Unité B : Analyse de jeux et de nombres

Demi-cours V
Guide de l'élève

1. Jeux de barrage

Ces jeux ressemblent au tic-tac-toe, au jeu d'Ovid et à Achi, présentés dans le cadre du demi-cours IV. L'objectif est toutefois très différent. Dans les jeux de barrage, le joueur tente de barrer la route à son adversaire pour empêcher son prochain déplacement. Ces deux jeux sont d'origine chinoise.

Ko-no

Joueurs : deux

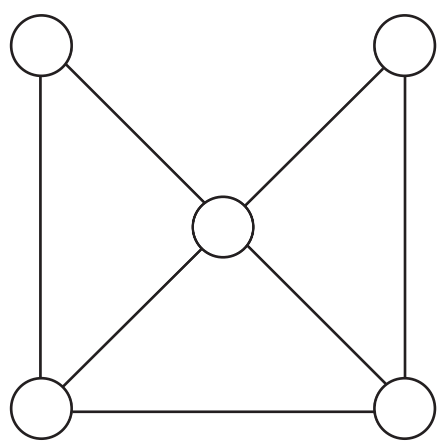
Pièces de jeu : planchette de jeu

quatre marqueurs, deux jaunes et deux rouges

But du jeu : empêcher les déplacements de l'adversaire

Règles :

- Le joueur 1 place ses marqueurs sur les deux cercles du haut. Le joueur 2 place ses marqueurs sur les deux cercles du bas. Le cercle du centre est libre.
- Les joueurs déplacent un marqueur à tour de rôle le long des lignes sur la surface de jeu jusqu'à un cercle libre adjacent. Les sauts et les emprisonnements ne sont pas permis.
- Le joueur remporte la partie lorsque son adversaire ne peut plus déplacer ses marqueurs.



Jeux de barrage : J. Gorman. « Strategy Games: Treasures from Ancient Times. » *Mathematics Teaching in the Middle School 3,2 (octobre 1997).* Copyright © 1997 par le *National Council of Teachers of Mathematics.*

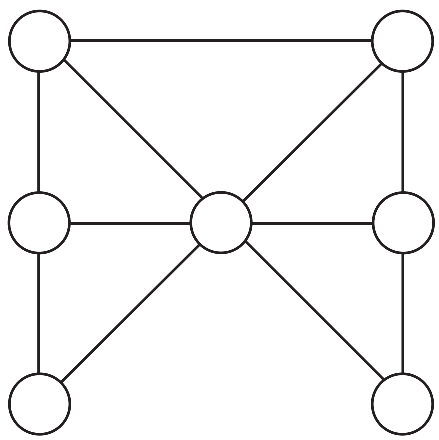
Fer à cheval

Ce jeu ressemble au Ko-no. Il s'agit également d'un jeu de la Chine antique.

Joueurs :	deux
Pièces de jeu :	planchette de jeu
	six marqueurs; trois jaunes et trois rouges
But du jeu :	bloquer les déplacements de l'adversaire

Règles :

- À tour de rôle, les joueurs doivent placer les marqueurs un par un sur les cercles vides de la planchette.
- Après avoir placé tous les marqueurs, les joueurs déplacent les marqueurs un par un le long des lignes de la surface de jeu jusqu'au prochain espace libre. Les sauts et les emprisonnements ne sont pas permis.
- Le joueur remporte la partie lorsque son adversaire ne peut plus déplacer ses marqueurs.



Questions

Quelle est la meilleure stratégie pour jouer au Ko-no? Est-il possible de gagner si les deux adversaires jouent bien?

En quoi la stratégie de jeu au Ko-no diffère-t-elle du *fer à cheval*?

Peux-tu créer ton propre jeu de barrage? Rédige les règles attentivement pour que les joueurs puissent y participer sans avoir recours à ton aide.

2. Amuse-toi avec les nombres

Truc

1. Choisis un nombre.
2. Ajoute le prochain nombre plus élevé.
3. Ajoute sept.
4. Divise par 2.
5. Soustrais ton chiffre original.

Fais cet exercice avec cinq chiffres différents. Indique pourquoi le résultat est toujours pareil.

