Unité A : Analyse de problèmes

Demi-cours VI
Guide de l'élève

1. Les lignes d'énergie électrique

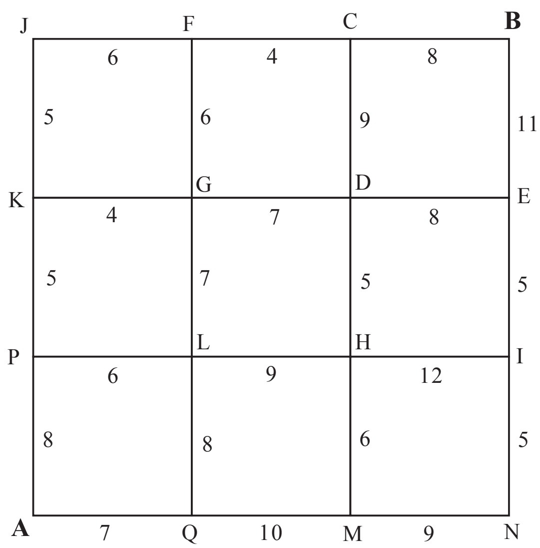
Une entreprise de services publics doit installer de nouvelles lignes d'énergie électrique entre un poste électrique A et une nouvelle école B. Les lignes doivent être installées dans les rues. Le coût (en dizaines de milliers de dollars) de l'installation d'une ligne dans chaque pâté de maison est inscrit dans le diagramme ci-dessous.

a) Si on tient compte de toutes les routes directes possibles (celles qui ne font pas le tour du bloc) entre A et B, combien de routes sont possibles?

b) Trouve le tracé le moins coûteux en établissant le coût de chaque route.

Il existe un moyen beaucoup plus efficace de résoudre ce problème. Tu commences par marquer d'une lettre, chaque sommet du diagramme. La méthode consiste essentiellement de travailler ***à rebours***, *en partant de* B *jusqu'à* A. Imaginons que nous avons installé une ligne entre A et C. Comment faire pour rejoindre le point B? Il faut partir de C pour aller à B, en comptant un coût de 8. De même, si nous avons rejoint E, comment atteindre le point B? La réponse, une fois de plus, est évidente. Il faut aller de E à B directement, un coût de 11. Ensuite, que faire si tu arrives à D? Ici, tu peux choisir d'aller au point B, en passant par C ou par E. Il est plus économique de passer par le point C, car le coût est de 17.

c) Continue de discuter des routes possibles et de déterminer le tracé entre A et B qui a le coût le moins élevé.



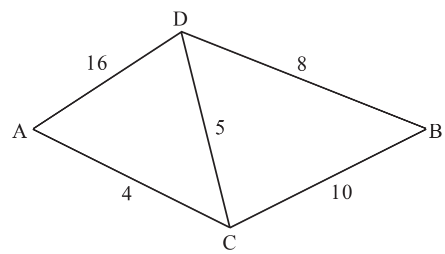
à rebours **:** dans le sens contraire

Les lignes d'énergie électrique : Extrait de Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics. *A Sourcebook of Applications of School Mathematics.* Reston, VA. Copyright © 1980, Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.

2. Les canalisations

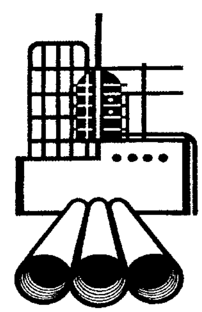
La méthode d'essais par tâtonnements permet de résoudre beaucoup de problèmes de réseaux, si le nombre de points (sommets) et de lignes (côtés) est peu élevé. Cependant, en pratique, de tels réseaux comprennent souvent plusieurs dizaines ou centaines de sommets et de côtés. Dans ces cas, il faut s'appuyer sur des méthodes plus rapides et surtout plus fiables que la méthode de tâtonnements. L'une de ces méthodes est décrite au problème 1 (Les lignes d'énergie électrique). Nous présentons une autre méthode dans cet exercice.

Posons deux points, A et B, liés par un réseau de tuyaux. La capacité des tuyaux est connue et nous voulons déterminer la quantité maximale de liquide qui peut être transportée entre le point A et le point B. En règle générale, une partie du problème consiste à déterminer dans quel sens le liquide sera pompé dans un lien intermédiaire, par exemple CD, et quelle quantité de liquide il faut pomper dans ce lien.



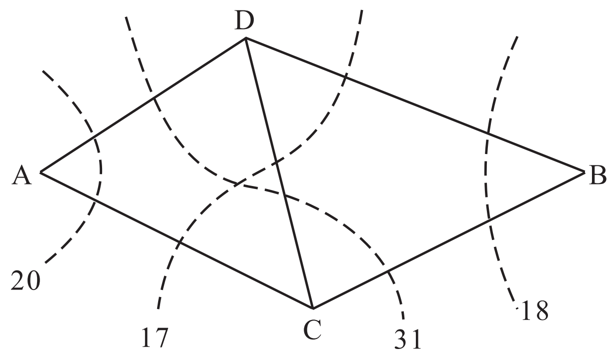
a) Détermine le débit pour chacun des cinq tuyaux, pour obtenir un débit total aussi élevé que possible.

