Unité D
Géométrie analytique

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Cette unité sur la géométrie analytique fait le lien entre l'algèbre et la géométrie plane à l'aide de modèles.

Dans cette unité, les élèves vont :
· développer l'équation cartésienne d'un cercle;
· résoudre des problèmes portant sur des distances entre des points et des droites;
· vérifier et démontrer des propositions en géométrie plane à l'aide de la géométrie cartésienne;
· résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables graphiquement et algébriquement;
· résoudre des systèmes d'équations linéaires à trois variables algébriquement et à l'aide de la technologie;
· résoudre un système d'équations non linéaires à l'aide de la technologie;
· représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables;
· résoudre à l'aide de la technologie et algébriquement des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue.

Pratiques pédagogiques

Pour aider les élèves dans leur apprentissage, les enseignants devraient examiner les pratiques pédagogiques suivantes. Les enseignants devraient fournir aux élèves des possibilités :
· d'établir des liens entre la complétion du carré pour des fonctions quadratiques et la complétion du carré pour des cercles;
· développer la formule de distance d'un point à une droite, en mettant en évidence les différences dans les distances horizontales, verticales et perpendiculaires;
· développer la vérification de propositions en géométrie plane à l'aide de la géométrie cartésienne;
· utiliser la calculatrice à affichage graphique ou des logiciels informatiques pour illustrer les solutions de systèmes d'équations linéaires à deux ou trois variables;
· comparer graphiquement et algébriquement des systèmes indépendants, dépendants et incompatibles;
· déterminer des stratégies pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires, y compris à l'aide de la technologie graphique et de l'algèbre;
· analyser des stratégies pour résoudre des inéquations linéaires, quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue, y compris l'approche du diagramme des signes.

Matériel

· papier quadrillé
· calculatrices à affichage graphique
· logiciels informatiques (*Cabri-géomètre II, Cybergéomètre)*

Durée

· 20 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'aprentissage général
Résoudre des problèmes de géométrie des coordonnées faisant intervenir des droites et des segments de droite et justifier les réponses.

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)
D-1 développer l'équation cartésienne d'un cercle

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On donne à la fin de la présente unité des expériences d'apprentissage par enseignement différencié (voir les Annexes D-2 à D-7, pp. D-81 à D-86).

· **développer l'équation cartésienne d'un cercle**

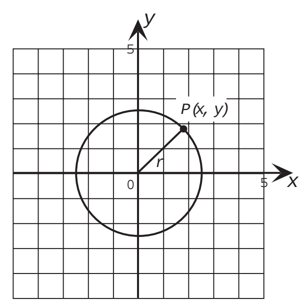
Un ***cercle*** est l'ensemble de tous les points (x, y) qui sont équidistants d'un point fixe que l'on appelle le centre du cercle. La distance, r, entre le centre du cercle et un point (x, y) sur le cercle est le ***rayon***.

La distance entre deux points est donnée par la formule

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Si le centre du cercle est placé à (0, 0), ***l'origine***, et r est le rayon, placez $P(x, y)$ sur n'importe quel point de ce cercle. La distance de (x, y) à (0, 0) est égale au rayon (r).

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \text{ ou } r^2 = x^2 + y^2$$



$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = r$$

Pour un cercle qui a son centre au point (h, k) et un rayon de r, la ***forme canonique*** de l'équation est

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \text{ ou}$$

$$\mathbf{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

qui est $x^2 + y^2 = r^2$ déplacé de h unités horizontalement et de k unités verticalement.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Donnez l'équation d'un cercle de centre (–2, 1) et de rayon $\sqrt{7}$.

2. Écrivez les équations pour chacun des cercles suivants avec les propriétés données. Laissez les réponses en forme canonique.
   a) Le centre est au point (5, 0) et le diamètre est de 10.
   b) Le centre est au point (4, 3) et passe au point (1, 2).
   c) Le centre est au point (0, 0) et son aire est de 12π unités carrées.
   d) Le centre est au point (2, –1) et sa circonférence est de 20π unités.

NOTES

Ressources imprimées

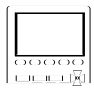
Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Exercices cumulatifs et réponses

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Solutions des exercices cumulatifs

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçon 1

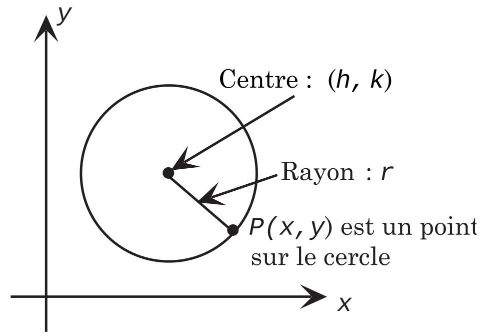
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-1 développer l'équation cartésienne d'un cercle
– suite



STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **développer l'équation cartésienne d'un cercle** (suite)



L'équation d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon peut s'écrire selon deux formes.

a) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ***(forme canonique)***
où (h, k) est le centre et r est le rayon.

b) $x^2+y^2+dx+ey+f=0$, (forme générale) où d, e et f sont des nombres réels et le fait de compléter les carrés de cette équation la transformera en la formule (a).

· **résoudre des problèmes à l'aide de l'équation cartésienne d'un cercle**

Exemple

Pour le cercle d'équation $x^2+y^2-8x+12y-35=0$

a) trouvez son centre

b) trouvez son rayon

c) représentez graphiquement.

Solution

Complétez le carré pour les termes de x et de y :

$$x^2+y^2-8x+12y-35=0$$
$$(x^2-8x\qquad)+(y^2+12y\qquad)+35=0$$
$$(x^2-8x+16)+(y^2+12y+36)=-35+16+36$$
$$(x-4)^2+(y+6)^2=17$$

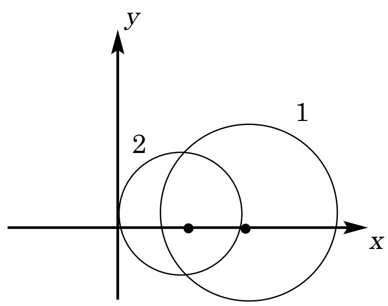
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. L'équation du cercle 1 est $(x - 4)^2 + y^2 = 9$. Trouvez l'équation du cercle 2.



2. Certains systèmes d'irrigation tournent autour d'un pivot en un mouvement circulaire. Écrivez une équation pour modéliser la limite circulaire du champ si la canalisation des arroseurs mesure 400 m de longueur.

   Reproduisez graphiquement ce cercle à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Si vous êtes à l'extrémité du cercle et que votre coordonnée y est 400, quelle serait la coordonnée x?

3. Une autoroute à deux voix traverse un tunnel semi-circulaire qui mesure 5 m de hauteur en son point supérieur. Si chaque voix de circulation mesure 4 m de largeur, quelle est la hauteur du tunnel à la limite de chaque voix?

4. Trouvez le rayon de $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$. Arrondissez votre réponse à deux décimales près.

Choix multiples

1. Une équation du cercle qui a son centre au point C(–1, 4) et qui traverse le point P(2, 6) est
   a) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$
   b) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{13}$
   c) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = \sqrt{13}$
   d) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 13$

2. Le rayon du cercle donné par l'équation $x^2 + 8x + y^2 - 2y = 64$ est
   a) $\sqrt{47}$ b) 8
   c) $\sqrt{69}$ d) 9

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-1 développer l'équation cartésienne d'un cercle – *suite*

· **résoudre des problèmes à l'aide de l'équation cartésienne d'un cercle** (suite)

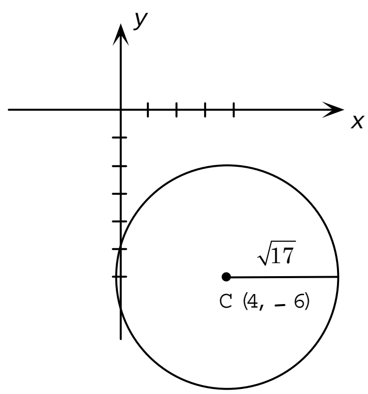
Exemple - suite

Réponse

a) Centre : (4,–6)

b) Rayon : $\sqrt{17}$

c)



D-2 résoudre des problèmes portant sur des distances entre des points et des droites

· **trouver la distance entre un point et une droite**

La distance (perpendiculaire) à partir d'un point P(x_1, y_1) jusqu'à la droite $Ax + By + C = 0$ est

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(Voir la preuve de cette formule à l'Annexe D-1)

Les élèves peuvent programmer cette formule dans leur calculatrice.

Exemple

Pour les droites $x + 3y = 6$ et $x + 3y = 3$, trouvez la :

a) distance horizontale entre les droites;

b) distance verticale entre les droites;

c) distance la plus courte entre les droites.

Communications
✔ Connections
Estimation et Calcul Mental
✔ Résolution
✔ Raisonnement
Technologie
Visualisation

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Choix multiples

Les coordonnées du centre du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x = 0$ sont

a) (–2, 0)
b) (4, 0)
c) (–4, 0)
d) (2, 0)

Problèmes

1. Déterminez la distance la plus courte de (3, 4) à la droite $2x - 5y = 7$.
2. Les droites $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 9$ sont parallèles. Déterminez la :
   a) distance verticale entre les deux droites;
   b) distance horizontale entre les deux droites;
   c) distance la plus courte entre les deux droites.

NOTES

Ressource imprimé

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

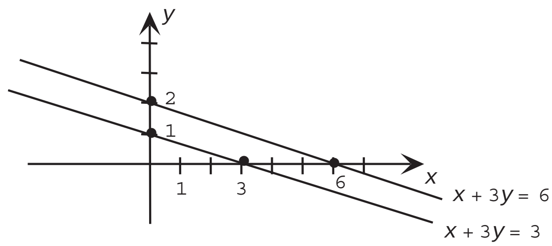
D-2 résoudre des problèmes portant sur des distances entre des points et des droites
– *suite*

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· trouver la distance entre un point et une droite (suite)

Solution



a) La distance horizontale est la distance entre les abscisses à l'origine $|6 - 3| = 3$. Rappelez-vous, pour trouver l'abscisse à l'origine, $y = 0$.
b) La distance verticale est la distance entre les ordonnées à l'origine $|2 - 1| = 1$. N'oubliez pas, pour trouver l'ordonnée à l'origine, $x = 0$.
c) Choisissez un point sur $x + 3y = 3$. Un point pratique est un point d'intersection avec les axes.

Par conséquent, (0, 1) peut représenter $P(x_1, y_1)$ et l'autre droite $x + 3y - 6 = 0$ représente $Ax_1 + By_1 + C = 0$, où A = 1, B = 3, C = –6

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|(1)(0) + (3)(1) + (-6)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{|-3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Vous pouvez vérifier votre réponse en prenant un point sur la droite $x + 3y = 6$ et en utilisant $x + 3y - 3 = 0$ comme étant la droite $Ax + By + C = 0$, où A = 1, B= 3 et C = –3.

Un point qui représente le point d'intersection avec l'axe des x est (6, 0).

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|(1)(6) + (3)(0) + (-3)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{|3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

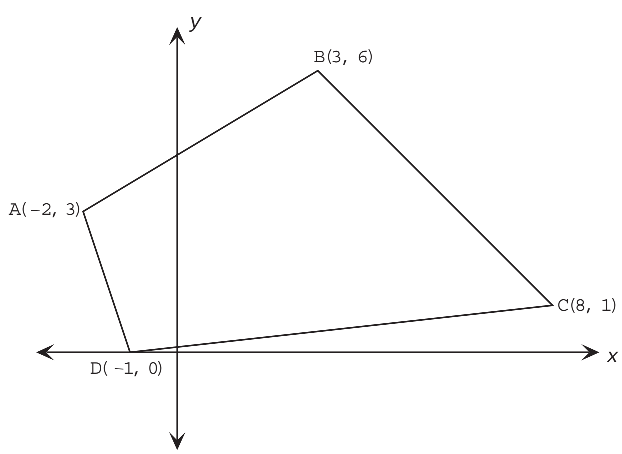
1. Le point P sur la parabole $y^2 = 8x$ est dans le premier quadrant. Si la coordonnée x du point P est 2, trouvez la distance entre P et la droite $2x - y + 2 = 0$.

