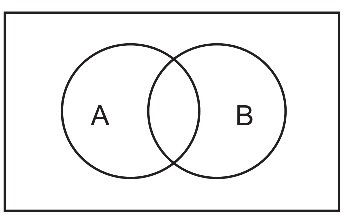
b) A **ou** B



c) **non** A et **non** B



d) **non** (A **ou** B)



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-2 expliquer et mettre en application des connecteurs logiques tel « et », « ou » et « non » pour résoudre des problèmes – *suite*

✔ Communications | **✔ Résolution**
Connections | **✔ Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser des diagrammes de Venn pour résoudre des problèmes concernant des ensembles** (suite)

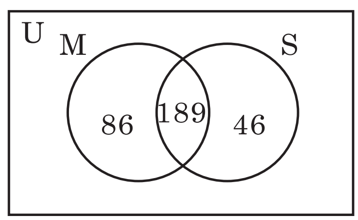
L'ensemble des éléments qui n'est pas dans l'ensemble A s'appelle le complément de A et est représenté par $\overline{A}$. Dans le diagramme précédent, le complément de $A \cup B$, désigné comme $\overline{A \cup B}$, est représenté par la région non ombrée à l'intérieur du rectangle.

Exemple

Dans une école secondaire d'une grande ville, 435 élèves sont inscrits en secondaire 4. Il y a 275 élèves qui prennent des cours de mathématiques, 235 qui suivent des cours de sciences et 189 qui prennent des cours de mathématiques et des cours de sciences. Combien y a-t-il d'élèves qui ne prennent ni de cours de mathématiques ni de cours de sciences ?

Solution

Si U = ensemble universel des élèves de secondaire 4
M = sous-ensemble d'élèves de secondaire 4 qui prennent des cours de mathématiques
S = sous-ensemble des élèves de secondaire 4 qui prennent des cours de sciences



N'oubliez pas que le nombre d'élèves qui prennent des cours de mathématiques et de sciences $M \cap S$ est de 189. Ils sont comptés comme partie des 275 et comme partie des 235. Il y a donc 86 élèves qui prennent seulement des cours de mathématiques et 46 seulement des cours de sciences.

$\therefore$ le nombre d'élèves qui prennent des cours de mathématiques et de sciences = nombre d'élèves qui prennent seulement des cours de mathématiques + nombre d'élèves qui prennent seulement des cours de sciences + le nombre d'élèves qui prennent des cours de mathématiques et des cours de sciences.

$\therefore M \cup S = 86 + 46 + 189 = 321$

Le nombre d'élèves qui ne prennent ni de cours de mathématiques ni de cours de sciences $\overline{M \cup S} = 435 - 321 = 114$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Chaque membre d'un club sportif participe au moins à l'un des sports suivants : soccer, rugby ou tennis. On donne les renseignements suivants :

   a) 163 jouent au tennis ; 36 jouent au tennis et au rugby ; 13 jouent au tennis et au soccer
   b) 6 jouent aux trois sports ; 11 jouent au soccer et au rugby ; 208 jouent au rugby ou au tennis
   c) 98 jouent au soccer ou au rugby

   Utilisez cette information pour déterminer le nombre de membres dans le club.

2. L'expression « A ou B » peut servir dans un discours ordinaire dans les deux sens, à savoir inclusivement et exclusivement, selon que « A et B » est inclus ou exclus.

   a) Donnez un exemple pratique de chaque sens de « A ou B ».
   b) Montrez la relation entre le sens inclusif et le sens exclusif de « A ou B » sur des diagrammes appropriés de Venn.
   c) Les mathématiciens et les logiciens utilisent le sens inclusif de « A ou B ». Justifiez ce choix.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-3 utiliser des exemples et des contre-exemples pour analyser des conjectures

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **analyser des conjectures à l'aide d'exemples et de contre-exemples**

> ***Contre-exemple :*** Un exemple qui démontre qu'un énoncé général est faux. Un contre-exemple suffit à démontrer qu'une conjecture est fausse.