Ford et Fulkerson ont trouvé une technique, qui s'appuie sur des résultats (un théorème mathématique) qui permet de trouver le débit maximal, d'une façon autre que par la méthode par tâtonnements. Selon le résultat obtenu, *le débit maximal est équivalent à la coupe minimale*. Une coupe est une ligne, telles que les lignes discontinues dans le diagramme suivant, qui sépare le point A et le point B, de sorte que si tous les tuyaux traversés par la droite étaient coupés ou supprimés, aucun liquide ne pourrait circuler entre A et B dans le réseau. Ainsi, la ligne à l'extrême gauche traverse les droites AD et AC; au total, leur capacité de transport maximal est 16 + 4 = 20. Une droite qui traverse AD, DC, et CB est marquée 31 (= 16 + 5 + 10). Chacune des sommes représente le coût associé à la coupe selon la perte de la capacité. Dans notre réseau, le coût minimal d'une coupe est 17. Par conséquent, selon le théorème de Ford-Fulkerson, le débit maximal dans le système est aussi 17. À partir de cette donnée, nous pourrons calculer rapidement les débits dans chacun des tuyaux.



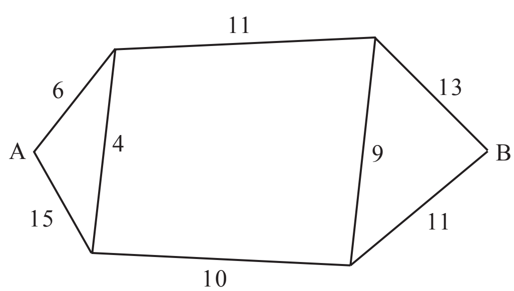
Les canalisations : Extrait de Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics. *A Sourcebook of Applications of School Mathematics.* Reston, VA. Copyright © 1980, Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.

Voici la solution pour le réseau de tuyaux illustré ci-dessus :



La capacité est plus élevée dans la section A à D que dans la section D à B. (Calcule la capacité du débit ***de*** D jusqu'à B, en ligne directe.) Par conséquent, il serait justifié de faire dévier une certaine quantité de liquide à partir du point D, pour le diriger vers le point B, via le point C. Au point C, le débit du liquide est de 5, de sorte que le débit maximal entre A et B via D est de 13, et que ceci est le total des tuyaux à partir de D. Le tuyau AC, dont la capacité est de 4, peut être utilisé conjointement avec CB – même avec DC (5), puisque le débit maximal est de 9 dans le tuyau CB. Ainsi, la capacité maximale de notre réseau est 17 (13 + 4) : 13 dans AD, 5 dans DC, 8 dans DB, et 9 dans CB.

b) À l'aide du théorème de Ford-Fulkerson (débit maximal – coupe minimale), détermine la capacité maximale entre A et B dans le réseau illustré ci-dessous. Détermine aussi la capacité de chacun des huit tuyaux.



c) Peux-tu expliquer pourquoi le théorème de Ford-Fulkerson fonctionne?

3. Une représentation graphique

Durant la Fête du Canada, à St-Jean Chrysostome, on offre des promenades en montgolfière. À midi, un ballon piloté par Richard et un autre piloté par Sylvie se sont envolés à partir du terrain de l'école secondaire du quartier, qui se trouve au niveau de la mer. Ils ont atterri deux heures plus tard au parc municipal, à un mille seulement du point de départ, qui se trouvait aussi au niveau de la mer. Les aéronautes ont enregistré leur altitude à toutes les dix minutes durant le vol, à l'aide d'un altimètre installé à bord de la montgolfière.

Heure	Ballon de Richard Altitude (pi)	Ballon de Sylvie Altitude (pi)
Midi	0	0
12 h 10	250	100
12 h 20	550	550
12 h 30	750	900
12 h 40	750	900
12 h 50	880	935
13 h	900	950
13 h 10	950	900
13 h 20	950	850
13 h 30	925	800
13 h 40	850	600
13 h 50	600	470
14 h	0	0

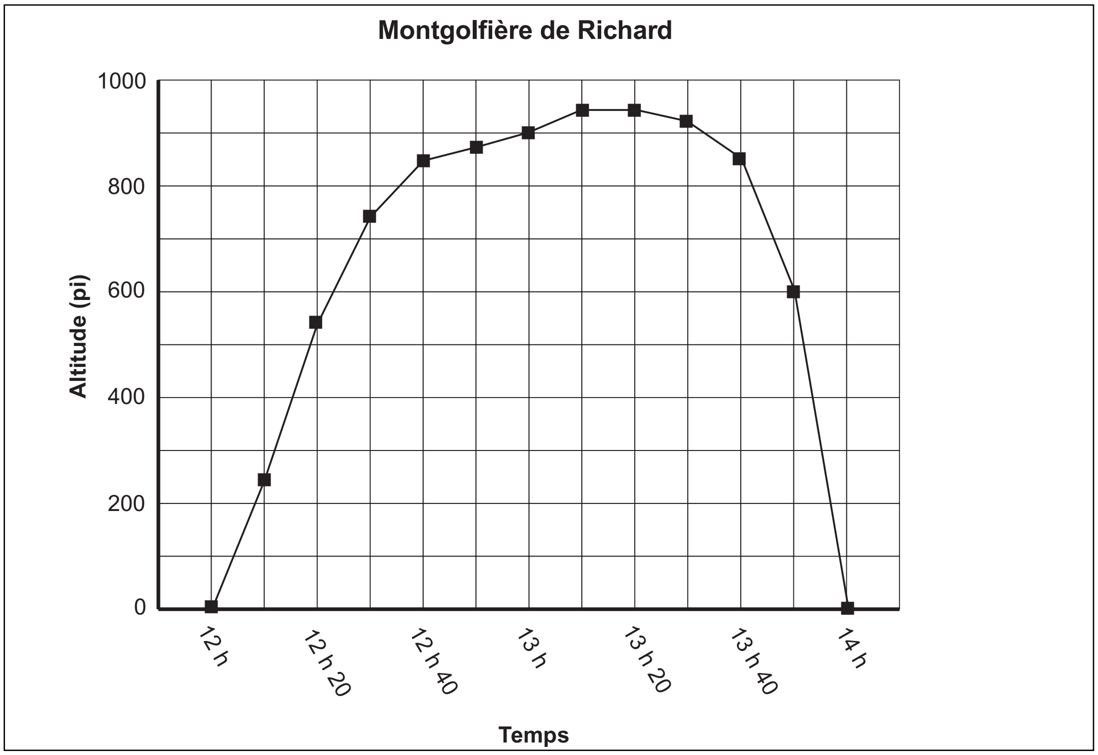
À la page suivante, nous présentons un diagramme illustrant les altitudes au-dessus de la terre, enregistrées par Richard. Les petits carrés correspondent à l'altitude atteinte par le ballon à des moments précis.