2. Si la distance à partir de la droite $2x - 3y + 8 = 0$ jusqu'à la droite $2x - 3y + k = 0$ est $\frac{9}{\sqrt{13}}$ unités, trouvez la (les) valeur(s) de k.

3. La fonction $f(x) = 2x^2 + 1$ traverse le point $(x, 9)$ dans le deuxième quadrant. Trouvez la distance la plus courte à partir de ce point jusqu'à la droite traversant A(2, 3) et B(–6, –1).

4. Trouvez la valeur de k si la droite d'équation $3x + 4y - 5 = 0$ est tangente au cercle d'équation $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = k$.

5. Soit le quadrilatère ABCD ci-dessous, montrez que la distance la plus courte entre le point A et la droite reliant B et D est $\frac{9}{\sqrt{13}}$



Choix multiples

La distance à partir du point (2, 1) jusqu'à la droite $2x + 3y = 15$ est

a) $\frac{-8}{\sqrt{13}}$ b) $\frac{7}{\sqrt{13}}$

c) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ d) $\frac{22}{\sqrt{13}}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-3 vérifier et établir des propositions en géométrie plane à l'aide de la géométrie cartésienne

✔ **Communications** | Résolution
Connections | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser les concepts de pente, de point milieu et les formules de distance pour vérifier ou démontrer les propositions ayant trait aux triangles, quadrilatères et cercles**

Les enseignants peuvent vouloir organiser les élèves en groupes coopératifs pour la démonstration des propositions. On peut partager les solutions aux problèmes entre camarades de classe.

Les élèves peuvent trouver les formules suivantes utiles pour vérifier ou démontrer les propositions :

$$\text{Pente } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Point milieu} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\text{Distance } (d) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{Distance } (d) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exemple 1

Soit A = (–1, 3), B = (0, 5) et C = (–2, 6)

a) Vérifiez que ABC est un triangle rectangle.
b) Est-ce que ABC est isocèle? Justifiez votre proposition.
c) Si M est le point milieu de AB et N est le point milieu de AC, démontrez que MN est parallèle à BC.
d) Trouvez un point D de sorte que ABCD est un parallélogramme.
e) Vérifiez que ABCD est un rectangle.

Solution

Vous pouvez utiliser la géométrie cartésienne pour vérifier les généralisations qui peuvent être tirées de cas précis.

a) $AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Étant donné que $\left(\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$ il s'ensuit que Δ ABC a un angle droit en B.

b) Étant donné que AB = BC, il s'ensuit que le Δ ABC est isocèle.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Trouvez la distance entre (2, 1) et (4, 3).
2. Trouvez les coordonnées du point milieu du segment joignant (2, 1) et (4, 3).
3. Trouvez la pente de $3x - 4y + 12 = 0$.
4. Trouvez la pente de la droite joignant (3, –1) et (5, –5).

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçon 10

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-3 vérifier et établir des propositions en géométrie plane à l'aide de la géométrie cartésienne – *suite*

· **utiliser les concepts de pente, de point milieu et les formules de distance pour vérifier ou démontrer les propositions ayant trait aux triangles, quadrilatères et cercles** (suite)

c) Point milieu M = $\left(\frac{-1+10}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

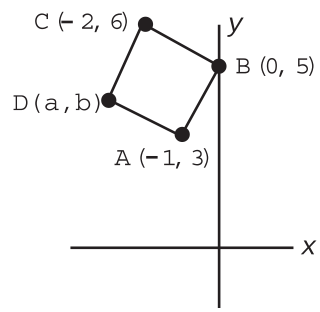
Point milieu N = $\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Pente $m_{MN} = \dfrac{\frac{9}{2} - 4}{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-1} = -\dfrac{1}{2}$

Pente $m_{BC} = \dfrac{6-5}{-2-0} = \dfrac{1}{-2}$

Étant donné que $m_{MN} = -\frac{1}{2} = m_{BC}$, il s'ensuit que MN // BC.

d) Pour être un parallélogramme, AB = DC et AB // DC. Par conséquent, 5 –3 = 6 – *b* et 0 – (–1) = –2 – *a*, Par conséquent, *b* = 4 et *a* = –3; D(–3, 4).



e) Étant donné que ABCD est un parallélogramme et que ∠ B est un angle droit, il s'ensuit que ABCD est un rectangle.

✔ **Communications** ✔ **Résolution**
Connections Raisonnement
Estimation et Calcul Mental Technologie
✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouvez l'aire du Δ ABC où A(3, 0), B(–1, 2) et C(–4, –3).
2. Démontrez que le quadrilatère ABCD où A(–2, –2), B(–1, 2), C(8, 6) et D(7, 2) est un parallélogramme. Démontrez que ses diagonales ne sont pas de longueur égale.
3. Trouvez la distance entre le point (2, 1) et la droite $2x + 3y = 15$.
4. Le segment de droite de l'équation $y = 2{,}4x$ traverse A(0, 0) et C(5, 12) et a une longueur de 13, et forme un angle de 67,3° avec l'axe horizontal.

   a) Trouvez le lieu géométrique des points B si CB = 10 et AB horizontal.
   b) Vérifiez votre réponse en déterminant les points d'intersection du cercle $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 100$ et de la droite $y = 0$.
   c) Utilisez un diagramme qui convient pour expliquer pourquoi les réponses en a) et en b) sont les mêmes.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-3 vérifier et établir des propostions en géométrie plane à l'aide de la géométrie cartésienne – *suite*

✔ **Communications** | Résolution
Connections | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie
✔ **Visualisation**

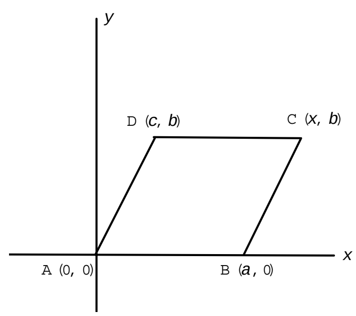
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **utiliser les concepts de pente, de point milieu et les formules de distance pour vérifier ou démontrer les propositions ayant trait aux triangles, quadrilatères et cercles** (suite)

La preuve suivante fait intervenir la géométrie cartésienne pour démontrer un théorème en géométrie plane. Le lien entre ces deux géométries est très important en mathématiques.

Exemple 2

Utilisez le diagramme ci-dessous pour démontrer que les côtés opposés de n'importe quel parallélogramme sont congruents.



Solution

La coordonnée *x* de C doit être déterminée. Étant donné que ABCD est un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.

$\therefore$ pente AD = pente BC

$$\frac{b-0}{c-0} = \frac{b-0}{x-a}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{x-a}$$

$$c = x - a$$

$$a + c = x$$

Pour les deux côtés

AB = $a - 0$
$= a$

$DC = a + c - c$
$= a$

$AD = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2}$
$= \sqrt{c^2 + b^2}$

$BC = \sqrt{\left[(a+c) - a\right]^2 + (b-0)^2}$
$= \sqrt{c^2 + b^2}$

Étant donné que AB = DC et que AD = BC, les côtés opposés de n'importe quel parallélogramme sont congruents.

Pour d'autres démonstrations, voir *Mathématiques pré-calcul Secondaire 3 - Un cours destiné à l'enseignement à distance*, Module 4, Leçon 10.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontrez qu'un quadrilatère qui a une paire de côtés opposés congruents et parallèles est un parallélogramme.
2. Utilisez la géométrie cartésienne pour démontrer que :
   a) les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu;
   b) si ABC est un triangle, et M est le point milieu de AB et N le point milieu de AC, alors MN est parallèle à BC et est la moitié de sa longueur.
3. Utilisez la géométrie cartésienne pour diviser le segment de droite dont les extrémités A(4, 7) et B(–3, 8) en cinq segments congruents.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général
Représenter et analyser des situations qui font intervenir des expressions, des équations et des inéquations

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)
D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
- graphiquement
- algébriquement (élimination et substitution)

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· résoudre des systèmes d'équations linéaires

Un ***système d'équations linéaires*** est un ensemble de deux équations linéaires ou plus qui ont les mêmes variables. La solution du système est l'ensemble de toutes les paires ordonnées qui fait que toutes les équations sont vraies.

Une façon de trouver la solution d'un système d'équations est de représenter graphiquement les équations et de rechercher les points d'intersection. Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système.

Ce qui suit illustre trois types de systèmes d'équations linéaires. Pour chaque type, demandez aux élèves de représenter graphiquement la paire d'équations linéaires dans le même plan cartésien ou d'utiliser la calculatrice à affichage graphique ou les tableaux de valeurs ou $y = mx + b$ pour démontrer qu'il y a trois différents types de systèmes d'équations linéaires.

Type 1 : Systèmes indépendants : Les droites du système ont des pentes différentes, des ordonnées à l'origine différentes et se croisent en un point.

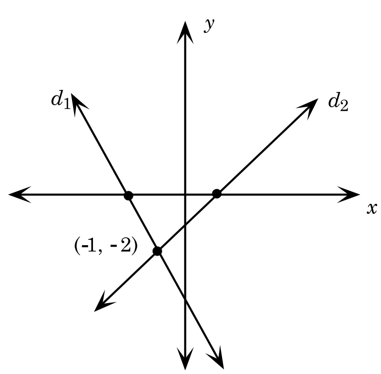
Recherche 1

Représenter graphiquement

$d_1 : x - y - 1 = 0$

$d_2 : 2x + y = -4$

Solution



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçons 3, 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
- graphiquement
- algébriquement (élimination et substitution)

– suite

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **résoudre des systèmes d'équations linéaires**

Type 2 : Systèmes dépendants : Les équations dans le système représentent la même droite. Les équations ont la même pente, la même ordonnée à l'origine, la même droite et un nombre infini de points communs.

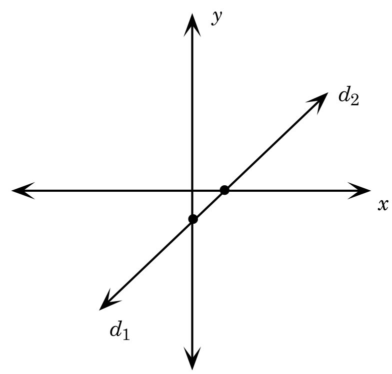
Recherche 2

Représenter graphiquement :

$d_1 : x - y - 1 = 0$

$d_2 : 2x - 2y - 2 = 0$

Solution



Type 3 : Systèmes incompatibles : Les droites sont parallèles. Il en résulte qu'elles ont la même pente et des ordonnées à l'origine différentes. Étant donné que les droites ne se croisent pas, elles n'ont aucune solution ou la solution est l'ensemble vide, $\varnothing$.

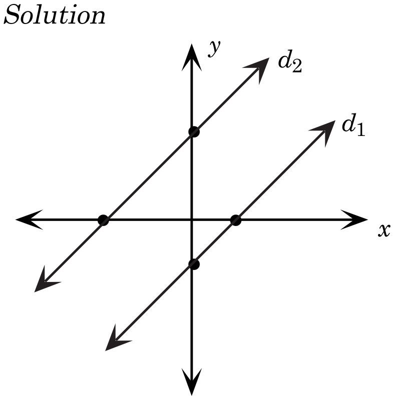
Recherche 3

Représentez graphiquement :

$d_1 : x - y - 1 = 0$

$d_2 : x - y + 2 = 0$

Solution



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Quel point les droites $y = x$ et $y = -x$ ont-elles en commun?
2. Où est-ce que les droites $x = -2$ et $y = 2x$ se croisent?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
· graphiquement
· algébriquement (élimination et substitution)
– *suite*

Communications
✔ **Connections**
Estimation et Calcul Mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **résoudre des systèmes d'équations linéaires** (suite)

Ces trois types de systèmes peuvent se résumer comme suit :
1. Un système compatible d'équations a au moins une solution.
   a) Un système indépendant a une solution unique.
   b) Un système dépendant a un nombre infini de solutions.
2. Un système incompatible d'équations n'a pas de solution.

Compatible		**Incompatible**
Indépendant	**Dépendant**	
Pente différente	Même pente	Même pente
Droites qui se croisent	Même droite	Droites parallèles
Une solution unique	Nombre infini de solutions	Aucune solution

Exemple

Lors d'un match de basketball, votre amie a réussi deux coups de trois points, mais ne pouvait pas se rappeler le nombre de lancers francs (valant un point chacun) et de paniers marqués (valant deux points chacun) qu'elle a réussis. Le pointeur dit qu'elle a marqué 20 fois pour 34 points. Combien de paniers a-t-elle marqués? Combien de lancers francs a-t-elle faits?

