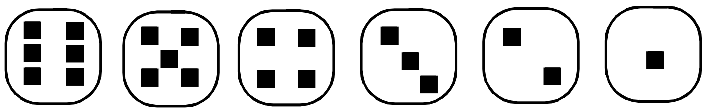
Unité F : Applications reliées à la probabilité

Demi-cours IV
Guide de l'élève

Leçon n° 1 : Probabilité : introduction

Le domaine des mathématiques traitant de la probabilité a pris naissance au XVIe siècle, lorsque le médecin et mathématicien italien Giralamo Cardano a rédigé le premier livre à ce sujet, *Le livre sur les jeux de hasard*. Comme on commença à comprendre davantage les concepts liés à la probabilité, les mathématiciens décidèrent de les mettre en application dans d'autres domaines d'étude. Aujourd'hui, notre compréhension à l'égard de ces concepts est essentielle en ce qui concerne les sciences, la médecine, le commerce et les sports.

Il est possible de déterminer la probabilité de certains événements par le rapport entre deux nombres. Constatons les probabilités associées au lancer d'un dé. Lorsqu'on lance un dé, il existe six possibilités différentes, soit :



Si le dé n'est pas truqué, la possibilité que l'un des six chiffres soit lancé est égale. On peut exprimer le rapport indiquant qu'un cinq, par exemple, soit lancé par 1:6 ou 1/6. C'est-à-dire que des six possibilités, seule une d'entre elles peut être un cinq.

Généralement, on peut trouver la probabilité en comparant deux nombres.

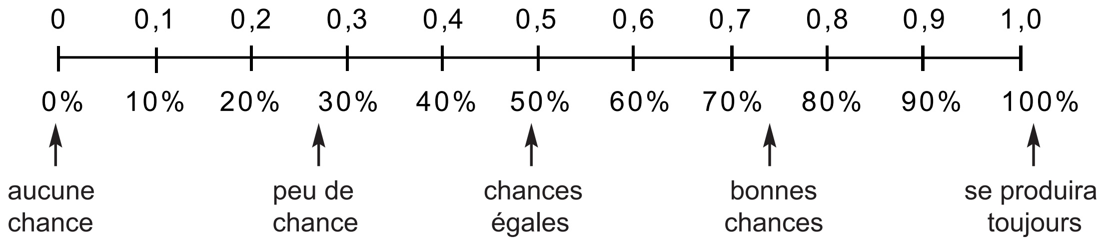
$$\text{Probabilité d'un événement} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Il est possible d'exprimer cette probabilité de diverses façons :

- rapport 1:6
- fraction $\frac{1}{6}$ (réduire les fractions)
- décimale 0,166 6 . . . $(1 \div 6)$
- pourcentage $\approx$ 17 % $(1 \div 6) \times 100$
- mots presque 17 lancers sur 100

Nota : Bien que la probabilité de lancer un cinq soit de 1 sur 6, cela ne signifie pas que si tu lançais le dé six fois, ***un*** de ces lancers serait un cinq. Toutefois, plus tu lanceras le dé, plus tu te rapprocheras de la probabilité 1:6.

L'écart de probabilité pour un événement est indiqué ci-dessous sur l'échelle de probabilité.



Plus la probabilité est élevée, plus il y a des chances que l'événement se produise.

Exemple 1

À l'heure actuelle, si tu habites le Canada, la probabilité d'avoir les cheveux d'une couleur en particulier est indiquée au tableau ci-dessous.

Couleur	Rapport	Décimal	%
Brun	7:10		
Blond	1:7		
Noir	1:10		
Roux	1:17		
	Total		

Remplis le tableau ci-dessus en exprimant les probabilités en décimale et en pourcentage.

a) Dans une classe de 30 élèves, environ 70 % devraient avoir les cheveux bruns. Ce pourcentage est équivalant à 21 élèves (30 x 70 %). Selon le nombre d'élèves dans la classe, combien de personnes devraient avoir chaque couleur de cheveux?

b) Compare ces estimations aux résultats réels. Explique les différences.

Devoir : Probabilité : introduction

1. La probabilité de naissance de jumeaux est de 1/90.
   a) Dans une année où il y a eu 27 000 naissances, combien d'entre elles auraient été des jumeaux?
   b) Combien de jumeaux auraient été nés s'il y avait eu 100 000 naissances?