1. À quelle hauteur se trouvait la montgolfière de Richard à midi? ______________

   Après dix minutes de vol? ____

   Après une heure de vol?____

Une représentation graphique : Extrait de Eddins, S.K. " Let's Get Graphic. " *NCTM Student Math Notes.* Reston, VA. Copyright © 1996, National Council of Theachers of Mathematics.



2. À quelle heure le ballon de Richard a-t-il atteint 850 pieds d'altitude? __________

3. Selon le graphique, quelle est l'altitude maximale atteinte par la montgolfière de Richard? ______________________________

4. On peut constater, à partir du graphique, que la montgolfière de Richard était au sol à midi et qu'elle avait atteint 250 pieds d'altitude à 12 h 10. Même si aucune lecture de l'altimètre n'a été effectuée à 12 h 05, estime l'altitude que la montgolfière de Richard avait atteint à ce moment : ____________________

   Marque le résultat sur le diagramme au moyen d'un petit carré.

5. Les petits carrés représentent les points auxquels Richard a enregistré les lectures de son altimètre. Comme ce sont les seules valeurs dont nous disposons, nous avons relié les carrés pour avoir une idée de l'altitude de la montgolfière de Richard entre les lectures de l'altimètre.

6. Estime l'altitude du ballon de Richard à 13 h 30 : ____________________

7. Durant quelle(s) période(s) la montgolfière de Richard a-t-elle dépassé une altitude de 850 pieds? ______________________________

8. À l'aide de triangles, trace les lectures des altitudes pour le ballon de Sylvie sur le même diagramme. Relie ensuite les triangles pour avoir une idée de l'altitude atteinte par le ballon de Sylvie entre les lectures d'altimètre. Tiens pour acquis que les graphiques obtenus représentent le tracé réel des ballons.

9. À quelle altitude se trouvait le ballon de Sylvie à midi? ____________________

   Après dix minutes de vol? ____________________

   Après une heure de vol? ____________________

10. À quel(s) moment(s) le ballon de Sylvie a-t-il atteint 900 pieds d'altitude?______

11. Pendant la montée des montgolfières, elles ont atteint la même altitude à une reprise. Quand? ____________________

12. À quel(s) autre(s) moment(s) les montgolfières se sont-elles trouvées à la même altitude? ____________________

La résolution de questions comme la dernière te permet de développer une méthode qui pourra être utile dans d'autres problèmes. La méthode devrait comprendre une observation attentive des extrémités du graphique.

13. À partir des graphiques, détermine quelle montgolfière est montée le plus haut.

    ____

14. Durant quelle(s) période(s) la montgolfière de Richard se trouvait-elle plus haute que celle de Sylvie? ____________________

15. Pendant combien de minutes la montgolfière de Sylvie a-t-elle été plus haute que celle de Richard?____________________

16. À quel moment la différence entre les altitudes des deux montgolfières a-t-elle été la plus grande?____________________

    Quelle était la distance verticale entre les deux ballons? ____________________

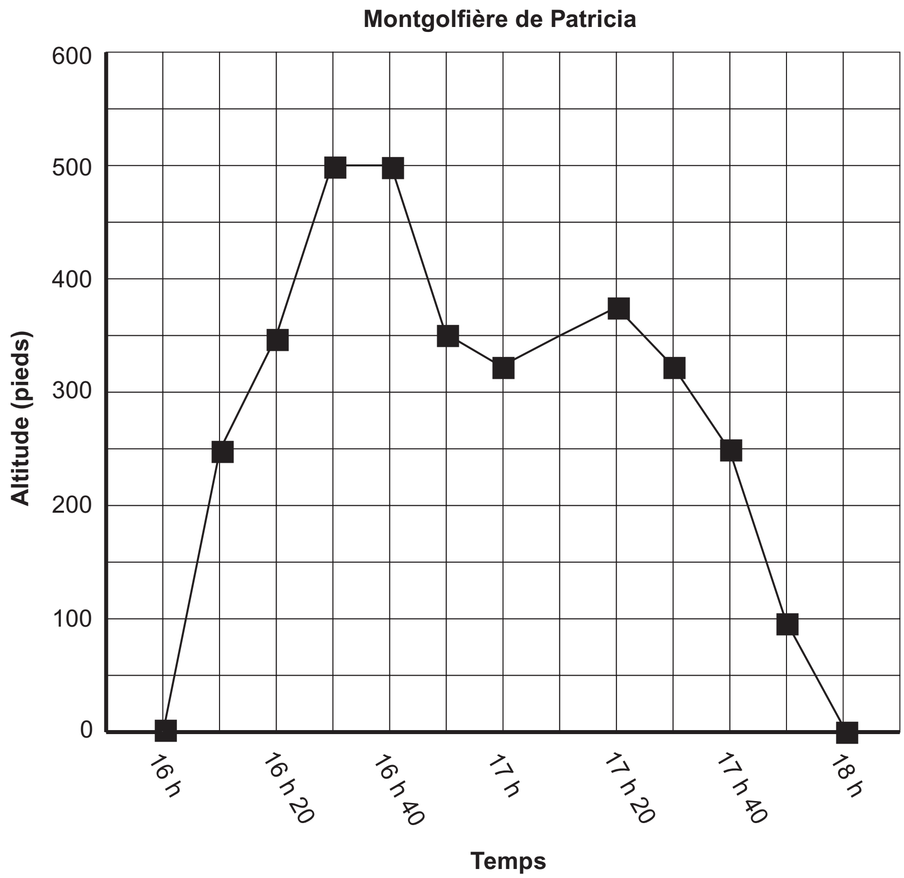
17. En examinant la ligne qui relie les triangles, détermine les périodes durant lesquelles le ballon de Sylvie est monté le plus rapidement.____________________