Solution

Nombre de lancers francs + nombre de paniers marqués + nombre de lancers à trois points = 20
$\therefore$ Nombre de lancers francs + nombre de paniers marqués = 18

Soit x = nombre de lancers francs
y = nombre de paniers marqués

$x + y = 18$

1 (nombre de lancers francs) + 2 (nombre de paniers marqués) +
3 (nombre de lancers à trois points) = 34

$\therefore 1x + 2y = 28$, étant donné qu'il y a eu 3(2) ou 6 points pour des lancers de trois points

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Comment peut-on utiliser les pentes des droites dans un système de fonctions affines pour dire le type de solution du système?
2. Si les deux droites sont perpendiculaires, de quel type de système s'agit-il?

Problèmes

1. Lièvre met Tortue au défi pour un match revanche de 100 m. Étant donné que Lièvre peut franchir 50 m en 7 secondes tandis que Tortue peut franchir 20 m en 5 secondes, Lièvre a accepté de donner à Tortue une avance de 30 m.
   a) Représentez graphiquement la distance par rapport au temps pour les deux animaux sur le même plan cartésien.
   b) Déterminez qui a gagné la course.
   c) Quelle information le point d'intersection donne-t-il?

2. Déterminez si (1, 6) est l'ensemble solution de

$$\begin{aligned} -3x - y &= -9 \\ 3x - y &= -3 \end{aligned}$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
· graphiquement
· algébriquement (élimination et substitution)
– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
Estimation et Calcul mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **résoudre des systèmes d'équations linéaires** (suite)

Exemple *- suite*

Solution - suite

Systèmes d'équations : $x + y = 18$
$x + 2y = 28$

Solutionnez le système à l'aide de votre calculatrice à affichage graphique et vérifiez algébriquement votre réponse.

$y_1 = -x + 18$

$y_2 = \dfrac{-x + 28}{2}$

Utilisez une calculatrice à affichage graphique :
1. Appuyez sur $\boxed{\text{Y=}}$, et entrez les équations à côté de Y_1 et de Y_2.
2. Reproduisez graphiquement et tracez.
3. Vérifiez à l'aide de : $\boxed{\text{2nd}}$, (CALC), 5: Intersect.

À partir de la représentation graphique :
$x = 8$ lancers francs
$y = 10$ paniers marqués

Vérifiez : $x + y = 18$ $\quad$ $x + 2 = 28$
$8 + 10 = 18$ $\quad$ $8 + 2(10) = 28$

Il est difficile de trouver un point d'intersection précis pour des représentations graphiques dessinées à la main. La solution peut être approximative lorsque vous utilisez une calculatrice graphique. Les deux méthodes algébriques suivantes vous donneront une solution exacte d'un système d'équations linéaires.
1. Élimination par addition ou soustraction
2. Élimination par substitution

· **éliminer par addition ou soustraction**

Utilisez l'exemple ci-dessous pour décrire les étapes suivantes pour résoudre un système
1. Organisez en colonnes les équations ayant des termes semblables.
2. Rendez identiques les coefficients de x ou de y en multipliant chaque terme de l'une ou des deux équations par un nombre approprié.
3. Additionnez ou soustrayez les équations et trouvez la variable qui reste.
4. Remplacez par la valeur obtenue à l'étape 3 dans l'une ou l'autre des équations d'origine et trouvez l'autre variable.
5. Vérifiez la solution dans chacune des équations d'origine.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Est-il possible pour un système de deux équations linéaires d'avoir exactement deux solutions? Justifiez votre réponse.
2. Décrivez une technique autre que la représentation graphique que l'on peut utiliser pour résoudre le système linéaire :

$$x - y + 3 = 0$$
$$y = 2$$

Problèmes

1. Utilisez la technologie graphique pour résoudre le problème suivant :

   La compagnie de téléphone A exige un tarif fixe de 2,50 $ plus 0,50 $ la minute ou portion de minute pour les appels interurbains. La compagnie de téléphone B exige un taux fixe de 1 $ plus 0,75 $ la minute ou portion de minute. Quelle compagnie donne le service le moins couteux?

2. Soit le système

$$3x + 4y = 12$$
$$4x + 3y = 12,$$

   Écrivez chaque équation dans la forme $y = mx + b$.
   En comparant les pentes et les points d'intersection avec les axes des y, déterminez si le système est compatible ou incompatible.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
- graphiquement
- algébriquement (élimination et substitution)

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **éliminer par addition ou soustraction** (suite)

Exemple 1

Solutionnez : $5x + 4y = 6$
$-3y - 2x = -1$

Solution

Réorganisez de façon à ce que les mêmes variables soient dans les mêmes colonnes :

$5x + 4y = 6$ Équation 1
$-2x - 3y = -1$ Équation 2

Multipliez les deux équations par un nombre approprié afin d'éliminer l'une des variables.

Multipliez par 3 : $5x + 4y = 6 \rightarrow$ $15x + 12y = 18$
Multipliez par 4 : $-2x - 3y = -1 \rightarrow$ $-8x - 12y = -4$

$7x = 14$ Additionnez les équations
$x = 2$

Vérifiez

Substituez par $x = 2$ dans l'une ou l'autre des équations

$$
\begin{aligned}
5x + 4y &= 6 \\
5(2) + 4y &= 6 \\
10 + 4y &= 6 \\
4y &= -4 \\
y &= -1
\end{aligned}
$$

La solution est (2, –1).

Remarque : Vous auriez pu multiplier l'équation 1 par 2 et l'équation 2 par 5 et vous auriez obtenu

$$
\begin{aligned}
10x + 8y &= 12 \\
-10x - 15y &= -5 \\
\hline
-7y &= 7 && \text{Additionnez} \\
y &= -1 && \text{Simplifiez} \\
\text{et } x &= 2
\end{aligned}
$$

Il y a exactement une solution. Cela signifie qu'il s'agit d'un système indépendant.

Communications ✔ **Résolution**
✔ **Connections** Raisonnement
Estimation et Calcul mental ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
- graphiquement
- algébriquement (élimination et substitution)

– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
Estimation et Calcul mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **éliminer par addition ou soustraction** (suite)

Exemple 2

Solutionnez :

$x - 2y = 3$ Équation 1
$-2x + 4y = 1$ Équation 2

Solution

Pour illustrer une autre possibilité, multipliez l'équation 1 par -2.

$$\begin{array}{lll} x - 2y = 3 \longrightarrow & -2x + 4y = -6 & \\ -2x + 4y = 1 & \underline{-2x + 4y = 1} & \text{Soustrayez} \\ & 0 = -7 & \end{array}$$

Remarquez que cela donne lieu à une fausse équation et nous concluons qu'il n'y a aucune solution au système s'il n'y a aucune solution « vraie ». Cela signifie que les droites sont parallèles; elles ne se croisent jamais. Le système est incompatible.

Certains systèmes linéaires ont infiniment plus de solutions tel qu'on l'indique dans l'exemple suivant.

Exemple 3

Solutionnez :

$9x + 6y = 48$ Équation 1
$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 4$ Équation 2

Solution

Éliminez les fractions en multipliant l'équation 2 par 4. Alors, multipliez l'équation 2 par 3.

$$\begin{array}{llll} & 9x + 6y = 48 \longrightarrow & 9x + 6y = 48 & \\ \text{Multipliez par 3 :} & 3x + 2y = 16 \longrightarrow & \underline{9x + 6y = 48} & \text{Soustrayez} \\ & & 0 = 0 & \end{array}$$

0 = 0 est une équation qui est toujours vraie. Cela illustre que n'importe quelle valeur (x, y) qui résout la première équation fait que la seconde est vraie. Étant donné que les équations représentent la même droite, il y a un nombre infini de solutions.

> Lorsque vous solutionnez un système par addition ou soustraction, vous pourriez devoir multiplier chacune des équations par un nombre différent avant de pouvoir éliminer l'une des variables.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. X et Y sont des angles supplémentaires. La mesure de X est $\frac{2}{5}$ de la mesure de Y. Quelle est la mesure de chaque angle?
2. Un capital de 42 000 $ est investi en partie à 7 % et en partie à 9,5 %. Si l'intérêt est de 3 700 $, combien est investi à chaque taux d'intérêt?
3. Si (2, –7) et (–1, 2) appartiennent à la fonction quadratique $y = -x^2 + bx + c$, quelles sont les valeurs de b et de c?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-4 résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux variables :
· graphiquement
· algébriquement (élimination et substitution)
– *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
Estimation et Calcul mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

· éliminer par substitution

Suivez ces étapes pour résoudre un système en utilisant l'élimination par substitution.

1. Solutionnez l'une des équations pour l'une de ses variables.
2. Substituez cette expression dans l'autre équation et trouvez l'autre variable.
3. Mettez cette valeur dans l'une ou l'autre des équations et solutionnez.
4. Vérifiez la solution dans chacune des équations d'origine.

Exemple

Solutionnez à l'aide de la méthode de substitution.

$4x + y = 1$ Équation 1

$2x - 3y = 4$ Équation 2

Solution

Solutionnez la première équation pour y parce que le coefficient de y est 1. (Vous pourriez également résoudre à la place pour x.)

$y = 1 - 4x$ Équation 1 révisée

Substituez l'équation 1 révisée à l'équation 2 :

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 2x - 3(1 - 4x) &= 4 \quad \text{Substituez } y = -4x + 1 \\ 3x - 3 + 12x &= 4 \quad \text{Simplifiez} \\ 14x &= 7 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour trouver y, substituez dans l'autre équation

$$\begin{aligned} 4x + y &= 1 \\ 4\left(\frac{1}{2}\right) + y &= 1 \\ 2 + y &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Réponse : $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Les graphiques de $ax + by = 13$ et de $ax - by = -3$ se croisent à (1, 4). Trouvez a et b.
2. La longueur de chacun des côtés congruents d'un triangle isocèle est 1½ la longueur de la base. Le périmètre du triangle est de 60 cm. Trouvez la longueur de chaque côté du triangle isocèle.
3. Trouvez la solution du système :

$$-\frac{1}{2}x + y = 4$$
$$x + 2y = 8$$

4. Déterminez A et B de sorte que la représentation graphique de $Ax + By = 13$ contienne les points (1, 3) et (4, –1).
5. Solutionnez : $\frac{6}{u} + \frac{3}{v} = 2$

$$\frac{2}{u} - \frac{9}{v} = 4$$

6. Un hôtel compte 160 chambres, certaines simples et certaines doubles. Toutes les chambres simples coûtent 45 $ chacune et les chambres doubles, 60 $ chacune. En raison d'un tournoi de curling, toutes les chambres sont occupées. Le total pour cette nuit est de 8 700 $. Combien y a-t-il de chambres de chaque type dans l'hôtel?

Inscriptions au journal

1. Quand est-il plus pratique d'utiliser la méthode de la substitution?
2. Expliquez comment vous décideriez d'utiliser la substitution ou l'élimination pour résoudre un système d'équations linéaires.
3. Décrivez ce qui se produit lorsque vous essayez de résoudre un système incompatible 2×2 par
   a) représentation graphique
   b) élimination
   c) technologie graphique

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 résoudre des systèmes d'équations linéaires à trois variables :
- · algébriquement
- · à l'aide de la technologie

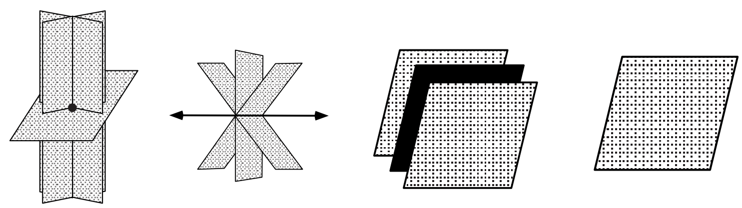
Communications | ✔ **Résolution**
✔ **Connections** | Raisonnement
Estimation et Calcul mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· résoudre des systèmes d'équations linéaires à trois variables

Dans un système 2 × 2, la représentation graphique de $Ax + By = C$ sur un plan cartésien est une droite. Dans un système 3 × 3 (3 équations à trois variables), la représentation graphique de $Ax + By + Cz = D$ est un plan dans l'espace des coordonnées. L'espace des coordonnées comporte trois axes, tous perpendiculaires l'un à l'autre. La solution du système est l'intersection des trois plans.