Exemple 1

Rajiv a conclu que dès qu'il additionnait deux nombres premiers, la somme était toujours paire. Trouvez un contre-exemple pour démontrer que la conjecture de Rajiv est fausse.

Solution

Exemple justificatif :

L'énoncé de Rajiv est vrai lorsque vous prenez deux nombres premiers impairs, p. ex., 3 + 5, 3 + 31 = 34, et ainsi de suite.

Contre-exemple :

2 et 3 sont des nombres premiers
$2 + 3 = 5$ le nombre 5 est impair

2 et 5 sont des nombres premiers
$2 + 5 = 7$ le nombre 7 est impair

2 et 7 sont des nombres premiers
$2 + 7 = 9$ le nombre 9 est impair, etc.

Exemple 2

Jane a énoncé que $a^b = b^a$.

a) Trouvez un exemple pour démontrer que sa conjecture est raisonnable.
b) Trouvez un contre-exemple pour démontrer que la conjecture de Jane est fausse.

Solution

a) $2^2 = 2^2$
b) $2^1 \neq 1^2$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

1. Donnez un contre-exemple pour réfuter les énoncés suivants :
   a) Tous les nombres premiers sont impairs.

   b) Un quadrilatère ayant une paire de côtés parallèles est un parallélogramme.

   c) Si quatre sommets d'un quadrilatère reposent sur le même cercle, alors le quadrilatère est un parallélogramme.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 7, Leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

G-4 faire la distinction entre une proposition « si… alors… », sa réciproque et sa contraposée

· **analyser des énoncés « si… alors… ».**

Un argument logique est fait d'un ensemble de prémisses et d'une conclusion. Chaque énoncé donné est une prémisse ou une ***hypothèse*** et l'énoncé auquel on arrive est la ***conclusion***. Un argument est valide si la conclusion à laquelle on est arrivée s'est faite par des formes acceptées de raisonnement.

L'énoncé « si…alors… » s'appelle un ***énoncé conditionnel***. Il se compose de deux parties.

a) hypothèse - la partie « si », représentée par p

b) conclusion - la partie « alors », représentée par q

Exemple : Si deux angles sont des angles opposés par le sommet, alors ils sont congrus.

Symbolisme : $p \rightarrow q$ L'énoncé est vrai.

La ***réciproque*** de l'énoncé conditionnel est formée en interchangeant l'hypothèse et la conclusion.

Exemple : Si deux angles sont congrus, alors ce sont des angles opposés par le sommet.

Symbolisme : $q \rightarrow p$ L'énoncé est faux.

Dans l'exemple ci-dessus, l'énoncé initial est vrai tandis que sa réciproque est fausse. La réciproque d'un énoncé vrai peut être vraie ou non.

L'expression ***« si et seulement si »*** sert lorsque la réciproque d'un énoncé vrai est vraie.

Exemple : Un triangle a deux côtés égaux, si et seulement s'il a deux angles égaux.

Symbolisme : $p \leftrightarrow q$ si l'énoncé est vrai.

C'est l'équivalent d'écrire l'énoncé conditionnel $p \rightarrow q$ et sa réciproque $q \rightarrow p$.

Pour créer ***la contraposé***, vous inversez et prenez la négation des deux parties de l'énoncé original, c'est-à-dire que vous prenez la négation des deux : l'hypothèse et la conclusion.

Exemple : Si deux angles ne sont pas congrus, alors ce ne sont pas des angles opposés par le sommet.

Symbolisme : $\sim q \rightarrow \sim p$ L'énoncé est vrai.

Les élèves devraient se rendre compte que la contraposé d'un énoncé vrai est également vrai. La contraposé d'un énoncé faux est faux. Donc un énoncé et sa contraposé sont équivalents, et doivent être tous les deux vrais ou tous les deux faux.