18. Quel ballon est descendu le plus rapidement?____________________ Explique.

    ____

    ____

Parfois, il faut se méfier de la ligne qui relie les points d'un diagramme. Observe le tracé ci-dessous, qui correspond au vol de la montgolfière de Patricia, effectué plus tard le même jour. Le graphique a été tracé par l'équipe de contrôle au sol, à partir des comptes rendus que Patricia donnait au moyen d'un téléphone cellulaire, à toutes les dix minutes.



19. Si on se fie au graphique, quelle est l'altitude maximale atteinte par la montgolfière? ______________________

20. Patricia prétend qu'elle a atteint une hauteur maximale de 600 pieds. Selon toi, où faudrait-il inscrire cette valeur sur le graphique? Modifie-le en conséquence. À quelle heure ce sommet a-t-il été atteint selon toi?

____

21. Selon le graphique, quel est le nombre minimal de fois où la montgolfière de Patricia s'est trouvé à 300 pieds d'altitude exactement? Quels sont ces moments?

____

22. En réalité, la montgolfière de Patricia a atteint 300 pieds d'altitude à 3 reprises exactement. Modifie le graphique pour indiquer comment cela a pu se passer. À quels moments cela a-t-il pu se passer?____________________

23. Suggère des façons de diminuer les possibilités d'oublier des valeurs importantes liées au vol. ____________________

____

La *pagaille* dans les échelles

24. Tu vois ci-contre un tableau illustrant la population de porcs aux États-Unis entre 1890 et 1990. Pourquoi les intervalles entre les années sont-ils différents?