Il y a 4 possibilités :
1. Ils pourraient se croiser à un point commun que l'on appelle ***triple ordonnée*** (x, y, z).
2. Ils pourraient se croiser à une droite commune.
3. Ils pourraient n'avoir aucun point en commun.
4. Ils pourraient coïncider.



a) une solution unique $P(x, y, z)$ b) une solution de points sur une droite c) aucune solution d) une solution de tous les points sur un plan

On peut utiliser l'élimination ou la substitution pour résoudre un système linéaire de trois équations à trois variables.

Exemple 1

Trouvez x, y et z.

$x + y - z = 2$	Équation 1
$x - 2y + z = -1$	Équation 2
$3x + y - 2z = 4$	Équation 3

Solution

Demandez aux élèves d'indiquer l'opération qui est réalisée à côté de la ligne appropriée (voir ci-dessous).

Équation 1 + Équation 2 :	$2x - y = 1$	Équation 4
2 × Équation 2 :	$2x - 4y + 2z = -2$	Équation 5
Équation 3 + Équation 5 :	$5x - 3y = 2$	Équation 6
3 x Équation 4 :	$6x - 3y = 3$	Équation 7
Équation 6 – Équation 7 :	$-x = -1$	

Par conséquent, $x = 1$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Joanne a 32 pièces de monnaie, soit des pièces de 5 cents, de dix cents et de 25 cents. La somme du nombre de pièces de 5 cents et du nombre de pièces de 25 cents est trois fois plus élevée que le nombre de pièces de dix cents. Si la valeur des pièces de monnaie est 4,60 $, combien a-t-elle de pièces de chaque sorte?

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçon 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 résoudre des systèmes d'équations linéaires à trois variables :
- algébriquement
- à l'aide de la technologie

– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **résoudre des systèmes d'équations linéaires à trois variables** (suite)

Exemple 1 *- suite*

Solution - suite

Substituez $x = 1$ dans l'équation 4 : $2 - y = 1$

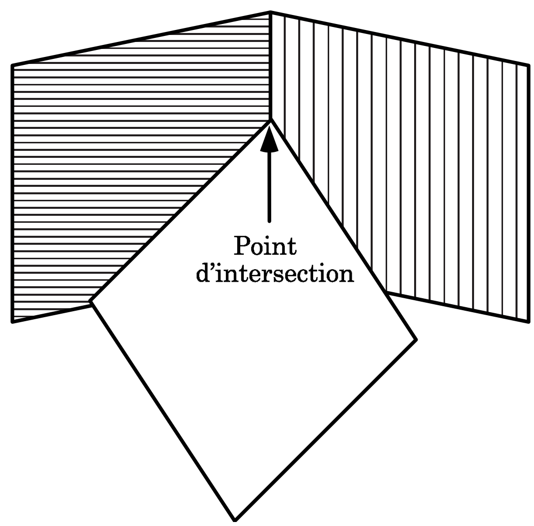
$\therefore y = 1$

Substituez $x = 1$ et $y = 1$ dans l'équation 1 : $1 + 1 - z = 2$

$\therefore\ z = 0$

La solution est (1, 1, 0).

Faites remarquer aux élèves que la représentation graphique de chacune des trois équations 1, 2 et 3 est un plan. L'intersection des plans 1 et 2 est une droite, et l'intersection des plans 3 et 2 est une autre droite étant donné que deux plans qui ne sont pas parallèles se croisent dans une droite. L'intersection de ces deux droites donne un point qui a pour coordonnées (1, 1, 0). Voici une illustration :



Dans cet exemple, les trois plans se croisent au point (1, 1, 0).

Communications	✔ **Résolution**
✔ **Connections**	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. La somme de la longueur, de la largeur et de la hauteur d'une boîte est 80 cm. La longueur est 10 cm de moins que le double de la somme de la largeur et de la hauteur, et le double de la largeur dépasse la hauteur de 6 cm. Trouvez la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte.
2. La somme de 3 nombres est 12. Le deuxième nombre est égal à la somme du premier et du troisième. Le double du premier nombre dépasse le deuxième de 4. Trouvez les nombres.
3. Écrivez l'équation d'une parabole qui traverse (1, -2), (-1, 0) et (3, 12). Écrivez votre réponse sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.
4. Écrivez l'équation d'un cercle qui traverse les points A(1, 2), B(3, 1) et C(-3, -1). Écrivez votre réponse sous la forme $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$.
5. Le revenu total, R, est une fonction quadratique du prix, p, des livres vendus. Donc $R = ap^2 + bp + c$. Trouvez la valeur de a, de b et de c si le produit est 6 000 $ quand le prix est de 30 $, 5 000 $ quand le prix est de 40 $ et 5 000 $ à un prix de 50 $.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

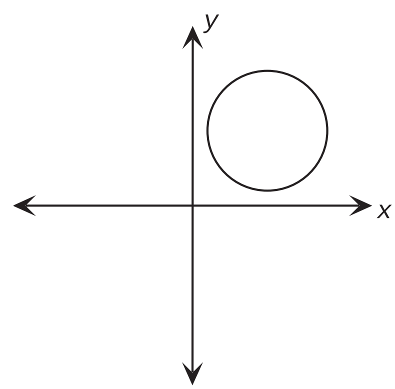
D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· identifier graphiquement les équations du second degré

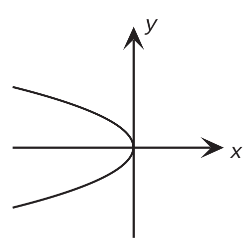
La représentation graphique d'une équation du second degré est ce que l'on appelle une ***conique***. Diverses représentations graphiques pourraient donner une équation du second degré tel qu'il est illustré ci-dessous.

Cercle

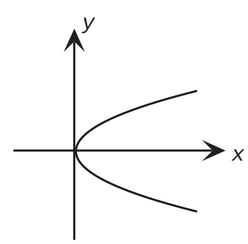


Paraboles

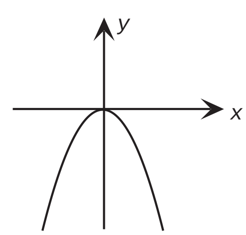
a)



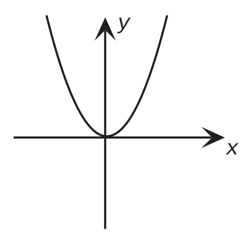
b)



c)



d)



Communications	✔ **Résolution**
✔ **Connections**	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
-Module 4, Leçon 7

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

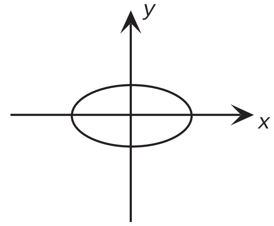
Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

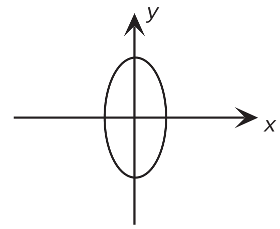
· **identifier graphiquement les équations du second degré** (suite)

Ellipses

a)

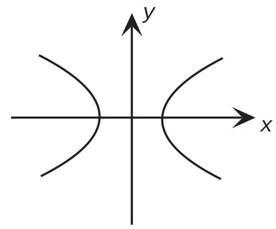


b)

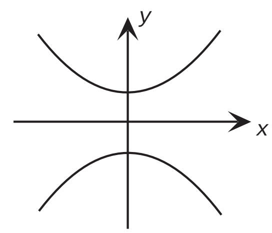


Hyperboles

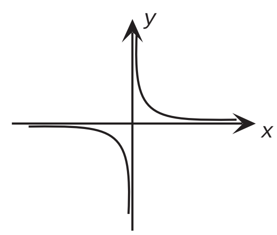
a)



b)



c)



· **explorer des systèmes quadratiques-linéaires**

Un système d’équations quadratique-linéaire comprend une équation de l'une des sections coniques et d'une équation linéaire. La solution de deux équations à deux variables correspond toujours à un point d'intersection de leurs représentations graphiques.

Recherche

Dessinez plusieurs croquis différents illustrant les intersections d'une droite et d'une parabole qui donnent lieu à des nombres différents de points d'intersection. Combien de points d'intersection sont possibles pour une droite et une parabole?

Répétez ce processus pour une droite et un cercle, pour une droite et une ellipse, et une pour une droite et une hyperbole.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des systèmes quadratiques-linéaires** (suite)

Utilisez votre calculatrice graphique pour vérifier vos conclusions dans vos dessins faits à la main.

Si le système comporte un terme faisant intervenir y^2, vous aurez besoin de trouver y et d'entrer deux équations pour cette section conique dans la fonction Y = de la calculatrice. Par exemple,

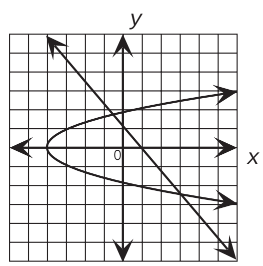
$$x^2 + y^2 = 4$$
$$Y_1 = -\sqrt{4 - x^2}$$
$$Y_2 = +\sqrt{4 - x^2}$$

Un système quadratique-linéaire peut avoir 0, 1 ou 2 solutions réelles. Comme dans le cas de systèmes d'équations linéaires, vous pouvez trouver des solutions approximatives en représentant graphiquement, ou trouver les solutions exactes de façon algébrique.

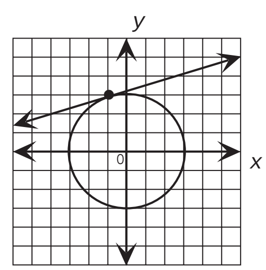
Exemple

Identifiez le nombre de solutions dans chaque système.

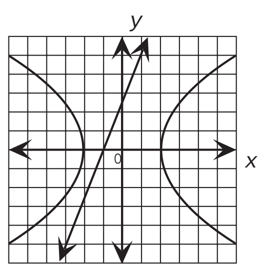
a)



b)



c)



Solution

a) deux solutions parce qu'il y a deux points d'intersection
b) une solution parce qu'il y a un point d'intersection
c) aucune solution parce que les graphiques ne se croisent pas

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouvez l'ensemble solution de

   $2x^2 + y = 1$
   $2x + y - 4 = 0$

   Interprétez le résultat.

2. La droite $x + y = 5$ croise le cercle $x^2 + y^2 = 17$ en deux points, A et B. Trouvez la longueur du segment de droite AB.

3. Trouvez la solution du système

   $y = \frac{1}{2}x$

   $y = \sin x$

4. La somme de deux nombres est 27. Leur produit est 126. Quels sont les deux nombres?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

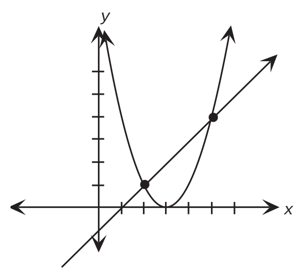
· **explorer des systèmes quadratiques-linéaires** (suite)

Exemple 2

Solutionnez : $y = x - 1$
$y = x^2 - 6x + 9$

Solution

a) Représentez graphiquement



Soit (2, 1) et (5, 4).

Vérifiez : $y = 5 - 1 = 4$
$y = 25 - 6(5) + 9 = 4$
$\therefore$ (5, 4) est sur la courbe
et $y = 2 - 1 = 1$
$y = 2^2 - 6(2) + 9 = 1$
$\therefore$ (2, 1) est sur la courbe

b) Résolvez algébriquement.

En substituant : $x - 1 = x^2 - 6x + 9$
$0 = x^2 - 7x + 10$
$0 = (x - 5)(x - 2)$
et $y = 5 - 1 = 4$ ou $y = 2 - 1 = 1$

Solution : (5, 4) ou (2, 1)

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Solutionnez : $x^2 + y^2 = 25$
   $7y - x = 25$

   Dans l'équation linéaire exprimez x en termes de y, puis substituez cette expression dans la première équation.

2. L'aire d'un rectangle est 120 cm^2 et son périmètre est 44 cm. Trouvez les dimensions de la figure.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

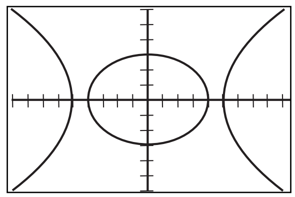
Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

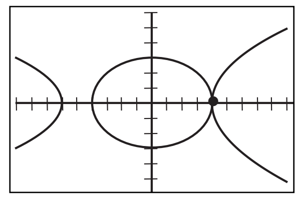
· **explorer des systèmes quadratiques-quadratiques**

Un système de deux sections coniques ou relations quadratiques ou plus est un ***système quadratique-quadratique***. Un système quadratique-quadratique peut avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions réelles tel qu'il est illustré dans les diagrammes suivants.