2. De récentes statistiques de la LNH indiquent que 15 buts ont été marqués en désavantage numérique dans le cadre de 540 pénalités.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'un but soit marqué en désavantage numérique au cours d'une pénalité?
   b) Selon cette probabilité, détermine combien de buts marqués en désavantage numérique seraient comptés en 84 parties par une équipe moyennant 9 pénalités par match.
   c) Ces résultats seraient-ils identiques pour toutes les équipes? Pourquoi ou pourquoi pas?

3. Selon de récentes statistiques tirées de la Société d'assurance publique du Manitoba, de 210 Pontiac Firebird assurées, 30 ont été volées l'année dernière.
   a) Si tu es propriétaire d'une Firebird, quelle est la probabilité pour qu'elle se fasse voler?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'elle ne se fasse pas voler?
   c) Selon toi, quel effet cette probabilité aura-t-elle sur le montant de ta prime d'assurance pour ta voiture?

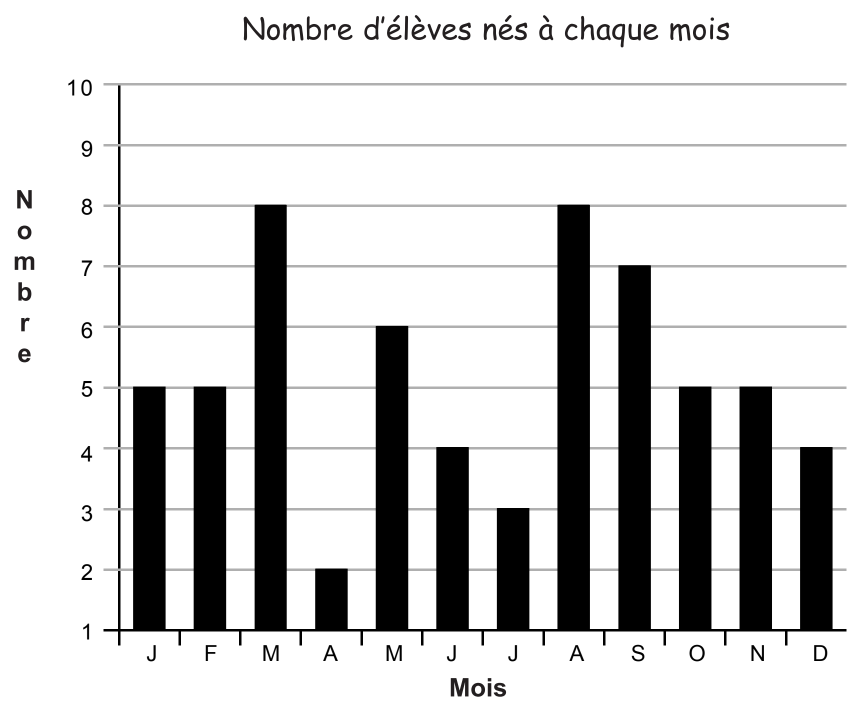
4. Les sociétés d'assurance ont recours à des statistiques et aux probabilités afin de calculer les primes. Le tableau ci-dessous indique le nombre de personnes vivantes sur 100 000 à l'âge de 10 ans qui seront toujours en vie à 30, 50, 70 et 90 ans.

Âge (en années)	10	30	50	70	90
Nombre de personnes vivantes	100 000	95 200	82 455	46 751	2 285
Probabilité (décimale)	1,000				
Probabilité (%)	100				

   a) Remplis le tableau en calculant la probabilité (décimale et %) qu'un enfant de 10 ans atteigne chaque âge.
   b) À 30 ans, 95 200 personnes seront toujours en vie. Quelle est la probabilité qu'une personne de 30 ans vive jusqu'à l'âge de 50, 70 ou 90 ans?
   c) À 50 ans, 82 455 personnes seront toujours vivantes. Quelle est la probabilité qu'une personne de 50 ans soit toujours en vie à 70 et 90 ans?
   d) Selon toi, pourquoi les primes d'assurance sont plus élevées pour les personnes plus âgées?