____

25. Reporte les données sur le diagramme A (page suivante), puis sur le diagramme B.

26. Pourquoi les graphiques sont-ils si différents?

____

____

27. Si on te montrait seulement le diagramme A, quelle conclusion pourrais-tu en tirer?

____

____

28. Si on te montrait seulement le diagramme B, quelle conclusion pourrais-tu en tirer?

____

____

29. Explique quel diagramme représente le mieux la tendance dans la population de porcs.

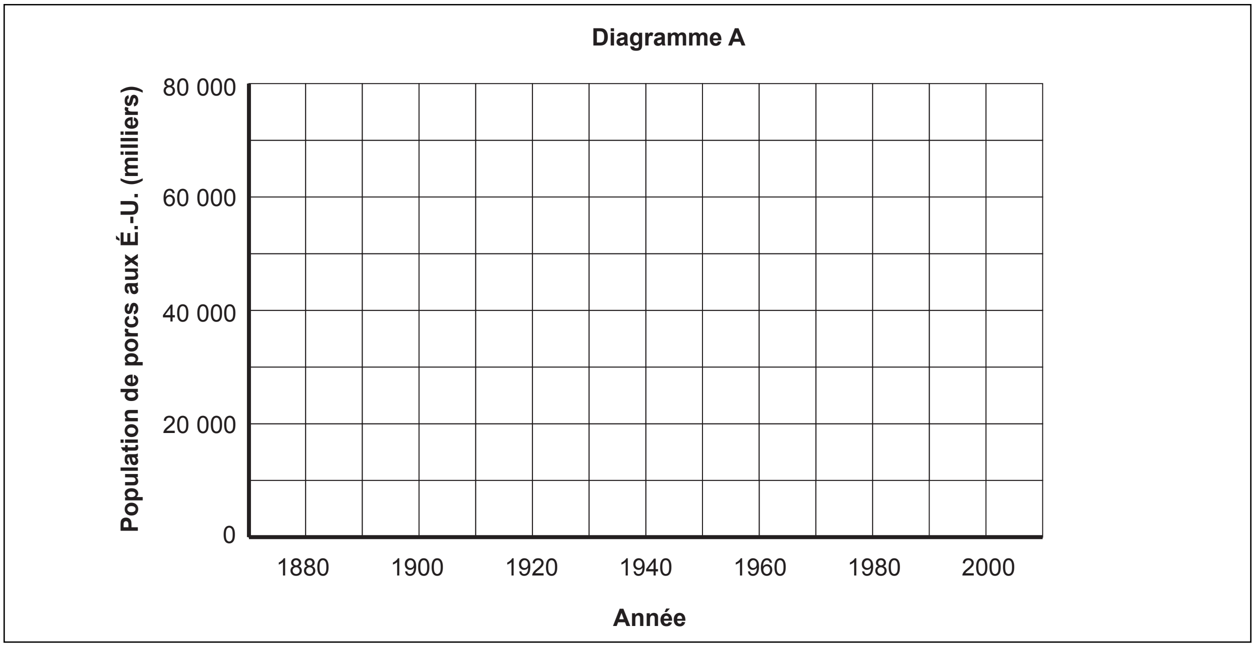
____

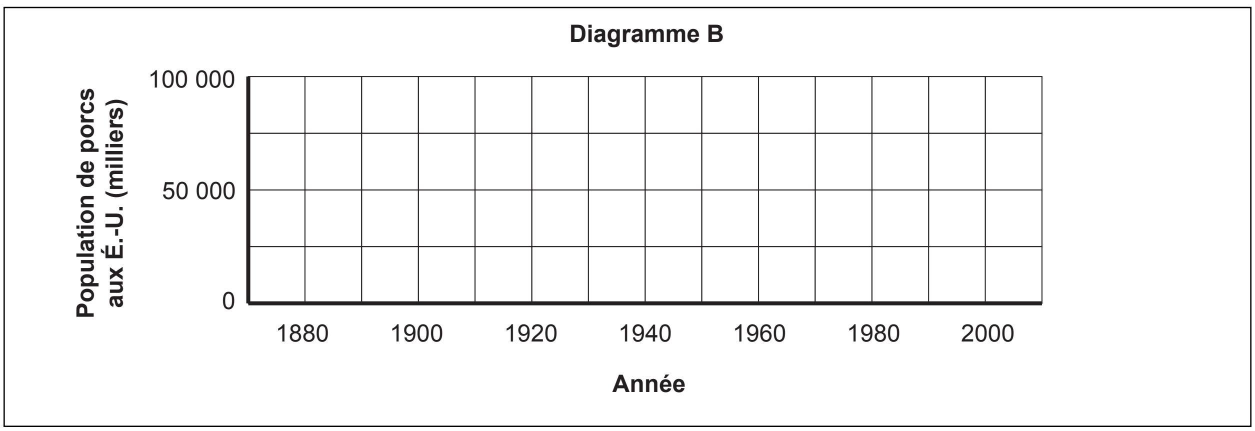
____

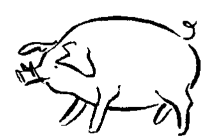
____

Année	Population de porcs aux É.-U. (milliers)
1890	48 130
1900	51 055
1910	48 072
1920	60 159
1925	55 770
1930	55 705
1935	39 066
1940	61 165
1945	59 373
1950	58 937
1955	50 474
1960	59 026
1965	56 106
1970	57 046
1975	54 693
1980	67 318
1985	54 073
1990	53 821

***pagaille* :** (nom f.) désordre général







Quand tu traces un diagramme des données, il est important de déterminer quelles données sont représentées sur l'axe horizontal et l'axe vertical. Généralement, l'axe horizontal est réservé aux variables indépendantes, ou aux nombres de l'exemple sur lesquelles les circonstances n'ont aucune influence. L'axe vertical est réservé aux variables dépendantes, ou aux nombres qui dépendent des variables indépendantes. Dans notre exemple, l'année est la variable indépendante, puisque les années passent, indépendamment des résultats. La variable dépendante représente le nombre de porcs, puisque la donnée dépend de l'année. Autrement dit, le nombre de porcs est une fonction de l'année.

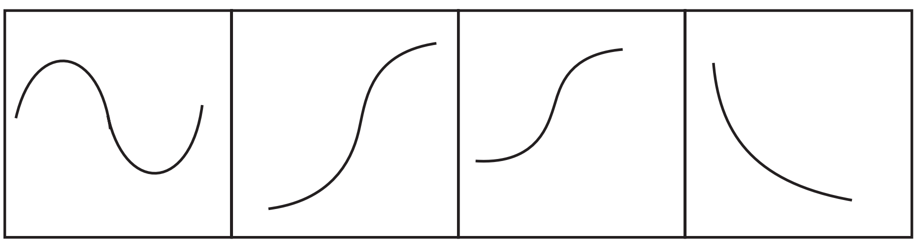
30. Dans le diagramme représentant l'altitude des montgolfières, quelle est la variable indépendante? ____________________

____

La variable dépendante? ____________________

31. Même si l'échelle peut avoir une importance, elle ne compte pas quand il s'agit de déterminer une tendance dans les données. Si on suppose que le mouvement vers le haut et vers la droite d'un graphique représente des valeurs croissantes, lequel des quatre graphiques ci-dessous peut représenter :

   a) le nombre d'automobiles vendues par rapport au prix de vente? __________
   b) les heures d'ensoleillement par rapport au temps de l'année (mois)? ________
   c) la grandeur par rapport à l'âge? ____________________
   d) les risques de maladies coronaires par rapport au taux de cholestérol élevé? ____