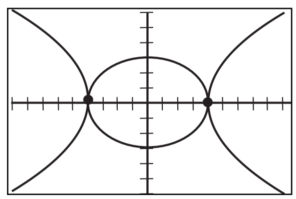
Aucune solution



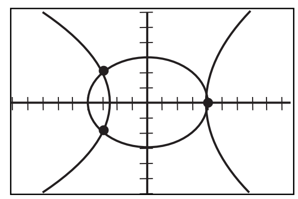
1 solution



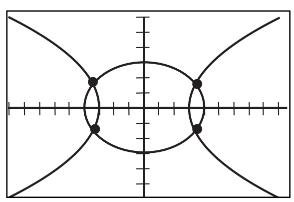
2 solutions



3 solutions



4 solutions



On peut les résoudre graphiquement ou algébriquement, en n'oubliant pas que les représentations graphiques pourraient donner des solutions approximatives tandis que les solutions algébriques sont exactes.

Exemple 3

Résolvez a) par représentation graphique et b) algébriquement.

$x^2 - y^2 = 5$

$xy + 6 = 0$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

La somme des carrés de deux nombres positifs est 6,5. La différence de leurs carrés est 33. Quels sont ces deux nombres?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et Calcul mental	✔ **Technologie**
	✔ **Visualisation**

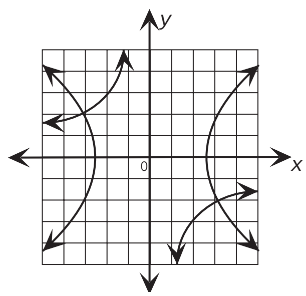
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des systèmes quadratiques-quadratiques** (suite)

Exemple 3 *- suite*

Solution

Vous pouvez utiliser un tableau de valeurs ou une calculatrice graphique pour obtenir la représentation graphique s'y rattachant.



a) Les points d'intersection sont à (–3, 2) et (3, –2).

b) Algébriquement :

$x^2 - y^2 = 5$

$xy + 6 = 0$

Solutionnez la deuxième équation pour y :

$xy = 6$

$y = \dfrac{-6}{x}$

Substituez $\dfrac{-6}{x}$ à y dans la première équation.

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$x^2 - \left(\frac{-6}{x}\right)^2 = 5$$

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \qquad \text{Solutionnez}$$

$$(x^2 - 9)x^2 + 4) = 0$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-6 Résoudre un système d'équations non linéaires en utilisant la technologie selon le cas
– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

· **explorer des systèmes quadratiques-quadratiques** (suite)

Exemple 3 *- suite*

Solution - suite

Étant donné que $x^2 + 4$ n'a aucune racine réelle, alors

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = +3 \text{ ou } -3$$

Substituez les valeurs de x dans $y = \frac{-6}{x}$.

Si $x = 3$

$$y = \frac{-6}{3}$$

$$y = -2$$

Si $x = -3$

$$y = \frac{-6}{-3}$$

$$y = 2$$

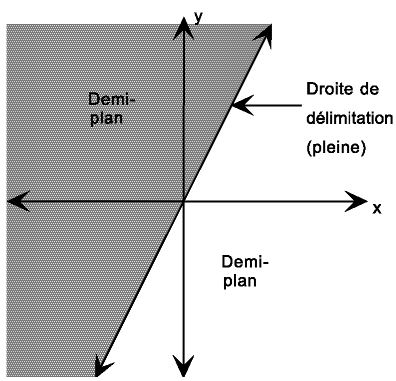
La solution est à (3, -2) et à (-3, 2). Remarquez que ceci correspond à la représentation graphique.

D-7 représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul mental	✔ **Visualisation**

· **explorer des systèmes d'inéquations linéaires**

Des énoncés tels « Je veux trouver un emploi qui paie davantage que le salaire minimal » ou « Je dois dépenser moins de 10 $ cette semaine » sont des exemples d'énoncés d'inégalités.



La représentation graphique d'une droite sépare le plan en trois régions distinctes : deux demi-plans et la droite elle-même. La droite elle-même est la droite de délimitation de chaque demi-plan. Elle divise le plan des coordonnées en deux demi-plans.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Résolvez algébriquement par substitution ou addition-soustraction.

$$x^2 + 4y^2 = 49$$
$$2x^2 - 3y^2 = -12$$

2. Le produit de deux nombres positifs est 8. La somme de leurs inverses est $\frac{3}{4}$. Quels sont les deux nombres?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables
– *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Connections Raisonnement
Estimation et Calcul Mental Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

· **explorer des systèmes d'inéquations linéaires** (suite)

Une ***inéquation linéaire*** en x et en y peut s'écrire de l'une des façons suivantes : $ax + by < c$, $ax + by \le c$, $ax + by > c$, $ax + by \ge c$. Une paire ordonnée (x, y) est une solution d'une inéquation si l'inéquation demeure vraie lorsqu'on substitue des valeurs de x et y.

Par exemple, (4, 0) est une solution à $y > -2x + 4$ parce que 0 est plus grand que $-2(4) + 4 = -4$.

Remarque : Lorsque vous multipliez ou divisez les deux côtés d'une inégalité par un nombre négatif, le signe d'inégalité est inversé. Par exemple,

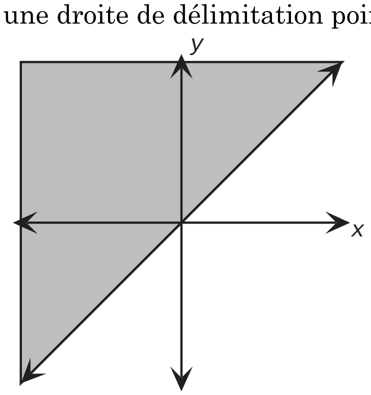
$$4x - y < 6$$
$$-y < -4x + 6$$
$$y > 4x - 6$$

Ceci illustre l'inversion lorsque chaque côté est multiplié par -1.

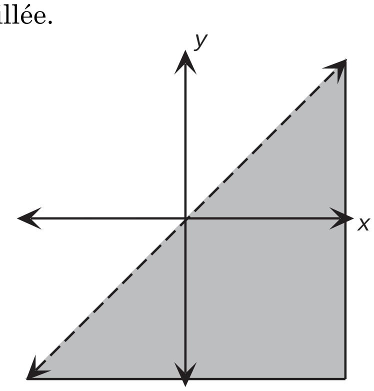
Une inéquation linéaire a une ***droite frontière*** qu'on peut exprimer sous la forme $y = mx + b$. La solution d'une inéquation linéaire est l'ensemble de toutes les paires ordonnées qui rendent l'inégalité vraie.

Lorsque l'inégalité est ≤ (lire « inférieure ou égale à ») ou ≥ (lire « supérieure ou égale à ») la solution inclut les points sur la droite de délimitation et la représentation graphique a une droite de délimitation pleine (tel qu'illustré ci-dessous).

Lorsque l'inégalité est < ou >, la solution n'inclut pas les points sur la droite de délimitation et la représentation graphique a une droite de délimitation pointillée.



≥ solution



< solution

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
– Module 4, Leçon 8

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-7 représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables
– *suite*

· **explorer des systèmes d'inéquations linéaires** (suite)

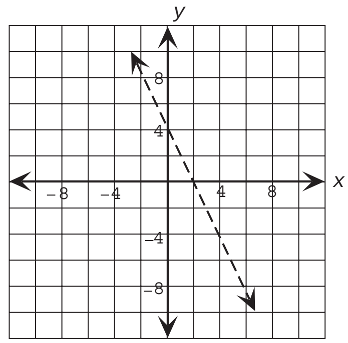
Exemple 1

Représentez graphiquement $2x + y < 4$.

Solution

La droite de délimitation est $2x + y = 4$. Vous pouvez représenter graphiquement la droite en la transformant en $y = -2x + 4$. Utilisez la forme pente ordonnée à l'origine, $b = 4$, et la pente -2.

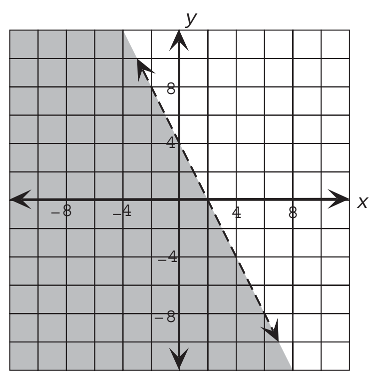
Utilisez une droite pointillée pour illustrer que les points sur la droite ne sont pas les solutions de $2x + y < 4$.



Pour déterminer quel demi-plan est la solution, choisissez un point de chacun des demi-plans et voyez quelle paire ordonnée rend l'inégalité vraie. Un bon point de vérification est l'origine (0, 0) en autant que la droite de délimitation ne traverse pas ce point.

(0, 0) du côté gauche	(4, 0) du côté droit
$y < -2x + 4$	$y < -2x + 4$
$0 < -2(0) + 4$	$0 < -2(4) + 4$
$0 < 4$ Vrai	$0 < -4$ Faux

Étant donné que le point de vérification (0, 0) rend l'inégalité vraie, ombrez le demi-plan dans lequel se trouve ce point.



– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Décrivez la représentation graphique d'un système d'inéquations linéaires ayant des solutions contenues dans une région délimitée.
2. Est-il possible pour un système d'inéquations linéaires de n'avoir aucune solution? Expliquez.

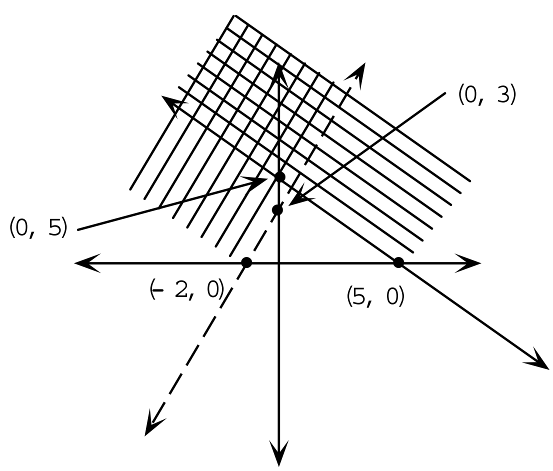
Problèmes

1. On décrit une cible en termes de coordonnées (x, y) où x et y sont mesurées en mètres. Toutes les indications suivantes sont vraies :
   $x \leq 6$
   $y \geq 7$
   (x, y) est dans le premier quadrant.
   $x + y \leq 10$
   Quelle est la forme et l'aire de la cible?

2. Représentez graphiquement le système :

$$\begin{aligned} x &< 0 \\ y &> 0 \\ 2x + 3y &< 12 \\ 2x - y &< 6 \end{aligned}$$

3. Soit la représentation graphique suivante, écrivez les inéquations algébriques la décrivant.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

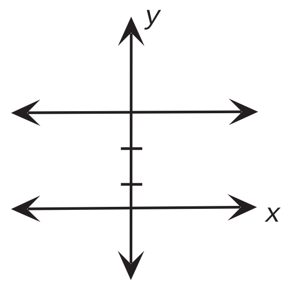
· **explorer des systèmes d'inéquations linéaires** (suite)

Exemple 2

Représentez graphiquement
$y - 3 \geq 0$

Solution

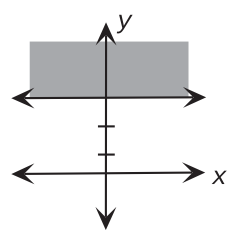
La droite de délimitation est $y = 3$. Il s'agit d'une droite horizontale. Utilisez une droite pleine pour illustrer que les points sur la droite sont des solutions à $y - 3 \geq 0$.



Pour déterminer le demi-plan qui est la solution, choisissez un point dans chaque demi-plan et voyez quelle paire ordonnée rend l'inégalité vraie.

(1, 5) au-dessus de la droite	(0, 0) au-dessous de la droite
$y - 3 \geq 0$	$y - 3 \geq 0$
$5 - 3 = 2$	$0 - 3 = -3$
$2 \geq 0$ Vrai	$-3 \geq 0$ Faux

Par conséquent, ombrez au-dessus de la droite.