5. On épelle les mots **probabilité** et **statistique** au Scrabble. Les lettres sont mises dans un sac. Quelle est la probabilité pour que chaque événement ci-dessous se produise si on retire une lettre du sac au hasard? (rapport, décimale et pourcentage)
   a) une consonne est tirée du sac
   b) une voyelle est tirée
   c) la première lettre de l'alphabet est tirée
   d) la lettre T est tirée

6. Les élèves de deux cours de mathématiques du secondaire 3 doivent indiquer à quel mois ils sont nés. Le graphique indique les résultats.



   Détermine la probabilité pour que chacun des événements suivants se produise (rapport, décimale et pourcentage).
   a) Un élève est né au mois de juillet.
   b) Un élève est né en mars, en avril ou en mai.
   c) Un élève n'est pas né en août.
   d) Ces probabilités seraient-elles justes en ce qui concerne tous les élèves du secondaire 3 au Manitoba? Explique ta réponse.

7. Si on te disait que la probabilité pour qu'un avion s'écrase lors d'un vol était de 0,01, serait-ce une probabilité acceptable? Explique ta réponse.

8. Un dé est lancé 25 fois. À 20 reprises, un six a été lancé. Selon toi, s'agit-il d'un dé truqué? Explique ton raisonnement.

9. Représente les données suivantes sous forme d'échelle de probabilité (comme celle à la page IV-F-4), puis décris la probabilité de chaque événement à l'aide des mots tirés de l'échelle.
   a) Demain, on annonce une probabilité de neige de 30 %.
   b) La probabilité de remporter un prix à un tournoi de curling est de 0,05.
   c) La probabilité pour qu'un homme atteigne l'âge de 90 ans est de 0,000 1.
   d) Les chances que le quart d'une équipe de football réussisse une passe est de 0,635.

10. Tu es inspecteur sur la maladie de l'***orme*** pour la ville de Winnipeg. En faisant le tour de la ville, tu recueilles 30 échantillons d'arbres choisis au hasard. Après une analyse attentive, tu découvres que 12 de ces arbres ont la maladie.
    a) Selon tes observations, quelle est la probabilité qu'un orme soit atteint de la maladie à Winnipeg?
    b) S'il existe 4 545 arbres dans un secteur de la ville, combien pourraient être atteints de la maladie? Quelles suppositions fais-tu à partir de tes calculs?

11. Un élève affirme avoir 50 % de chances de réussir un examen à choix multiple pour lequel chaque question compte 4 réponses possibles.
    a) Es-tu d'accord avec son raisonnement?
    b) Quelle chance a-t-il de réussir son prochain test de maths? Explique ta réponse.

12. On exprime la moyenne au bâton au baseball par une décimale à trois chiffres. Il s'agit du rapport entre le nombre total de coups sûrs au nombre total de présences au bâton.

    Par exemple, si un frappeur obtient 12 coups sûrs au cours de ses 33 présences au bâton, sa moyenne au bâton serait la suivante : 12 ÷ 33 = 0,363 636 3… ou 0,364 (soit une très bonne moyenne).

    Cette moyenne représente la probabilité pour qu'un frappeur obtienne un coup sûr à chaque présence au bâton. Ainsi, ce frappeur aura en moyenne 364 coups sûrs au cours de 1 000 présences au bâton. Autrement dit, il frappera un coup sûr 36 % de ses présences au bâton.
    a) Que signifie une moyenne au bâton de 0,250?
    b) Que signifie une moyenne au bâton de 1,000?
    c) Que signifie une moyenne au bâton de 0,000?
    d) Si la moyenne au bâton d'un frappeur est de 0,325, combien de coups sûrs frapperait-il au cours de 100 présences au bâton?

orme : (nom m.) grand arbre à bois dur

Leçon n° 2 : Comparaison de la probabilité et de la chance

Il existe une autre façon d'évaluer la probabilité d'un événement; il s'agit de déterminer ***les chances défavorables à cet événement*** ou ***les chances favorables à cet événement.***

Dans le cadre de la première activité, nous avons évalué la probabilité d'obtenir un 5 au lancer d'un dé. Nous avons constaté qu'il est possible d'exprimer la probabilité par un rapport des cas favorables au nombre de cas possibles. Ainsi, la probabilité de lancer un 5 était de 1:6.