La guerre aux mouches

Si 10 personnes écrasent 10 mouches en 10 minutes, combien de mouches 20 personnes peuvent-elles écraser en 20 minutes?

Addition

Un étudiant va à l'université mais manque d'argent en peu de temps. Il envoie le télégramme suivant à ses parents :

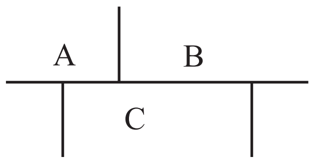
$$\begin{array}{r} \text{A I , D E} \\ \text{M , O I} \\ \hline \text{F O N , D S} \end{array}$$

Comment ses parents peuvent-ils savoir combien d'argent envoyer?

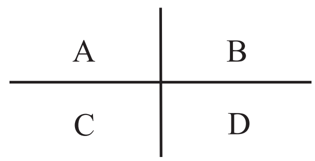
***Nota* :** Il existe plus d'une solution possible.

3. Coloriage d'une carte

La carte ci-dessous démontre plusieurs pays. Il faut colorier chaque pays de manière à bien voir les différentes régions. Si deux pays ont une frontière commune, il faut les colorier de couleurs différentes.

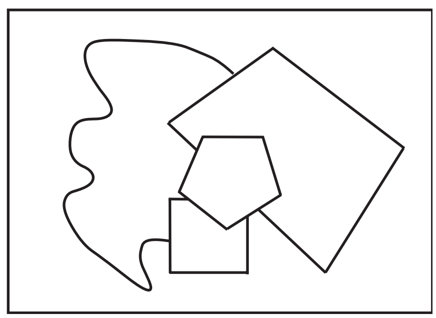


il faut 3 couleurs



A et D d'une couleur
B et C d'une autre couleur

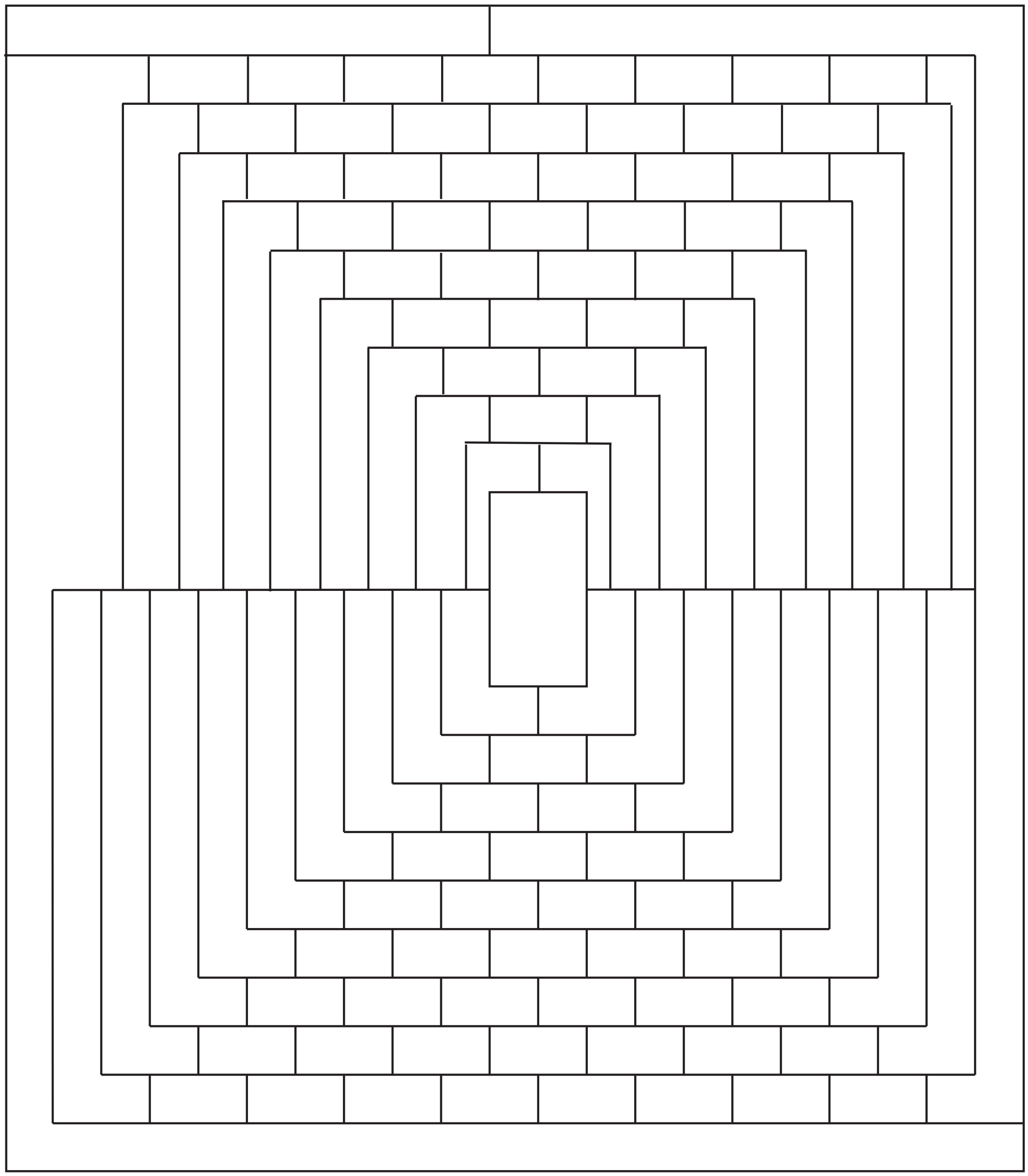
En utilisant le moins de couleurs possibles, indique les codes sur la carte ci-dessous.