Deux inéquations linéaires ou plus sur le même plan cartésien composent un ***système d'inéquations linéaires.***

L'ensemble de solutions du système est la région de points dont les coordonnées satisfont chaque inéquation du système. Le processus suivant peut vous aider à esquisser la représentation graphique d'un système d'inéquations linéaires.

1. Dessinez la droite qui correspond à chaque inéquation. Il est utile de mettre la droite sous la forme $y = mx + b$. Utilisez une droite pointillée pour les inéquations $<$ ou $>$ et une droite pleine pour les inéquations $\leq$ ou $\geq$.
2. Ombrez légèrement le demi-plan qui est la représentation graphique de chaque inéquation linéaire. Si vous ombrez à l'aide d'un crayon couleur ou si vous ombrez de façon différente, cela peut vous aider à distinguer entre les demi-plans différents.
3. Deux représentations graphiques sont possibles pour un système d'inéquations :
   a) Intersection (**et**)
   b) Union (**ou**)

– *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Connections	Raisonnement
Estimation et Calcul mental	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Est-ce que la paire ordonnée (–2, 1) est une solution de $2x - 3y \geq 6$?

Problème

Représentez graphiquement $x \geq 3$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

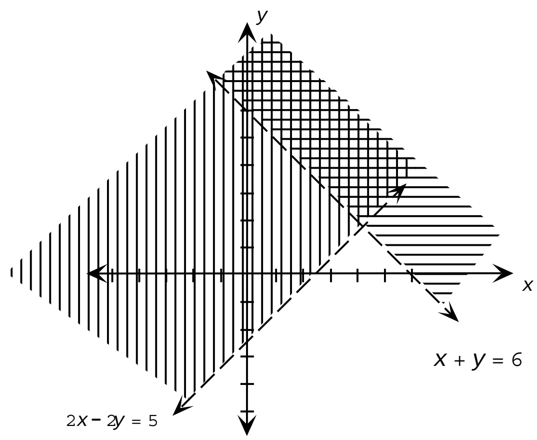
D-7 représenter graphiquement des inéquations linéaires à deux variables
– *suite*

· **explorer des systèmes d'inéquations linéaires** (suite)

Exemple 3 (Intersection)

Représentez graphiquement le système $x + y > 6$ **et** $2x - 2y < 5$.

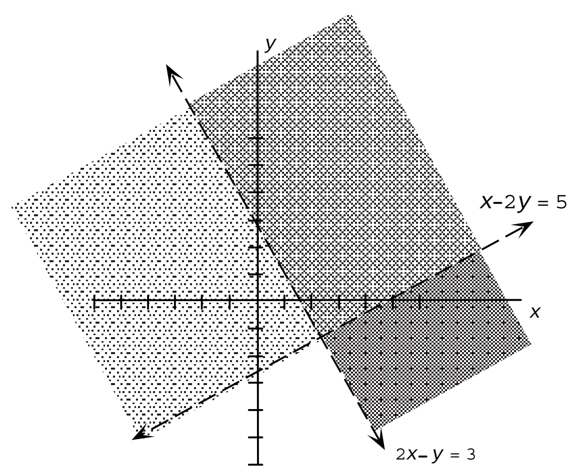
Solution



La solution est la région quadrillée.

Exemple 4 **(Union)**

Représentez graphiquement le système $x - 2y < 5$ **ou** $2x + y > 3$.



La solution est toute la région ombrée.

Une fois que les élèves ont pratiqué la représentation graphique crayon et papier des inéquations, ils peuvent commencer à utiliser des calculatrices pour vérifier les solutions.

Communications
Connections
Estimation et Calcul mental
✔ **Résolution**
Raisonnement
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue

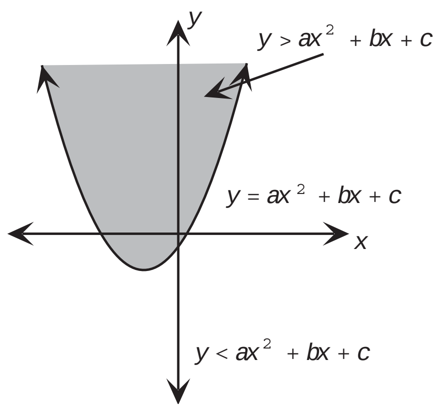
STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations quadratiques en faisant une représentation graphique papier-crayon et en utilisant une calculatrice à affichage graphique**

Les quatre types d'inéquations quadratiques sont les suivants :

$y < ax^2 + bx + c$ $\quad$ $y \leq ax^2 + bx + c$

$y > ax^2 + bx + c$ $\quad$ $y \geq ax^2 + bx + c$



Les étapes faites pour tracer la représentation graphique d'une inéquation quadratique sont les suivantes :

1. Esquissez la représentation graphique de la parabole $y = ax^2 + bx + c$. Utilisez une parabole pointillée pour les inégalités avec < ou > ou une parabole pleine pour les inégalités avec ≤ ou ≥.
2. Vérifiez un point à l'intérieur et un point à l'extérieur de la parabole.
3. Seulement un des points de vérification sera une solution. Ombrez la région qui contient le point de vérification.

Exemple 1

Esquissez la représentation graphique de $y \geq x^2 - 2x - 8$.

Solution

La parabole a son sommet à $x = \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-2)}{2(1)} = 1$.

Substituez $x = 1$ à $y = x^2 - 2x - 8$

$$\begin{aligned} &= 1^2 - 2(1) - 8 \\ &= 1 - 2 - 8 \\ &= -9 \end{aligned}$$

Sommet : (1, –9)

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul secondaire 3, Cours destiné à l'enseignement à distance
- Module 4, Leçon 9

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations quadratiques en faisant une représentation graphique papier-crayon et en utilisant une calculatrice à affichage graphique** (suite)

Exemple 1 - suite

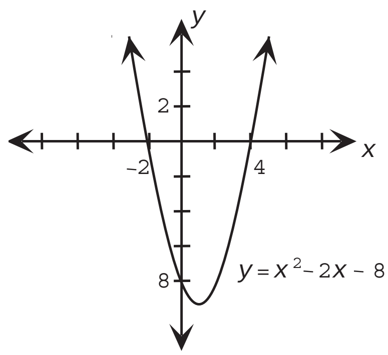
Solution - suite

Zéros : $x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = 4$ ou $x = -2$

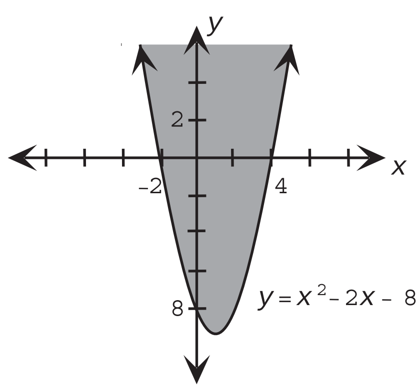
Tracez l'esquisse à l'aide d'une courbe pleine pour la parabole.



Choisissez un point à l'intérieur de la parabole et un point à l'extérieur, puis vérifiez

(0, 0) (intérieur)	(5, 0) (extérieur)
$y \ge x^2 - 2x - 8$	$y \ge x^2 - 2x - 8$
$0 \ge 0 - 2(0) - 8$	$0 \ge 5^2 - 2(5) - 8$
$0 \ge -8$ vrai	$0 \ge 7$ faux

La région contenant (0, 0) doit être ombrée en tant que représentation graphique de l'inéquation.



– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Expliquez la différence entre la représentation graphique de la solution de $x^2 - 4x - 5 < 0$ et la représentation graphique de la solution de $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations quadratiques en faisant une représentation graphique papier-crayon et en utilisant une calculatrice à affichage graphique** (suite)

Exemple 1** - **suite

Solution - suite

Calculatrice à affichage graphique T1-83

Utilisez la calculatrice à affichage graphique, le réglage de la fenêtre appropriée et la caractéristique d'ombrage pour répondre.

a) Pour quelles valeurs de x est-ce que $f(x) > 0$?
b) Pour quelles valeurs de x est-ce que $f(x) < 0$?

Procédures

1. Entrez l'équation dans la fenêtre Y=

   X, T, θ, *n* | x^2 | – | 2 | X, T, θ, *n* | – | 8

2. Appuyez sur WINDOW.

   Créez une fenêtre conviviale en réglant vos valeurs de x comme suit :
   $X_{min} = -9,4$
   $X_{max} = 9,4$

3. Appuyez sur GRAPH.

4. Ombrez votre représentation graphique.

a) Appuyez sur Y=. Utilisez votre flèche gauche pour mettre en surbrillance la droite \ à la gauche de Y_1. Appuyez alors sur ENTER ENTER jusqu'à ce que le marqueur clignote vers le haut ◥, c'est-à-dire un triangle rectangle pointant vers le haut. Appuyez sur GRAPH. Votre représentation graphique sera ombrée pour $f(x) > 0$.

b) Appuyez sur Y=. Mettez en surbrillance la droite \ à la gauche de Y_1.
Appuyez sur ENTER une fois que le marqueur clignote vers le bas ◣, c'est-à-dire qu'un triangle rectangle pointe vers le bas. Appuyez sur GRAPH. Votre représentation graphique sera ombrée pour $f(x) < 0$.

c) Appuyez sur TRACE et trouvez pour quelles valeurs de x, $f(x) > 0$.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **énoncer une solution algébrique d'une inéquation en utilisant un diagramme des signes**

Étapes pour créer un diagramme des signes de la fonction :

1. Déterminez les zéros de la fonction et marquez-les sur une droite numérique.
2. Utilisez des points vides pour les inégalités avec < ou >.
3. Utilisez des cercles pleins pour des inégalités avec ≤ ou ≥.
4. Vérifiez une valeur de x pour chacun des intervalles déterminés par les zéros afin de déterminer le signe de chaque facteur.
5. Déterminez les intervalles pour lesquelles les valeurs sont vraies.

Exemple 1

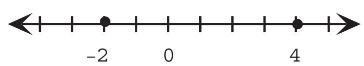
Solutionnez $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

Solution

Trouvez et marquez les zéros : $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

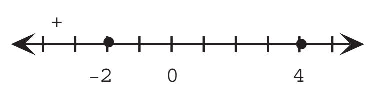
Les zéros sont –2 et 4.



Déterminez les signes en vérifiant une valeur de x dans chaque intervalle.

Intervalle : $x \leq -2$ ou $]-\infty, -2]$. Vérifiez $x = -3$.

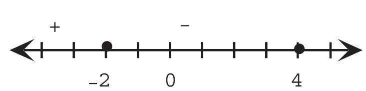
$$f(x) = (x + 2)(x - 4)$$
$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 4)$$



$$\underbrace{(-)\qquad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle : $-2 \leq x \leq 4$ ou $[-2, 4]$. Vérifiez $x = 0$.

$$f(x) = (x + 2)(x - 4)$$
$$f(0) = (0 + 2)(0 - 4)$$



$$\underbrace{(+)\qquad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(-)}_{\text{Signe du produit}}$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Dessinez les diagrammes de signes pour

a) $(x - 2)(x - 5) < 0$

b) $(x - 3)(x - 6) > 0$

c) $x^2 - 9 < 0$

Problèmes

1. La population mondiale augmente de 2 % par année. La production mondiale de nourriture peut subvenir à 200 millions de personnes de plus par année. En 1987, la population était de 5 milliards et la production de nourriture pouvait subvenir à 6 milliards de personnes. La croissance de la population peut être modélisée par l'équation $P_1 = 5(1{,}02)^n$, la production de nourriture étant modélisée par $P_2 = 0{,}2n + 6$. La variable n est le nombre d'années après 1987.
   a) Quand est-ce que $P_1 = P_2$?
   b) Si $P_1 > P_2$ est vraie, quand est-ce que cela survient et de quelle façon est-ce que cette inégalité est interprétée?
2. Résolvez : $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$.
3. Résolvez : $-4x^2 - x + 3 \geq 0$.