– suite

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Écrivez chacun des énoncés suivants sous la forme « si… alors… ». Pour chaque énoncé, écrivez sa réciproque et sa contraposé. Est-ce que la réciproque est vraie ? Est-ce que la contraposé est vraie?
   a) Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
   b) Si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leur pente est –1.
2. Écrivez la réciproque et la contraposé de l'énoncé suivant et indiquez lequel d'entre eux est vrai. Trouvez un contre-exemple pour démontrer que l'un d'entre eux est faux.

   Si p et q sont tous deux multiples de 11, alors $p + q$ est également un multiple de 11.

Inscriptions au journal

1. Créez une proposition vraie dont la réciproque est vraie.
2. Modifiez l'énoncé « Les multiples de 3 sont toujours des multiples de 6 » sous la forme « si… alors… », et écrivez la réciproque et la contraposé de l'énoncé « si… alors… ». Décidez de la véracité des trois propositions.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 7, Leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-4 faire la distinction entre une proposition « si… alors… », sa réciproque et sa contraposée
– *suite*

Communications | Résolution
✔ Connections | ✔ Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | Technologie | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **analyser des énoncés « si… alors… »** (suite)

Pour créer la ***négation*** d'un énoncé, vous prenez la négation de l'hypotyhèse et de la conclusion.

Exemple : Soit l'énoncé :

$\underbrace{\text{Si la température est bonne}}_{p}$, $\underbrace{\text{alors j'irai jouer au golf}}_{q}$.

La négation de l'énoncé :

$\underbrace{\text{Si la température n'est pas bonne}}_{\sim p}$, $\underbrace{\text{alors je n'irai pas jouer au golf}}_{\sim q}$.

Symbolisme : La négation de $p \to q$ est $\sim p \to \sim q$. La négation d'un énoncé peut être vraie ou fausse.

Exemple 1

Dans l'énoncé conditionnel suivant, écrivez la réciproque, la négation et la contraposé. Identifiez alors sa réciproque, sa négation et sa contraposé comme étant vrais ou faux.

Si Mélanie habite à Plum Coulee, alors Mélanie habite au Manitoba.

Solution

Énoncé : Si Mélanie habite à Plum Coulee, alors Mélanie habite au Manitoba. – Vrai

Réciproque : Si Mélanie habite au Manitoba, alors Mélanie habite à Plum Coulee. – Faux

Négation : Si Mélanie n'habite pas à Plum Coulee, alors Mélanie n'habite pas au Manitoba. – Faux.

Contraposé : Si Mélanie n'habite pas au Manitoba, alors Mélanie n'habite pas à Plum Coulee. – Vrai

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Écrivez un énoncé qui est logiquement l'équivalent de chacun des énoncés suivants :
   a) Un rectangle a des diagonales congruentes.
   b) Si vous n'avez pas un permis de conduire, vous devez subir un test.
2. Écrivez un énoncé vrai dont la réciproque et la contraposé sont tous les deux vrais.
3. Écrivez un énoncé vrai dont la réciproque n'est pas vraie.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 démontrer des propositions dans diverses situations en se servant du raisonnement direct et indirect.

Communications
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement direct et indirect pour démontrer des propositions**

Discutez des concepts suivants avec les élèves :
Supposez que vous voulez établir la vérité d'un certain énoncé, P. Dans la méthode indirecte de preuve, vous émettez l'hypothèse que P est faux. Vous démontrez alors que cette hypothèse mène à une contradiction. Ainsi, vous êtes obligés de conclure comme hypothèse que P est faux ne peut pas tenir et que par conséquent, P doit être vrai.

Il serait peut-être préférable de commencer par un exemple du type de raisonnement indirect que l'on retrouve dans la conversation de tous les jours. Prenez le dialogue suivant entre deux élèves :

Sam : Comment sais-tu que cette auto a été construite après 1973?