Le coloriage d'une carte est un problème de longue date en mathématiques. Il a été découvert il y a longtemps, et prouvé mathématiquement, qu'il est possible de colorier toutes les cartes à l'aide de cinq couleurs. On a émis l'hypothèse qu'en fait, seules quatre couleurs étaient vraiment nécessaires. Personne n'a pu trouver ou produire une carte nécessitant plus de quatre couleurs, mais il a aussi été prouvé qu'une telle carte ne pouvait pas exister. Enfin, dans les années 1980, un mathématicien a estimé avoir prouvé qu'il est possible de colorier une carte avec au plus quatre couleurs.

La « carte » sur la page suivante a été publiée (M. Gardner) de façon quelque peu humoristique en stipulant qu'il fallait cinq couleurs pour la colorier. En fait, quatre couleurs suffisent.

Essaie de colorier la carte à l'aide de quatre couleurs seulement.



4. Un testament curieux

Un riche avocat possédait une collection de 11 voitures de grande valeur.

À son décès, il laisse un testament curieux. L'avocat demande qu'on divise ses 11 voitures parmi ses trois fils. La moitié des véhicules doivent être donnés à l'aîné, un quart des véhicules au deuxième fils et un sixième au plus jeune.

Ils sont tous mystifiés; comment diviser 11 voitures en deux, quatre ou six parties égales?

Comme les fils se disputent sur la façon de procéder, M^{me} Zéro, une numérologue de renommée, arrive dans une nouvelle voiture sport. « Hé! Les gars. Vous semblez avoir un problème. Puis-je vous aider? »

Après avoir entendu l'explication du problème des trois fils, M^{me} Zéro stationne son véhicule à côté des voitures antiques et leur demande : « Dites-moi combien de voitures il y a maintenant. » Ils en comptent 12.

La numérologue exécute ensuite le testament. Elle donne la moitié des voitures, 6, à l'aîné. Le deuxième fils obtient un quart de 12, soit 3. Le plus jeune obtient un sixième de 12, soit 2.

« 6 plus 3 plus 2 ne font que 11. Ainsi, il reste une voiture, la mienne. »

M^{me} Zéro monte dans sa voiture et démarre en ajoutant : « Il m'a fait plaisir de vous aider! Je vous envoie ma facture! »

Peux-tu rédiger un testament semblable pour 17 voitures?

Un testament curieux : *Scientific American*, « The Paradox Box. » *Scientific American*. Copyright © 1975 par W. H. Freeman.