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

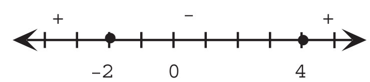
· **énoncer une solution algébrique d'une inéquation en utilisant un diagramme de signes** (suite)

Exemple 1 - suite

Solution - suite

Intervalle : $x \geq 4$ ou $[4, \infty[$. Vérifiez $x = 5$

$$f(x) = (x + 2)(x - 4)$$
$$f(5) = (5 + 2)(5 - 4)$$

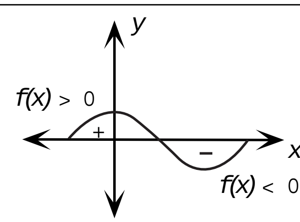


$$\underbrace{(+)\qquad(+)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

La fonction quadratique $(x + 2)(x - 4)$ est positive ou nulle dans l'intervalle $]-\infty, -2]$ et dans l'intervalle $[4, \infty[$. La solution est alors tous les nombres réels dans l'intervalle $]-\infty, -2]$ ou $[4, \infty[$.

Lorsque $f(x) > 0$, la représentation graphique est au-dessus de l'axe des x.

Lorsque $f(x) < 0$, la représentation graphique est sous l'axe des x.



La méthode ci-dessus se sert du fait qu'un polynôme peut changer de signe uniquement à ses zéros (valeurs de x qui rendent le polynôme nul). Entre des zéros consécutifs, un polynôme doit être entièrement positif ou négatif. Ces zéros sont ce que nous appelons les **nombres critiques** de l'inéquation et les intervalles qui en résultent sont les **intervalles de vérification** pour l'inéquation. Ce ne sont pas tous les polynômes qui changent de signe à un zéro.

· **résoudre des inéquations rationnelles**

Le concept des nombres critiques et des intervalles de vérification peut être étendu aux inéquations rationnelles. La valeur d'une ***expression rationnelle*** peut changer de signe uniquement à ses zéros (valeurs de x auxquelles son numérateur est 0) et ses valeurs indéfinies (valeurs de x auxquelles son dénominateur est 0). Ce sont les deux types de nombre qui composent les nombres critiques d'une inéquation rationnelle.

Exemple 1

Solutionnez :

$$\frac{x - 1}{(x - 2)(x + 3)} < 0$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations rationnelles** (suite)

Exemple 1 *- suite*

Solution

Déterminez les nombres critiques et esquissez.

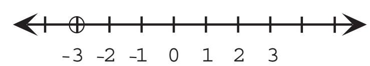
Les nombres critiques sont –3, 1 et 2.

On utilise des points ouverts étant donné que $f(x)$ est < 0. (Le dénominateur est 0 lorsque $x = 2$ et –3.)

Intervalle :]– ∞, –3[. Point de vérification : –4

$(x + 3)(x - 1)(x - 2)$

$(-4 + 3)(-4 - 1)(-4 - 2)$

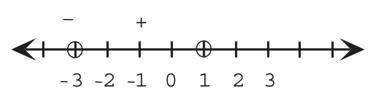


$$\underbrace{(+)\quad(-)\quad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(-)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle :]–3, 1[. Point de vérification : 0

$(x + 3)(x - 1)(x - 2)$

$(0 + 3)(0 - 1)(0 - 2)$

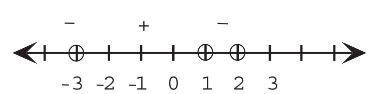


$$\underbrace{(+)\quad(-)\quad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle :]1, 2[. Point de vérification : $\frac{3}{2}$

$(x + 3)(x - 1)(x - 2)$

$\left(\frac{3}{2}+3\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)$

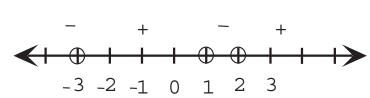


$$\underbrace{(+)\quad(+)\quad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(-)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle :]2, ∞[. Point de vérification : $x = 3$

$(x + 3)(x - 1)(x - 2)$

$(3 + 3)(3 - 1)(3 - 2)$



$$\underbrace{(+)\quad(+)\quad(+)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

La solution est les intervalles pour lesquels le signe du quotient est < 0 (négatif),]– ∞, 3[ou]1, 2[.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

· **résoudre des inéquations rationnelles** (suite)

Exemple 2

Solutionnez : $\dfrac{x}{x-3} > \dfrac{1}{x+2}$

Solution

$$\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x+2}>0$$

$$\frac{x(x+2)-(x-3)}{(x-3)(x+2)}>0$$

$$\frac{x^2+2x-x+3}{(x-3)(x+2)}>0$$

$$\frac{x^2+x+3}{(x-3)(x+2)}>0$$

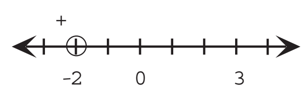
Le discriminant $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(3) = -11$ indique que $x^2 + x + 3$ n'a aucun zéro réel (voir Unité C).

$\therefore\ x - 3 = 0$ et $x + 2 = 0$

$x = +3$ et $x = -2$ sont les nombres critiques

Intervalle :]–∞, –2[. Point de vérification : $x = -4$

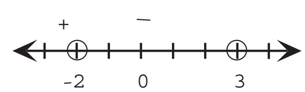
$(x^2 + x + 3)(x + 2)(x - 3)$



$$\underbrace{(+)\qquad(-)\qquad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle :]–2, 3[. Point de vérification : $x = 0$

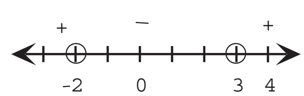
$(x^2 + x + 3)(x + 2)(x - 3)$



$$\underbrace{(+)\qquad(+)\qquad(-)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(-)}_{\text{Signe du produit}}$$

Intervalle :]3, ∞[. Point de vérification : $x = 4$

$(x^2 + x + 3)(x + 2)(x - 3)$



$$\underbrace{(+)\qquad(+)\qquad(+)}_{\text{Signes des facteurs}} = \underbrace{(+)}_{\text{Signe du produit}}$$

Les intervalles de la solution lorsque le quotient est > sont]– ∞, –2[ou]3, ∞[.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

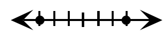
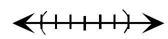
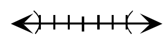
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations à valeur absolue**

La valeur absolue d'un nombre, x, représentée par $|x|$ peut être interprétée géométriquement comme la distance de x à zéro dans l'une ou l'autre des directions de la droite numérique. Demandez aux élèves d'examiner le tableau suivant concernant cette interprétation.

Énoncé	Interprétation géométrique	Graphique	Solution
$\lvert x\rvert = 3$	Valeurs de x qui se situent à 3 unités de 0.	 −3 0 3	$x = -3$ et $x = 3$
$\lvert x\rvert < 3$	Valeurs de x qui se situent à moins de 3 unités de 0.	 -3 -2 -1 0 1 2 3	$-3 < x < 3$* $(-3, 3)$
$\lvert x\rvert > 3$	Valeurs de x qui se situent à plus de 3 unités de 0.	 −3 0 3	$x < -3$ ou $x > 3$ $(-\infty, -3)$ $(3, \infty)$

* N'oubliez pas que $-3 < x < 3$ signifie $x > -3$ et $x < 3$.

L'inégalité $|ax + b| < c$ signifie que $ax + b$ est entre $-c$ et c. Cela équivaut à $-c < ax + b < c$.

L'inégalité $|ax + b| > c$ signifie que $ax + b$ n'est pas entre $-c$ et c inclusivement. Cela équivaut à $ax + b < -c$ ou $ax + b > c$.

Exemple 1

Utilisez votre calculatrice à affichage graphique pour dessiner la représentation graphique de $|x| = 3$, $|x| < 3$ et $|x| > 3$.

Solution

Vous devrez réorganiser les énoncés pour qu'ils se lisent :

$$|x| - 3 = 0$$
$$|x| - 3 < 0$$
$$|x| - 3 > 0$$

La première représentation graphique vous donne les zéros de $y = |x| - 3$ sont −3 et 3. La deuxième représentation graphique montre que $|x| - 3 < 0$ se situe entre l'axe des x (< 0) dans l'intervalle $-3 < x < 3$. La troisième représentation graphique illustre que $|x| - 3 > 0$ se situe au-dessus de l'axe des x (> 0) dans l'intervalle où $x < -3$ ou $x > 3$.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Pourquoi la valeur absolue d'un nombre ou d'une expression doit toujours être positive?

Problème

Faites une esquisse de $f(x) = |x - 1| - 4$, et déterminez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.

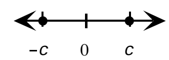
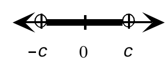
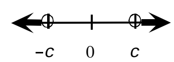
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

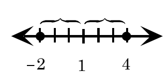
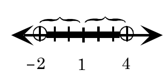
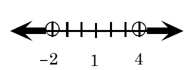
· **résoudre des inéquations à valeur absolue** (suite)

Le tableau qui suit représente la signification et la solution des équations à valeur absolue et des inégalités concernant $|x|$ et c, où c représente une distance et $c \geq 0$.

Énoncé	Interprétation géométrique	Graphique	Solution
$\|x\| = c$	La distance de x à 0 est exactement c unités.		$x = c$ ou $x = -c$
$\|x\| < c$	La distance de x à 0 est inférieure à c unités.		$-c < x < c$ ou $(-c, c)$
$\|x\| > c$	La distance de x à 0 est supérieure à c unités.		$x < -c$ ou $x > c$ $(-\infty, -c)$ (c, ∞)

Ces énoncés sont valides si on utilise ≤ au lieu de <, et ≥ remplace >.

On peut résoudre les équations et les inéquations du type $|x - h|$ où h est une constante en interprétant $x - h$ comme la distance de x à h sur une droite numérique.

Énoncé	Interprétation géométrique	Graphique	Solution
$\|x - 1\| = 3$	La distance de x à 1 est 3.		$x = -2$ ou $x = 4$
$\|x - 1\| < 3$	La distance de x à 1 est inférieure à 3.		$-2 < x < 4$
$\|x - 1\| > 3$	La distance de x à 1 est supérieure à 3.		$x < -2$ ou $x > 4$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 formuler et mettre en application des stratégies pour résoudre des inéquations quadratiques, radicales, rationnelles et à valeur absolue
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGQIES

· **résoudre des inéquations à valeur absolue** (suite)

Exemple 2

Utilisez votre calculatrice à affichage graphique pour représenter graphiquement $|x-1| = 3$, $|x-1| < 3$ et $|x-1| > 3$.

Solution

Vous devrez réorganiser les équations comme suit :

$$|x-1| - 3 = 0$$
$$|x-1| - 3 < 0$$
$$|x-1| - 3 > 0$$

La première représentation graphique donne les zéros de $|x-1| = 3$ pour qu'ils soient à -2 ou à 4. La deuxième indique que $|x-1| < 3$ repose sous l'axe des x ($x < 0$) dans l'intervalle $-2 < x < 4$. La troisième représentation graphique indique que $|x-1| > 3$ est au-dessus de l'axe des x dans l'intervalle où $x < -2$ ou $x > 4$.

Énoncé		Énoncé équivalent
$\lvert ax+b\rvert = c$	signifie	$ax + b = c$ ou $ax + b = -c$
$\lvert ax+b\rvert < c$	signifie	$-c < ax + b < c$
$\lvert ax+b\rvert > c$	signifie	$ax + b < -c$ ou $ax + b > c$

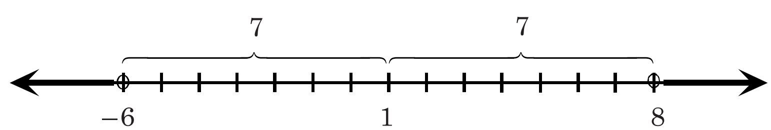
Exemple 3

Solutionnez $|x-1| > 7$. Utilisez (a) la géométrie et (b) l'algèbre. Vous pouvez utiliser des inégalités ou des diagrammes des signes.

Solution

a) Géométrie

$|x-1| > 7$ signifie que la distance de x à 1 est supérieure à 7 unités



b) Algèbre
À l'aide d'inégalités

$x - 1 < -7$ ou $x - 1 > 7$
$x < -6$ ou $x > 8$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Annexe D-1

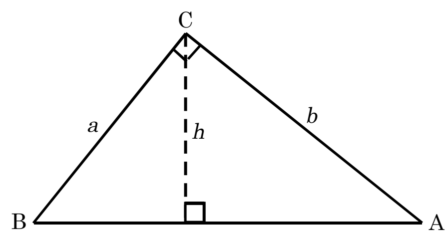
Distance entre des points et des droites

Objectif : Trouver la distance entre des points et des droites.