Les ***chances défavorables*** au lancer d'un 5 sont exprimées par un rapport du nombre total de cas défavorables au nombre total de cas favorables. Pour ce qui est de cet exemple, il existait cinq cas défavorables (1, 2, 3, 4, 6) et un cas favorable (5). Ainsi, les chances défavorables au lancer d'un 5 sont de ***5:1***.

Par conséquent, chaque fois que le dé est lancé, il y a une possibilité d'obtenir 5 résultats défavorables pour chaque résultat favorable.

Les ***chances favorables*** au lancer d'un 5 sont exprimées par un rapport du nombre total de cas favorables au nombre total de cas défavorables. Pour ce qui est de cet exemple, il existait un résultat cas favorable (5) et cinq cas défavorables (1, 2, 3, 4, 6). Ainsi, les chances favorables au lancer d'un cinq sont de ***1:5***.

Par conséquent, chaque fois que le dé est lancé, il y a une possibilité d'obtenir 1 résultat favorable pour 5 résultats défavorables.

Généralement, il est possible de calculer les chances de la façon suivante :

$$\text{Chances défavorables à l'événement} = \frac{\text{nombre de résultats non désirés}}{\text{nombre de résultats désirés}}$$

$$\text{Chances favorables à l'événement} = \frac{\text{nombre de résultats désirés}}{\text{nombre de résultats non désirés}}$$

a) Quelles sont les chances défavorables au lancer d'un nombre supérieur à 2?

b) Quelles sont les chances favorables au lancer d'un nombre inférieur à 5?

c) Si tu lances une pièce de monnaie à deux reprises, quelles sont les chances :

   i) favorables à l'obtention pile à ces deux reprises?

   ii) défavorables à l'obtention de face à ces deux reprises?

On compte des différences importantes entre la probabilité et la chance, notamment :

a) La probabilité d'un événement constitue toujours une fraction entre 0 et 1.

b) La probabilité pour qu'un événement se produise, ainsi que la probabilité pour que le même événement ne se produise pas, est toujours égale à 1.

c) Comme on exprime la chance en tant que rapport des cas favorables aux cas défavorables, ou vice versa, elle peut être supérieure ou inférieure à 1, mais pas inférieure à zéro.

Devoir : Comparaison de la probabilité et de la chance

1. Un dé est lancé une fois.
   a) Quelles sont les chances défavorables à l'obtention d'un 4?
   b) Quelles sont les chances favorables à l'obtention d'un 3?
   c) Quelles sont les chances défavorables à l'obtention d'un nombre impair?

2. La probabilité d'être obligé de jouer des manches supplémentaires au baseball est de 0,09.
   a) Quelles sont les chances de jouer des manches supplémentaires?
   b) Quelles sont les chances de jouer un jeu réglementaire (9 manches seulement)?

3. La loterie constitue un concours dans le cadre duquel chaque billet participant a des chances égales de gagner. Dans la plupart des cas, on peut acheter plus d'un billet. Supposons que tu participes à deux loteries et que tu achètes le nombre de billets indiqués ci-dessous.

Loterie	Nombre de billets que tu as achetés	Nombre de billets achetés par d'autres personnes
A	10	140
B	6	90

   a) Quelle est la probabilité de gagner à la loterie A?
   b) Quelles sont les chances défavorables à l'achat d'un billet gagnant à la loterie A?
   c) Quelle est la probabilité de gagner à la loterie B?
   d) Quelles sont les chances défavorables à l'achat d'un billet gagnant à la loterie B?
   e) À quelle loterie as-tu plus de chances de gagner?

4. Les chances défavorables de gagner à une loterie sont de 1299:1, et contre une autre sont de 3450:3.
   a) Quelle est la probabilité de gagner à chaque loterie?
   b) À quelle loterie as-tu plus de chances de gagner? Explique ta réponse.