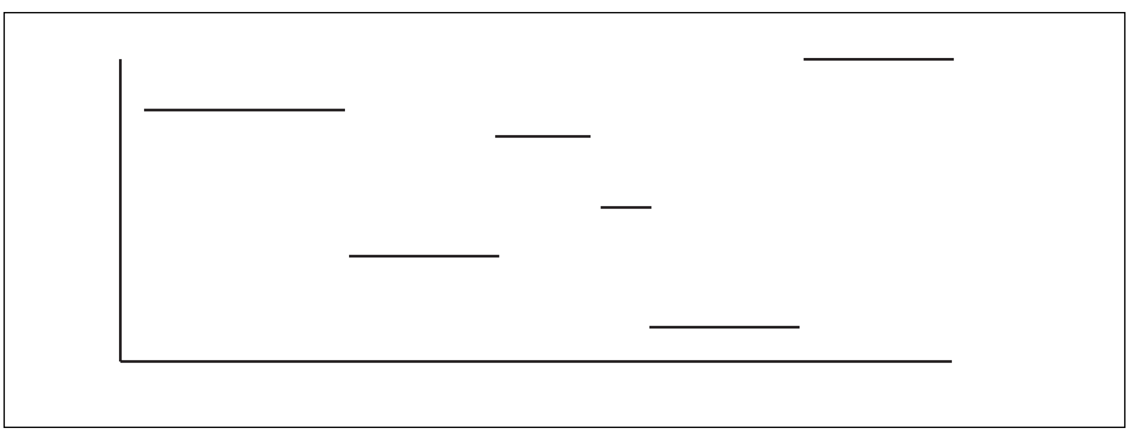
Graph 1 Graph 2 Graph 3 Graph 4

32. Le graphique suivant indique le nombre de livres de nourriture se trouvant dans le réfrigérateur d'une famille selon l'heure qu'il est, entre minuit et midi.

   Décris ce qui a pu se passer durant cette période de douze heures.

____

____

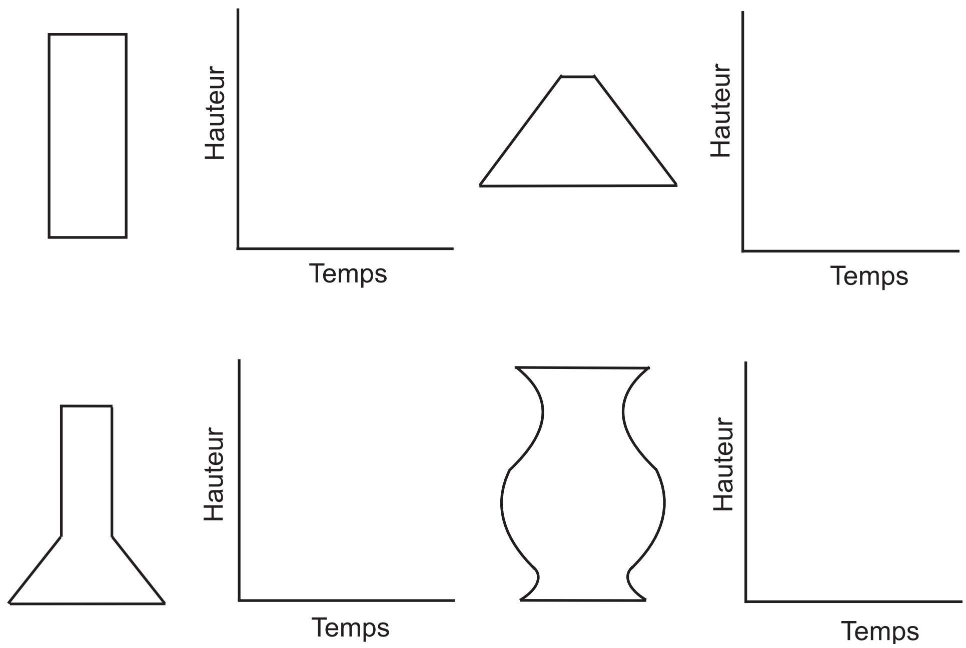


33. Un autre graphique intéressant établit le rapport entre les ventes de voitures de taille moyenne et l'économie d'essence.

    a) Dessine un diagramme dans l'espace ci-dessous pour illustrer la relation entre l'économie d'essence et les ventes. Sur l'axe horizontal (axe des *x)*, place les « milles au gallon », et le « nombre de voitures de taille moyenne vendues » sur l'axe vertical (axe des *y*).

    b) Explique pourquoi ton diagramme illustre bien le lien entre les deux variables.

34. Un chimiste apporte quatre contenants de formes différentes dans son laboratoire. Il verse du liquide dans chaque contenant à un rythme constant, et enregistre la hauteur du liquide de façon régulière. Pour chacun des contenants, trace le graphique illustrant la hauteur du liquide.



Peux-tu...

- déterminer si une fonction est croissante; décroissante; ni l'une, ni l'autre?
- déterminer si une fonction est continue ou discontinue?
- créer un exemple réel de graphique périodique ou oscillant?
- créer un exemple réel dans lequel le graphique aurait un domaine continu et une image discrète?
- dessiner le graphique du coût de l'envoi d'un ***colis*** par la poste?
- déterminer les valeurs maximales et minimales d'un graphique?
- déterminer le domaine et l'image du graphique d'un ensemble de données?
- déterminer le domaine de la croissance et de la décroissance d'une fonction?

***colis* :** (nom m.) paquet qu'on envoie à quelqu'un

Savais-tu que...

- la pente d'un graphique indique le rythme de changement de la relation?
- si une fonction décrit la distance entre une particule et sa position originale, le graphique de la dérivée de cette fonction illustre la relation entre le temps et la vitesse de la particule, soit le taux de déplacement de cette particule?
- les courbes en S, appelées courbes en ogive, sont utilisées dans le domaine de la psychologie?
- les fonctions peuvent être déterminées pour représenter et décrire des ensembles de données?
- de nombreuses calculatrices graphiques portatives permettent de trouver des formules liées à des ensembles de données?