5. Le dernier dossier de Renaud Dufer

Carl Dijon est tué le long d'une route déserte à deux milles de Gimli, à 23 h 45 le 14 février. Une semaine plus tard, la GRC fait venir cinq hommes afin qu'ils subissent l'interrogatoire du détective Renaud Dufer. Chaque homme fait quatre déclarations dont trois sont véridiques et une est fausse. Un de ces hommes a tué Carl Dijon.

Alex déclare :
J'étais à Vancouver lorsque Carl est mort.
Je n'ai jamais tué personne.
Gabriel est coupable.
François et moi sommes copains.

Benoît déclare :
Je n'ai pas tué Carl.
Je n'ai jamais possédé de revolver de ma vie.
Gabriel me connaît.
J'étais à Winnipeg le 14 février au soir.

Édouard déclare :
Benoît ment lorsqu'il dit qu'il n'a jamais possédé de revolver.
Le meurtre a été commis à la Saint-Valentin.
Alex était à Vancouver au moment du crime.
L'un de nous cinq est coupable.

François déclare :
Je n'ai pas tué Carl.
Gabriel n'a jamais été à Gimli.
Je n'ai jamais vu Alex auparavant.
Benoît était à Winnipeg avec moi le 14 février au soir.

Gabriel déclare :
Je n'ai pas tué Carl.
Je n'ai jamais été à Gimli.
Je n'ai jamais vu Benoît auparavant.
Alex a menti lorsqu'il a dit que j'étais coupable.

Le moment est maintenant venu pour toi d'aider Renaud Dufer à déterminer le meurtrier de Carl Dijon.

6. Carrés magiques

Les carrés magiques ont une longue histoire et paraissent dans les écrits et l'art de bien des cultures depuis des siècles. Un carré magique est un carré de nombres dont la somme de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque diagonale a la même valeur. Si le carré a un nombre de cellules impair, on dit qu'il est un carré magique d'ordre impair; s'il a un nombre de cellules pair, il est d'ordre pair. Par exemple, un carré magique d'ordre 3 paraît à la gauche ci-dessous.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figure 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figure 2

Le carré magique d'ordre 4 à la droite ci-dessus paraît dans une gravure de l'artiste allemand Albrecht Dürer (1471-1528). On dit que cette gravure est l'une des premières parutions de carrés magiques en Occident. Ce carré magique en particulier a plusieurs propriétés intéressantes. Entre autres, les deux carrés du centre au bas indiquent la date de la gravure intitulée « Melancholia », soit 1514. Quelle est la somme magique de ce carré?

Dans le cadre de cette activité, nous examinerons d'abord les carrés magiques en utilisant un dénombrement à partir de 1. Les rangées et les colonnes du carré ci-dessus peuvent être réarrangées de diverses façons sans modifier la somme de 15 dans chaque direction. Il existe 8 carrés magiques d'ordre 3 au total. Les 7 autres peuvent être produits à partir du carré ci-dessus. En voici quatre :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1. Essaie de trouver les trois autres.

Carrés magiques : Posamentier, A.S. et J. Stepelman. Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units. Copyright © 1990 par Merrill.

Examinons comment construire un carré magique d'ordre 3.

- Inscris d'abord 1 dans la cellule du milieu dans la rangée du haut.
- Ensuite, inscris le nombre suivant en le déplaçant d'une cellule vers le haut et une vers la droite (voir 2).
- Si tu dois sortir du carré de base, inscris le nombre dans la cellule correspondante du carré extérieur.
- Lorsque la cellule prévue est occupée, inscris ce nombre dans la cellule immédiatement sous le nombre précédent.
- Reprends le procédé. Le 4 doit être placé directement sous le 3.

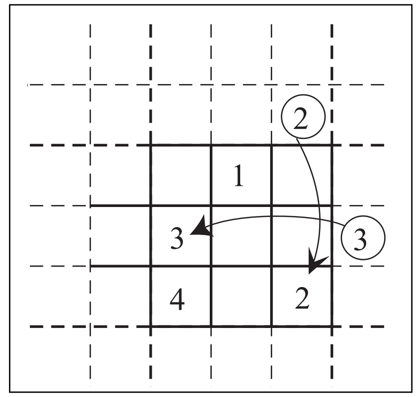


Figure 3

Remplis le carré et vérifie s'il est vraiment magique.