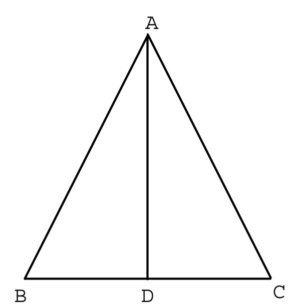
Jean : Si cette auto avait été construite en 1973 ou avant, elle n'aurait pas de convertisseur catalytique. Comme tu peux le constater, cette auto a un convertisseur catalytique, donc elle doit avoir été construite après 1973.

Jean utilise le ***raisonnement indirect***.

Exemple

Pour un triangle ABC qui a le point D sur BC, démontrez l'énoncé suivant :

Si AB = AC et $\angle$ BAD $\neq$ $\angle$ CAD, alors BD $\neq$ CD.



Preuve/Solution

Supposez que BD = CD.
À partir de AB = AC et de BD = CD, il s'ensuit par CCC que Δ BAD = Δ CAD et donc $\angle$ BAD = $\angle$ CAD.
Mais, $\angle$ BAD $\neq$ $\angle$ CAD (contradiction).
Par conséquent, BD $\neq$ CD.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. L'angle BAC est obtus et AD est la médiane de BC. Si AD n'est pas une hauteur, démontrez que ABC est un triangle scalène. (Utilisez la preuve indirecte.)
2. Démontrez que les médianes d'un triangle ne se coupent pas en leur milieu. (Utilisez la preuve indirecte.)

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 7, Leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 démontrer des propositions dans diverses situations en se servant du raisonnement direct et indirect.
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement direct et indirect pour démontrer des propositions** (suite)

La procédure pour la ***preuve indirecte*** est la suivante :

1. Examinez la conclusion qu'on vous demande de démontrer.
2. Commencez par supposer que l'opposé de ce que vous voulez démontrer est vrai, et alors, à l'aide du raisonnement logique, essayez de développer un énoncé qui contredit soit :
   a) les données fournies;
   b) l'hypothèse initiale;
   c) une définition;
   d) un théorème.
3. Une fois que vous êtes parvenu à une contradiction, faites remarquer qu'étant donné que vous avez présenté des arguments logiques, l'hypothèse doit être responsable de la contradiction et que par conséquent les conclusions souhaitées doivent être vraies.

Il serait peut-être préférable de commencer par des exemples de raisonnement indirect que l'on retrouve dans la conversation de tous les jours.

Prenez les exemples suivants :

Cas 1 :« Il ne doit pas pleuvoir à l'extérieur. S'il pleuvait, alors ces personnes qui franchissent la porte seraient mouillées, mais elles ne le sont pas »

ou

Cas 2 « Aujourd'hui ne doit pas être la bonne journée pour un match de football. Si le match était joué aujourd'hui, alors le stade serait déjà rempli de monde, mais vous et moi sommes les seules personnes ici ».

Dans chaque cas, la personne veut démontrer qu'un certain énoncé est vrai. La preuve est amorcée en supposant que l'énoncé à démontrer est faux, ensuite en observant que cela mène à une conclusion qui contredit un fait connu.

Dans un premier cas, la personne supposait qu'il pleuvait; cela mène à la conclusion que les personnes qui franchissent la porte devraient être mouillées, et cela contredit le fait connu que les personnes sont sèches. Dans le deuxième cas, la personne suppose que le match de football se joue aujourd'hui. Cela mène à la contradiction du fait qu'il y a seulement deux personnes dans le stade.