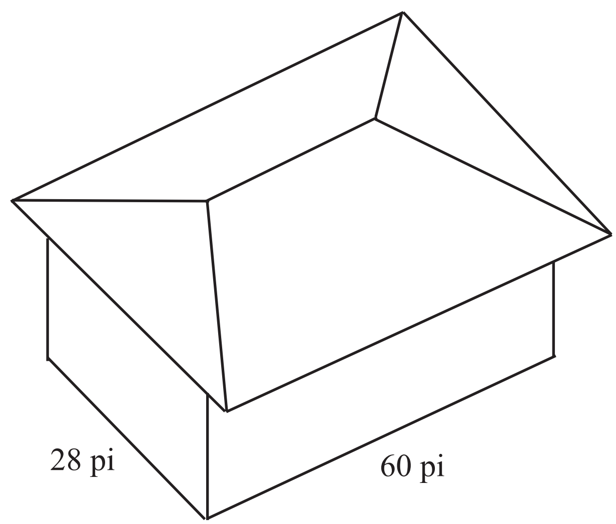
4. Les nouvelles

Beaucoup de gens apprennent ce qui se passe dans le monde en écoutant le bulletin de nouvelles à la télévision. D'autres lisent les journaux, comme le *Winnipeg Free Press* ou *La Liberté*. Combien de pouces de colonnes de ton journal favori seraient nécessaires pour imprimer le texte complet (sans les messages publicitaires) d'un bulletin de nouvelles d'une demi-heure à la télévision? [Tu devras recueillir des données pour faire cet exercice. Cherche des moyens efficaces de réunir l'information dont tu as besoin, en trouvant l'échantillon le plus précis possible au lieu de compter **tous** les mots.]

5. La couverture d'un toit

Tu dois recouvrir le toit de la maison dessinée ci-dessous avec des feuilles de toiture; combien de pieds carrés seront nécessaires? Combien de feuilles de 4 pi x 8 pi le constructeur devra-t-il acheter pour recouvrir le toit?

La pente du toit monte d'un pied à tous les trois pieds horizontaux, perpendiculaires à un mur : la pente est donc de un sur trois. Le toit dépasse les murs de 2 pieds à l'horizontal (surplomb de 2 pieds).



6. Le contrôle de la circulation aérienne à l'aide de transpondeurs

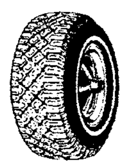
Les avions sont équipés d'instruments électroniques appelés transpondeurs, qui permettent aux contrôleurs de savoir de quel avion proviennent les signaux qui apparaissent sur leur écran radar. Les transpondeurs ont 4 cadrans, calibrés de 0 à 7. Le contrôleur demande au pilote de régler son transpondeur selon un nombre de quatre chiffres qu'il lui donne. Ce nombre apparaît ensuite (en forme de code) à côté du signal, qui est associé à un avion particulier, sur l'écran radar.

1. Combien existe-t-il de réglages différents du transpondeur? Est-il possible qu'un contrôleur aérien donne le même nombre à deux avions à un moment donné? Pourquoi ou pourquoi pas?
2. Suppose que la contrôleuse aérienne Suzanne Jean décide d'utiliser les premiers chiffres du réglage pour indiquer la direction d'un avion : 0 correspond au nord, 1 au nord-est, 2 à l'est, et ainsi de suite, alors que le deuxième chiffre indique si un avion décolle ou s'il atterrit. À combien d'avions pourrait-elle donner des réglages distincts?

7. La vitesse et l'état des pneus

Le compteur de vitesse d'une automobile mesure le taux de rotation de l'arbre de transmission de la voiture et, par le biais du différentiel ou de la transmission, la vitesse à laquelle les roues tournent. Si le compteur de vitesse est précis quand les pneus sont neufs (profondeur de la bande de roulement de 9/32 po) et bien gonflés :

1. Quel sera l'effet sur la lecture de ton compteur de vitesse, quand les pneus sont usés à une épaisseur de 1/16 po (l'épaisseur minimale légale dans plusieurs territoires)?
2. Quel type de changement des lectures d'un compteur de vitesse, résulte du remplacement de pneus usés (bande de roulement de 1/16 po, bien gonflés) par des pneus d'hiver (bande de roulement de 12/32 po bien gonflés)?
3. Quel effet des pneus qui ne sont pas assez gonflés auraient-ils sur un compteur de vitesse?



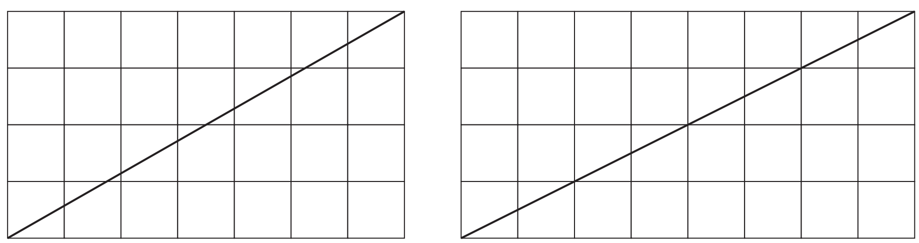
8. Rectangles et diagonales

En examinant un rectangle sur un papier quadrillé, et une diagonale dans ce rectangle :

1. Combien de carreaux la diagonale traverse-t-elle ?
2. Peux-tu établir un lien (description ou démonstration mathématique) entre les dimensions du rectangle et le nombre de carreaux traversés par la diagonale ?