On peut utiliser la formule $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ pour trouver la distance entre deux points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$.

Une autre relation intéressante est la distance entre un point et une droite. Pour vous montrer de quelle façon on peut obtenir la formule, vous utiliserez une situation en géométrie, puis vous l'appliquerez à la situation actuelle en géométrie analytique.

Dans le Δ ABC dont les côtés sont de longueur a et b, AB est l'hypoténuse et sa longueur est $\sqrt{a^2 + b^2}$.



L'aire du Δ ABC peut être énoncée des deux façons suivantes :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}ab \qquad \text{Aire} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)(h)$$

Étant donné que les aires sont égales, peu importe les longueurs utilisées comme étant la base ou la hauteur, les deux expressions de l'aire s'égalisent.

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h$$

$$ab = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot h$$

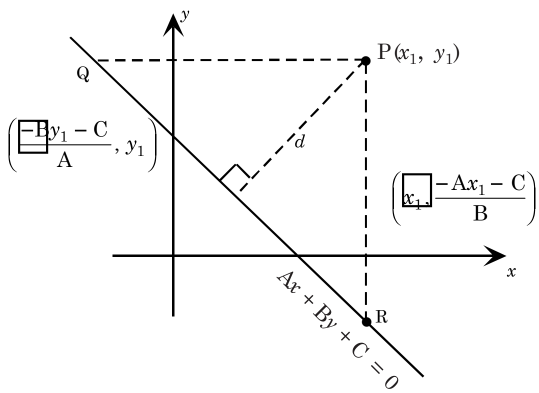
$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = h$$

Dans un triangle rectangle dont les côtés sont de longueur a et b, la hauteur de l'hypoténuse est

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ensuite, créez la situation faisant intervenir la distance d'un point à une droite et mettez en application le calcul précédent.

Le diagramme nous donne le point $P(x_1, y_1)$ et d est la distance qui sépare le point de la droite $Ax + By + C = 0$.



Tracez les segments de droite horizontale et verticale PQ et PR où Q et R sont des points sur la droite $Ax + By + C = 0$. La coordonnée y de Q est y_1 parce que c'est la même distance verticale que pour P au-dessus de l'axe des x.

Par substitution dans $Ax + By + C = 0$, on obtient la coordonnée x de Q.

$$\begin{aligned} Ax + By_1 + C &= 0 \\ Ax &= -By_1 - C \\ x &= \frac{-By_1 - C}{A} \end{aligned}$$

Les coordonnées de Q = $\left(\dfrac{-By_1 - C}{A}, y_1\right)$.

De même, R a la même coordonnée en x que P étant donné que P et R sont tous deux à la même distance de l'axe des y. La coordonnée x de R sera x_1.

Par substitution dans $Ax + By + C = 0$, on obtient la coordonnée en y :

$$\begin{aligned} Ax_1 + By + C &= 0 \\ By &= Ax_1 - C \\ y &= \frac{-Ax_1 - C}{B} \end{aligned}$$

Les coordonnées de R sont $\left(x_1, \dfrac{-Ax_1 - C}{B}\right)$.

Étant donnée que PQ est un segment de droite horizontale, sa longeur est

$$PQ = \left| x_1 - \frac{-By_1 - C}{A} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A} \right| .$$

Étant donné que PR est un segment de droite verticale, sa longueur est

$$\mathrm{PR} = \left| y_1 - \left(\frac{-\mathrm{A}x_1 - \mathrm{C}}{\mathrm{B}} \right) \right| = \left| \frac{\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}}{\mathrm{B}} \right|.$$

Pour plus de commodité, posez $M = Ax_1 + By_1 + C$; déterminez une expression pour d en utilisant

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{(\mathrm{PQ})(\mathrm{PR})}{\sqrt{(\mathrm{PQ})^2 + (\mathrm{PR})^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}\right| \left|\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}\right|}{\sqrt{\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{B}^2}}}$$

$$= \frac{\frac{\left|M^2\right|}{\left|AB\right|}}{\sqrt{M^2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)}}$$

$$= \frac{\left|\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{AB}}\right|}{\sqrt{\mathrm{M}^2\left(\frac{1}{\mathrm{A}^2} + \frac{1}{\mathrm{B}^2}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{|\mathrm{M}||\mathrm{M}|}{|\mathrm{AB}|}}{\frac{|\mathrm{M}|\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}{|\mathrm{AB}|}}$$

$$= \frac{|\mathrm{M}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

$$= \frac{|\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

La distance d'un point $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ à la droite $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ est

$$d = \frac{|\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}.$$

Exemple

Annexe D-2

Carte étape/solution

Voici un organiseur de problème/solution qui peut être réalisé en étapes successives.

Problème Résolution algébrique de systèmes linéaires – Méthode de l'addition ou de la soustraction

Équation : 1. $a + b - 3c = 8$

2. $3a + 4b - 2c = 20$

3. $2a - 3b + c = -6$

Étapes

1. Choisissez 2 équations et éliminez une variable

$$\begin{aligned} &(1) \quad a + b - \cancel{3c} = 8 \\ &(3) \quad (3)(2a - 3b + c = -6)(3) \\ &\quad = 6a - 9b + \cancel{3c} = -18 \\ &\text{Éqn. (4)} \quad 7a - 8b = -10 \end{aligned}$$

➤

2. Choisissez une paire différente d'équations et éliminez la même variable.

$$\begin{aligned} &(2) \quad 3a + 4b - \cancel{2c} = 20 \\ &(3) \quad (2)(2a - 3b + c = -6)(2) \\ &\quad = 4a - 6b + \cancel{2c} = -12 \\ &\text{Éqn. (5)} \quad 7a - 2b = 8 \end{aligned}$$

➤

3. Trouvez *b*.

$$\begin{aligned} &(4) \quad \cancel{7a} - 8b = -10 \\ &(5) \quad (7a - 2b = 8)(-1) \\ &\quad -\cancel{7a} + 2b = -8 \\ &\quad \frac{-6b}{-6} = \frac{-18}{-6} \\ &\quad b = 3 \end{aligned}$$

4. Trouvez *a*.

$$\begin{aligned} &(4) \quad 7a - 8(3) = -10 \\ &\quad 7a - 24 = -10 \\ &\quad \frac{7a}{7} = \frac{14}{7} \\ &\quad a = 2 \end{aligned}$$

➤

5. Substituez *a* + *b* pour trouver *c*.

$$\begin{aligned} a + b - 3c &= 8 \\ (2) + (3) - 3c &= 8 \\ 5 - 3c &= 8 \\ \frac{-3c}{-3} &= \frac{3}{-3} \\ c &= -1 \end{aligned}$$

➤

Ensemble solution = (2, 3, –1)

Solution (ou Résultat)

Ensemble solution = (2, 3, –1)

Vérification de la solution

1. $2 + 3 - 3(1) = 8$ $\quad 5 + 3 = 8$
2. $3(2) + 4(3) - 2(-1) = 20$ $\quad 6 + 12 + 2 = 20$
3. $2(2) - 3(3) + (-1) = -6$ $\quad 4 - 9 - 1 = -6$

Step/Solution Map : Utilisation autorisée par Joyce McCallum, Morden Collegiate, Western S.D. No. 47.

Exemple

Carte étape/solution

Annexe D-3

Voici un organiseur de problème/solution qui peut être réalisé en étapes successives

Problème Résolution algébrique de systèmes linéaires – Méthode de l'addition ou de la soustraction
Équation 1 : $3x - 2y = 10$
Équation 2 : $5x + 3y = -15$

Étapes

1. Additionnez les équations, en multipliant l'équation 2 par 2 pour éliminer les *y*. Multipliez l'équation 1 par 3 pour éliminer les *x*.

$3(3x - 2y) = 10(3)$
$9x - 6y = 30$
$2(5x + 3y) = -15(2)$
$10x + 6y = -30$

$$\frac{19x}{19} = \frac{0}{19}$$
$$x = 0$$

➤

3. Substituez dans une équation.

$$5(0) + 3y = -15$$
$$\frac{3y}{3} = \frac{-15}{3}$$

➤

3. Trouvez *y*.

$$y = -5$$

4. Substituez dans l'équation d'origine.

$$5x + 3(-5) = -15$$
$$5x - 15 = -15$$
$$\frac{5x}{10} = \frac{0}{5}$$

➤

5. Trouvez *x*.

$$x = 0$$

➤

Vérifiez.

$$5(0) + 3(-5) = -15$$
$$-15 = -15$$

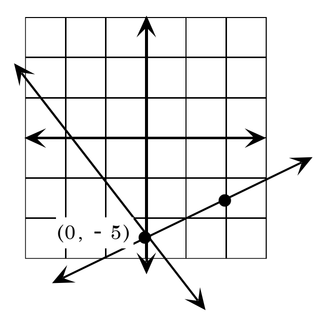
$$3(0) - 2(-5) = 10$$
$$10 = 10$$

Ensemble de solutions : (0, –5)

Solution (ou Résultat)

Ensemble solution

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-3x}{-2} + \frac{10}{-2}$$
$= (0, -5)$
$$y = \frac{3}{2} - 5$$
$$y = \frac{5}{3} - 5$$



Step/Solution Map : Utilisation autorisée par Joyce McCallum, Morden Collegiate, Western S.D. No. 47.

Annexe D-4

Carte étape/solution

Voici un organiseur de problème/solution qui peut être réalisé en étapes successives.

Problème

Étapes

Solution (ou Résultat)

Step/Solution Map : Utilisation autorisée par Joyce McCallum, Morden Collegiate, Western S.D. No. 47.

Note :

En raison de droits d'auteur, nous sommes dans l'impossibilité d'afficher le contenu suivant :

- Annexe D-5 - Exemple, Approche en trois points, Page de notes divisée
- Annexe D-6 - Approche en trois points, Page de notes divisée

Prière de vous référer au document imprimé. On peut se procurer ce document au Centre des manuels scolaires du Manitoba.

Centre des manuels scolaires du Manitoba
site : www.mtbb.mb.ca
courrier électronique : mtbb@merlin.mb.ca
téléphone : 1 800 305-5515 télécopieur : (204) 483-3441
nº du catalogue : 90399
coût : 35,15 $

Exemple

Annexe D-7

Fiche de sortie

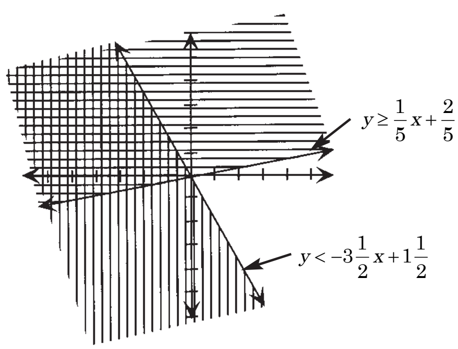
Concevez une question de test possible pour le questionnaire de demain sur les inéquations linéaires et solutionnez-la.

Représentez graphiquement l'ensemble solution de chaque système.

$7x + 2y < 3$
$5y \geq x + 2$

$$7x+2y<3$$
$$2y<-7x+3$$
$$y<-3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$$

$$5y \geq x+2$$
$$y \geq \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$$



$$y<-3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$$

$2<-3\frac{1}{2}\cdot 2+1\frac{1}{2}$	$1<-3\frac{1}{2}\cdot(-2)+1\frac{1}{2}$
$2<-7+1\frac{1}{2}$	$1<7+1\frac{1}{2}$
$2<-5\frac{1}{2}$	$1<8\frac{1}{2}$

pt. au-dessus (2, 2),
pt. au-dessous (–2, 1)

Tout d'abord, j'ai écrit deux inégalités linéaires. Ensuite, j'ai trouvé y et j'ai représenté graphiquement leurs superficies.

Ensuite, j'ai choisi un point pour chaque droite qui était au-dessus de la droite, et un autre point pour chaque droite qui était au-dessous de la droite. J'ai mis le point dans l'inégalité et j'ai solutionné. Si c'était vrai avec le point au-dessous de la droite, je colorais ma représentation graphique au-dessous de la droite. Si c'était vrai avec le point au-dessus de la droite, je colorais au-dessus de la droite..

Exit Slips Reference : Gere, Anne Ruggles, ed. *Roots in the Sawdust: Writing to Learn Across the Disciplines*. Urbana, IL: National Council of Teachers of English, 1985.