Communications — Connections — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — Technologie — Visualisation

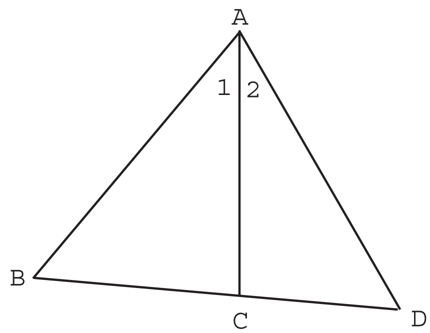
– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

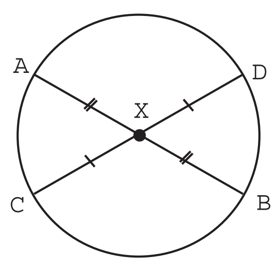
NOTES

Problèmes

1. Soit : AB = AD
   $\angle 1 \neq \angle 2$
   Démontrez que AC n'est pas une médiane du Δ ABD.



2. Si K est bleu, alors M est rouge.
   Si K est vert, alors M est jaune.
   Si M est rouge, alors J est bleu.
   a) K est bleu, de sorte que M est _________ et J est________.
   b) J n'est pas bleu. Est-il possible de tirer une conclusion au sujet de K ? Le cas échéant, quelle conclusion?
3. Deux cordes AB et CD se coupent en leur milieu X.
   Démontrez que X est le centre du cercle.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

G-5 démontrer des propositions dans diverses situations en se servant du raisonnement direct et indirect.
– *suite*

Communications
Connections
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser le raisonnement direct et indirect pour démontrer des propositions** (suite)

Exemple 1

Quelles conclusions pouvez-vous tirer de l'hypothèse suivante ?

Si p est vrai, alors q est vrai.
Si r est vrai, alors s est vrai.
Si q est vrai, alors s est vrai.
p est vrai.

Solution

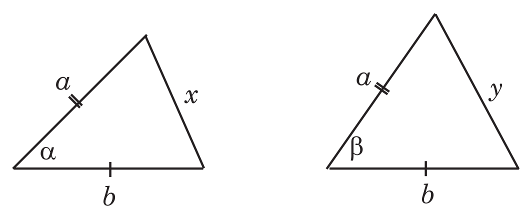
Q est vrai, s est vrai, r est vrai ou faux.

Exemple 2

Si les deux côtés d'un triangle sont congruents aux deux côtés d'un autre triangle, mais les longueurs des troisièmes côtés sont inégales, alors les angles inclus entre les paires de côtés congruents sont inégaux.

Solution

On vous dit que $x \neq y$ et vous devez démontrer que $\alpha \neq \beta$. Supposez que $\alpha = \beta$, alors, en vertu de la loi des cosinus, vous obtenez rapidement $x = y$. Cette contradiction vous dit que $\alpha \neq \beta$.



Lorsque vous discutez des preuves indirectes, vous pouvez utiliser des exemples comme les suivants pour motiver les élèves.

Exemple 3

Sur une certaine île, les habitants appelés « rois » disent ***toujours*** la vérité tandis que les autres, appelés « valets » mentent ***toujours***.

Je viens à peine d'arriver sur l'île, je rencontre deux personnes, Monsieur A et Monsieur B. Monsieur A dit « Au moins l'un d'entre nous est un roi ». Que sont A et B ?

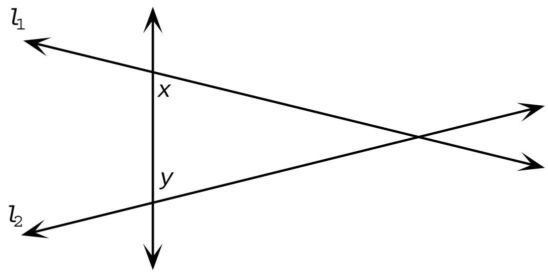
– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Dans le diagramme ci-dessous, démontrez que
   a) $x + y < 180°$ (preuve directe)
   b) si $x + y = 180°$, les droites l_1 et l_2 sont parallèles (preuve directe)



2. Démontrez que la différence des carrés de deux nombres impairs est toujours divisible par 4.
3. Si n est un nombre entier et n^2 est impair, alors n est également impair (utilisez la preuve directe ou indirecte).