5. Dans une classe de 32 élèves comptant 14 filles, on choisit un élève au hasard.
   a) Quelles sont les chances pour qu'un garçon soit choisi?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'une fille soit choisie?
6. On choisit une lettre tirée du mot « probabilité » au hasard.
   a) Quelles sont les chances pour que cette lettre soit une voyelle?
   b) Quelles sont les chances pour que cette lettre soit une consonne?
   c) Quelles sont les chances pour que cette lettre soit un « i »?
7. Dans une boîte, on trouve 36 jetons rouges, 24 jetons bleus et 40 jetons verts. Si tu piges un jeton au hasard, quelles sont les chances :
   a) défavorables au choix d'un jeton rouge?
   b) qu'il ne s'agisse pas d'un jeton vert?
   c) favorables au choix d'un jeton bleu?
8. La phobie du chiffre 13 s'appelle la triskaidékaphobie. Le vendredi tombe un 13e jour du mois à 48 reprises sur une période de 28 ans.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'un vendredi tombe le 13e jour d'un mois?
   b) Quelles sont les chances favorables à cet événement? défavorables?
9. Les chances qu'une famille de trois enfants n'ait que des filles sont de 1 contre 7.
   a) Quelle est la probabilité pour que cet événement se produise?
   b) Si on mène une enquête auprès de 32 familles de trois enfants, combien d'entre elles seraient probablement composées de 3 filles?
10. À l'***hippodrome***, les chances qu'un cheval ne remporte pas la course sont déterminées selon la **probabilité** qu'il soit apte à la gagner. Par exemple, si la probabilité pour qu'un cheval gagne une course est de 20 %, on peut déterminer les chances de la façon suivante :

    Une probabilité de 20 % signifie que le cheval pourrait gagner 20 sur 100 courses semblables à la première. Ainsi, il perdrait 80 de ces courses.

    Les chances défavorables à la victoire du cheval sont de 80:20 ou de 4:1. Calcule les chances suivantes :

Probabilité qu'un cheval gagne	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
Chances qu'il ne gagne pas									

hippodrome : (nom m.) piste de course pour les chevaux

Leçon n° 3 : La probabilité et la génétique

En génétique, on se sert souvent des concepts liés à la probabilité et aux calculs. Le fait de comprendre la probabilité t'aidera à mieux saisir les variations génétiques qui se produisent dans la nature et chez l'être humain.

Lorsqu'une cellule spermatique fusionne avec un ovule afin de former la conception d'une nouvelle créature, d'une plante ou d'un humain, un remaniement se fait au sein des gènes de la lignée maternelle et de la lignée paternelle. Les paires de gènes qu'aura la nouvelle créature est fondée sur la chance. Pour chaque paire, un gène est choisi au hasard de la paire du parent paternel et un gène est choisi au hasard de la paire du parent maternel.

Exemple 1

Un botaniste travaillant dans une ***serre*** tente de concevoir une nouvelle sorte de fleur. Il effectue un croisement entre une sorte de plante ayant des fleurs rouges et une autre plante ayant des fleurs blanches. De quelle couleur seront les fleurs des nouveaux ***semis***?

Il est possible de mieux comprendre ce type de problème à l'aide d'une matrice de probabilité. La plante à fleurs rouges a deux gènes pour le rouge, représentés par R et R dans la rangée du haut de la matrice. La plante à fleurs blanches a deux gènes pour le blanc, représentés par B et B dans la colonne de gauche de la matrice. Lorsqu'on fait un croisement pollinique, chaque parent contribue un gène à chaque semis.

		Fleurs rouges	
		R	R
Fleurs blanches	B	RB	RB
	B	RB	RB

Le diagramme ci-dessus démontre comment les gènes rouges et blancs peuvent être fusionnés au sein des semis pour former un croisement de première génération.

Si la plante a deux gènes R, la fleur est rouge.

Si la plante a deux gènes B, la fleur est blanche.

Si la plante a un gène R et un gène B la fleur est rose.

serre : (nom f.) abri vitré où l'on cultive des végétaux

semis : (nom m.) jeunes plants provenant de graines

Comme il est possible de voir à la matrice, il n'existe qu'une possibilité en ce qui a trait aux semis de première génération. Tous les semis seront roses, car dans chaque cas, le gène R de la plante à fleurs rouges fusionnera avec le gène B de la plante à fleurs blanches.

Par conséquent, P (fleurs roses) = 4:4, 1 ou 100 %. Il s'agit d'un événement certain.