Écris les résultats obtenus en décrivant les liens. Utilise des diagrammes comme ceux qui sont utilisés sur les deux pages suivantes.

Détermine toi-même comment aborder ce problème. Quelques exemples ci-dessous suggèrent que les dimensions des rectangles peuvent être considérées de différentes façons.



Que remarques-tu sur les différences entre les deux exemples ci-dessus ?

9. Les séries éliminatoires

Dans de nombreux sports, une équipe doit gagner trois parties sur cinq pour remporter le championnat. La première équipe qui gagne trois parties gagne la série. De combien de façons une équipe peut-elle gagner le championnat?

Problème 1

Imagine que tu es le journaliste sportif de l'hebdo local ou du journal de ton école. Trouve la réponse au problème ci-dessus, puis écris un court article pour l'expliquer aux mordus du sport qui lisent ta chronique.

Problème 2

Lors des séries mondiales de baseball, une équipe doit remporter quatre parties sur sept pour gagner. De combien de façons peut-elle y arriver?

Savais-tu...

Que la Série mondiale (*World Series*) ont été baptisées ainsi parce qu'elles étaient commanditées à l'origine par le journal *New York World*?

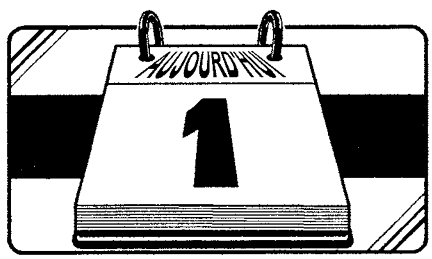
Les séries : Extrait de Fisher, L. et W. Medigovich. *Problem of the Week*. Palo Alto, CA. Copyright © 1981, par Dale Seymour.

10. Les calendriers

Depuis 1582, la plupart des pays du monde utilisent le calendrier Grégorien (ainsi nommé pour honorer le Pape Grégoire XIII.) Le problème de comment trouver le jour de la semaine des dates importantes de l'histoire intéresse certaines gens. Il faut premièrement déterminer combien de différents calendriers sont possibles avant de trouver la réponse à ce problème. Par exemple, un calendrier peut avoir le 1er janvier qui tombe le dimanche, et le 31 décembre qui tombe aussi le dimanche. Un autre calendrier peut avoir le 1er janvier qui tombe le dimanche, mais le 31 décembre tombe le lundi.

Il existe un nombre limité de calendriers annuels.

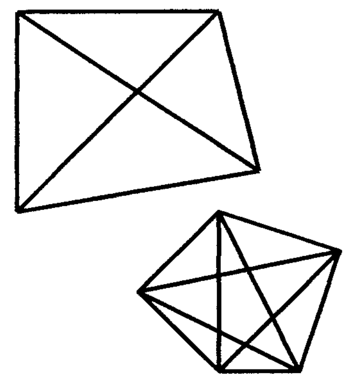
1. Combien de calendriers annuels différents existe-t-il?
2. Combien d'années doivent s'écouler avant qu'un calendrier puisse être réutilisé? Explique le cycle des calendriers à partir du 1er janvier, 2001.



Les calendriers : Extrait de Fisher, L. et W. Medigovich. *Problem of the Week*, Palo Alto, CA. Copyright ©1981, par Dale Seymour.

11. Problèmes divers

1. Un quadrilatère comporte deux diagonales, alors qu'un pentagone en comporte cinq. Trouve le nombre de diagonales dans un :
   a) hexagone (6 côtés)
   b) heptagone (7 côtés)
   c) dodécagone (12 côtés)



2. À quel moment entre 12 h et 13 h les aiguilles d'une montre sont-elles colinéaires (c.-à-d. elles forment une droite continue)?
3. Dans un fort historique, des boulets de canon sont placés de sorte à former un triangle équilatéral, avec sept boulets sur un côté. Une autre épaisseur, elle aussi en forme de triangle équilatéral, a six boulets sur un côté. Les boulets ont été placés couche après couche pour former une pyramide, au sommet de laquelle trône un seul boulet. Combien la pyramide compte-t-elle de boulets de canon?
4. A, B, C, D, E, F, G et H sont huit points situés à l'intérieur d'un cercle. Trois cordes sont tracées dans le cercle, de sorte qu'aucun des huit points ne soit situé sur une corde. Explique pourquoi il est toujours possible de joindre deux des huit points par un segment qui ne traverse aucune des trois cordes.
5. Trouve le plus grand nombre possible de morceaux que tu peux découper dans une pizza en faisant seulement cinq traits droits. (Tu ne peux pas empiler les morceaux.) Explique ta réponse.
6. Le restaurant Pizza Pizza annonce que sa pizza est la plus grande en ville, avec ses 36 po de diamètre. À 35,99 $, le restaurant prétend que c'est la meilleure affaire que le consommateur puisse faire. Toi et tes amis, vous avez très faim et vous avez décidé d'en commander une. Quand le livreur arrive, il vous annonce qu'ils ont eu des problèmes avec leur grand four et qu'il leur était impossible de cuire des pizzas de 36 po de diamètre. Il vous a donc apporté 2 pizzas de 18 po, pour le même prix. Est-ce que vous faites une bonne affaire? Pourquoi? Pourquoi pas?
7. Combien de triangles scalènes peuvent être tracés, ayant un périmètre de 15?

Problèmes divers : Éducation et Formation professionnelle Manitoba. *Problèmes de mathématiques du secondaire*, Winnipeg, Manitoba. Copyright © 1994, par Éducation et Formation professionnelle du Manitoba.