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

G-5 démontrer des propositions dans diverses situations en se servant du raisonnement direct et indirect. – *suite*

Communications / Résolution
Connections / ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental / Technologie
Visualisation

· **utiliser le raisonnement direct et indirect pour démontrer des propositions** (suite)

***Exemple 3** - suite*

Solution

Utilisez d'abord une preuve indirecte pour démontrer que A est un roi.

Émettez l'hypothèse suivante : A n'est pas un roi. Il s'ensuit que A est un valet. Alors l'énoncé qu'il a fait (Au moins l'un d'entre nous est un roi) doit être faux étant donné que les valets mentent toujours. Par conséquent, les deux hommes, en particulier A, devraient être des rois, ce qui contredit notre hypothèse que A n'est pas un roi. Ainsi, notre hypothèse que A n'est pas un roi doit être fausse.

Il s'ensuit que A doit être un roi et que par conséquent son énoncé est vrai. Étant donné que l'un des deux est un roi et que A est un roi, B doit être un valet.

Exemple 4

Sur l'île mentionnée précédemment, je m'aventure un peu plus loin et je rencontre un homme, Monsieur C. Il dit, « Je suis un valet, mais D ne l'est pas. » Que sont C et D ?

Solution

Supposez que C est un roi. Alors son énoncé serait vrai, ce qui signifierait qu'il est un valet. Cette contradiction démontre que C ne peut pas être un roi, de sorte que C est un valet. Si D était un roi, alors l'énoncé de C (« Je suis un valet, mais D ne l'est pas ») serait vrai. Mais C est un valet et les valets mentent toujours de sorte que D ne peut pas être un roi et, par conséquent, doit être un valet également.

Exemple 5

Démontrez que $\sqrt{3}$ est irrationnelle (preuve indirecte).

Solution

Supposez que $\sqrt{3}$ est rationnelle.

Il existe deux nombres entiers A et B de telle sorte que

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{3}b = a$$

$$3b^2 = a^2$$

Le nombre de facteurs de 3 dans b^2 et a^2 est pair. Par conséquent, le nombre de facteurs de 3 du coté gauche, $3b^2$, est impair tandis que le nombre de facteurs de 3 du côté droit, a^2, est pair. Par conséquent, $3b^2 \neq a^2$ (contradiction).

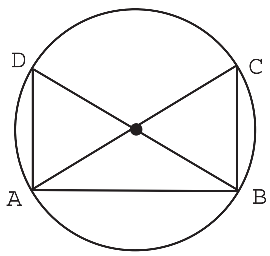
Par conséquent, $\sqrt{3}$ est irrationnelle.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

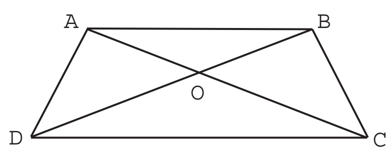
1. Soit : Deux angles égaux ADB et ACB sont sur le même côté de la corde AB. Démontrez que A, B, C et D sont cocycliques.



2. Les diagonales d'un trapèze ne se coupent pas en leur milieu.

   Données : Le trapèze ABCD dont les bases AB // DC et les diagonales AC et BD se croisent en O.

   Requis : Pour démontrer que les diagonales de ABCD ne se coupent pas en leur milieu (AO ≠ CO ou DO ≠ OB).



3. Certaines « preuves » semblent convaincantes jusqu'à ce que vous découvriez la fausseté dans l'argument.

   Voici une « preuve » que 1 = 2.
   Si $a = b$, différent de 0.

Alors $ab = b^2$	En multipliant les deux côtés par b.
$ab - a^2 = b^2 - a^2$	Soustrayez a^2 de chaque côté.
$a(b - a) = (b - a)(b + a)$	Décomposez en facteurs.
$a = (b + a)$	Divisez les deux côtés par $(b - a)$.
Mais $a = b$.	
$a = a + a$	
$a = 2a$	$1 = 2$

   Où est la lacune ?

4. Démontrez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.