2. À l'aide du procédé ci-dessus, crée un carré magique d'ordre 5. Assure-toi qu'il est exact en additionnant toutes les rangées, les colonnes et les diagonales. De combien de façons peux-tu réarranger ces rangées et ces colonnes de manière à conserver un carré magique?

3. Examine le carré magique de Dürer ci-contre. La somme magique du carré est de 34 (c.-à-d. que la somme de chaque rangée, colonne ou diagonale est égale à 34). Essaye de confirmer les propriétés additionnelles suivantes :
   a) Les quatre coins ont une somme de 34.
   b) Les carrés 2 x 2 des quatre coins ont une somme de 34.
   c) Le carré 2 x 2 du centre a une somme de 34.
   d) La somme des chiffres des deux diagonales est égale à la somme des chiffres qui ne font pas partie des diagonales.
   e) La somme des carrés des chiffres des diagonales (748) est égale à la somme des carrés des chiffres qui ne sont pas dans les diagonales.

Il existe plusieurs approches à la création de carrés magiques d'ordre pair, mais les procédés sont plus compliqués que dans le cas des carrés magiques d'ordre impair. Nous examinerons une méthode pour les carrés ayant un ordre de multiple 4, plus particulièrement les carrés d'ordre 4 et 8.
Examine d'abord la construction d'un carré d'ordre 4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 4

Commence par le carré contenant des chiffres dans l'ordre donné à la page V-B-11.(voir : fig.4). Les diagonales ont été ombrées. Inverse la position des nombres de chaque diagonale. (***Nota* :** le nombre original et le nouveau nombre = $n^2 + 1 = 17$). Cela produira le deuxième carré (voir : fig.5), un carré magique. Dürer a simplement interchangé les deuxième et troisième colonnes pour obtenir son carré magique.(voir : fig.2)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Figure 5

4. Combien de variations magiques de ce carré peux-tu trouver?

Un procédé semblable est utilisé pour produire un carré magique d'ordre 8.

Pour construire un carré magique 8 x 8, divise le carré en carrés 4 x 4 comme ci-dessous. Ensuite, remplace chacun des nombres d'une diagonale par son complément. Ici, la somme doit être $n^2 + 1 = 65$. Le carré magique qui en résulte paraît ci-dessous à droite.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

5. Vérifie que ton carré 8 x 8 est bel et bien magique. Quelle est la somme magique?
6. À l'aide de ces procédés, crée un carré magique d'ordre 12.
7. Peux-tu prédire la somme magique de tout carré magique d'ordre n?

7. Probabilité de remporter la loterie

Problème 1

La Loto 6/49 est la loterie nationale du Canada dans le cadre de laquelle les joueurs peuvent créer leur propre billet en sélectionnant 6 chiffres allant de 1 à 49. Deux fois par semaine, un tirage au sort détermine les six numéros gagnants réguliers. Si un billet contient ces six numéros, le détenteur remporte le gros lot. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant acheté un seul billet remporte le gros lot de la 6/49?

Pour résoudre ce problème, il faut déterminer le nombre total de billets de loterie possibles. Avant de faire la sélection de 6 chiffres sur 49, examinons quelques exemples plus simples.

A. De combien de façons est-il possible de choisir 2 sur 4 livres si l'ordre de sélection des livres n'a aucune importance?

Inscris A, B, C et D sur les livres. Tu peux choisir :

A,B	A,C	A,D
B,C	B,D	
C,D		

Il existe six choix possibles au total.

B. De combien de façons est-il possible de choisir 2 sur 5 livres si l'ordre de sélection n'a aucune importance?

Inscris A, B, C, D et E sur les livres. Tu peux choisir :

A,B	A,C	A,D,	A,E
B,C	B,D	B,E	
C,D	C,E		
D,E			

Il existe dix choix possibles au total.

Est-il possible de calculer les combinaisons sans toutes les énumérer? (Les listes sont pratiques pour les petits nombres de combinaisons, mais deviendraient trop longues rapidement.)

Avec l'option de choisir 2 livres de 4, il existe 4 possibilités pour le premier livre : A, B, C ou D. Après avoir choisi le premier livre, il ne reste plus que 3 possibilités pour le deuxième livre; si A est choisi d'abord, il ne reste plus que B, C ou D.

Probabilité de remporter la loterie : P. Nikolopoulos. « Letter to the Editor. » Mathematics Teacher.

Si tu multiplies ces choix, tu obtiens 4 x 3 = 12 options, soit deux fois le nombre que nous avions d'abord trouvé! Pourquoi? Le choix A,B est en fait le même choix que B,A lorsque l'ordre de sélection n'a pas d'importance. Donc, chaque combinaison représenterait deux choix différents si l'ordre de sélection avait une importance.

Essaie l'option de 5 livres et de 2 choix :	Premier livre :	5 choix
	Deuxième livre :	4 choix

Pour trouver le nombre de choix si l'ordre de sélection a une importance, multiplie 5 fois 4 pour une réponse de 20.

Pour trouver le nombre de choix si l'ordre de sélection n'a pas d'importance, divise 20 par 2 pour une réponse de 10.

Essaie un autre exemple.

C. De combien de façons est-il possible de choisir 4 sur 6 livres si l'ordre de sélection n'a aucune importance?

Inscris A, B, C, D, E et F sur les livres, puis dresse une liste des combinaisons possibles.

A,B,C,D	A,B,C,E	A,B,C,F	A,B,D,E	A,B,D,F
A,B,E,F	A,C,D,E	A,C,D,F	A,C,E,F	A,D,E,F
B,C,D,E	B,C,D,F	B,C,E,F	B,D,E,F	C,D,E,F

Il existe 15 combinaisons. À l'aide de calculs, nous obtenons :

premier livre : 6 choix	deuxième livre : 5 choix
troisième livre : 4 choix	quatrième livre : 3 choix

6 x 5 × 4 x 3 = 360.

Pourquoi les réponses diffèrent-elles ainsi? Comme le démontrent les exemples ci-dessus, l'ordre de sélection n'a pas été retenu. Chaque combinaison de quatre livres peut être arrangé en 4 x 3 x 2 x 1 = 24 façons. (Il est possible de positionner le premier livre de quatre façons, le deuxième livre de trois façons et le troisième livre de deux façons. Il n'y a qu'une façon de positionner le quatrième livre.)

Donc, le nombre de façons de sélectionner 4 sur 6 livres si l'ordre n'a pas d'importance est :

$$\frac{360}{24} = 15$$

En quoi cela peut-il aider à résoudre le problème original? Il faut choisir 6 chiffres de 49 choix possibles. Donc, le calcul est :

$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816$$

La probabilité de remporter la Loto 6/49 est donc :

$$\frac{1}{13\,983\,816} = 0{,}000\,000\,071\,5$$

À quel point le chiffre 0,000 000 071 5 est-il petit? Le problème qui suit aide à démontrer les probabilités minimes de remporter la loterie.

Problème 2

Visualise une ligne de pièces de 25 ¢ placées côte à côte de Toronto à Vancouver, une distance d'environ 4 000 km. Ensuite, suppose que seule une de ces pièces est en position face. Si une personne marche de Toronto à Vancouver sur cette ligne de 25 ¢ et arrête soudainement, quelle est la probabilité que cette personne ait le pied sur la pièce en position face?

Pour résoudre ce problème, réponds aux questions suivantes :

1. Quel est le diamètre d'une pièce de 25 ¢ (en centimètres)?
2. À l'aide de la réponse à la question 1, combien de 25 ¢ faut-il pour former une ligne de 4 000 km?
3. Quelle est la probabilité d'avoir le pied sur la pièce en position face? Exprime ta réponse sous forme de fraction et comme décimale. En quoi ce chiffre est-il comparable à la probabilité de remporter la loterie?

Il est plus probable que cet événement se produise que de remporter la 6/49!

Si la probabilité de remporter la loterie est si minime, pourquoi y a-t-il des gagnants chaque semaine? (En fait, certaines semaines, il n'y a pas de gagnant.) Suppose que 5 millions de personnes marchent sur cette ligne de 25 ¢. Si elles s'arrêtent toutes soudainement, la chance qu'une de ces personnes ait le pied sur la pièce en position face est de 37,5 %.

4. Pourquoi la probabilité est-elle de 37,5 % si 5 millions de personnes marchent sur la ligne de 25 ¢?