Ce type de situation devient plus intéressant en matière de probabilité lorsque le botaniste prend deux de ces semis de première génération et fait un croisement afin de produire une deuxième génération de semis.

Devoir n° 1 : La probabilité et la génétique

1. Remplis le tableau ci-dessous afin de déterminer la probabilité de diverses fleurs de couleur des semis de deuxième génération.

   RR = rouge

   RB = rose

   BB = blanc

		Fleurs roses	
		R	B
Fleurs roses	R		
	B		

2. Détermine les probabilités suivantes :

   P(fleurs roses) =

   P(fleurs rouges) =

   P(fleurs blanches) =

3. Quelles sont les chances en faveur de fleurs rouges? fleurs roses? fleurs blanches?

4. Si le botaniste croisait 1000 paires de plantes comme celles-là, combien de plantes de chaque couleur seraient produites?

5. Détermine les possibilités si un botaniste croise une plante à fleurs roses avec une plante à fleurs rouges. Détermine la probabilité et les chances favorables à chacune des couleurs.

Exemple 2

Comment peut-on expliquer les différences et les ressemblances parmi des enfants de la même famille? Comment une caractéristique physique d'un grand-parent peut-elle « sauter une génération » puis apparaître chez son petit-enfant?

Par exemple, la structure de la partie inférieure de ton oreille est un trait héréditaire. Certaines personnes ont des lobules ***non adhérents***; il y a un espace entre le lobule et le côté du visage. D'autres personnes ont des lobules ***adhérents***; le bas du lobule est rattaché directement au côté du visage.

Supposons que le père d'une famille a des ancêtres ayant des lobules non adhérents et que les ancêtres de la mère ont des lobules adhérents. Quels types de lobules leurs enfants auront-ils? Il est possible de se servir d'une matrice de probabilité pour résoudre ce problème.

N = lobules non adhérents

a = lobules adhérents

		Père	
		N	N
Mère	a	Na	Na
	a	Na	Na

Comme tu peux le voir, tous les enfants de ces parents hériteraient le gène de lobules non adhérents (N) de leur père et le gène de lobules adhérents (a) de leur mère. Toutefois, au sein de cette famille, ***tous les enfants auront des lobules non adhérents*** même s'ils sont aussi porteurs du gène de lobules adhérents. Comment est-ce possible?

Comme le gène de lobules non adhérents a un effet plus « fort », on dit qu'il s'agit d'un gène ***dominant***. Le gène de lobule adhérent, lui, n'a pas autant d'influence, alors on le qualifie de gène ***récessif***. Même si celui-ci est présent, le gène dominant N a pour effet de donner aux enfants des lobules non adhérents. La probabilité pour que les enfants du couple aient des lobules non adhérents est de 100 %; il s'agit d'un événement certain.

On qualifie de ***pur*** le trait d'une personne ayant deux gènes semblables, tandis que la caractéristique d'une personne ayant deux gènes différents est dite ***hybride***.

Devoir n° 2 : La probabilité et la génétique

Supposons que le père et la mère sont tous deux hybrides pour ce qui est des lobules non adhérents. Quels types de lobules leurs enfants auront-ils?

1. Remplis la matrice de probabilité ci-dessous afin de résoudre le problème.

		Père	
		N	a
Mère	N		
	a		

2. Combien d'enfants auraient des lobules non adhérents? ______
3. Combien d'enfants auraient des lobules adhérents? ______
4. Quelle est la probabilité d'enfants qui auraient des lobules non adhérents?______
5. Quelle est la probabilité d'enfants qui auraient des lobules adhérents? ______
6. Combien d'enfants seraient « pur » pour ce qui est des lobules non adhérents?______
7. Combien d'enfants seraient « pur » pour ce qui est des lobules adhérents? ______
8. Combien d'enfants seraient « hybride »? ______

Il est impossible de savoir en jetant un simple regard à quelqu'un ayant un trait dominant s'il est pur ou hybride pour ce trait. Les deux types d'oreilles sont identiques. Cependant, la caractéristique des gens ayant des lobules adhérents doit être pure.

Exemple 3

Il existe de nombreux traits dominants et récessifs chez les êtres humains. Le tableau ci-dessous en énumère quelques-uns.

Trait dominant	Trait récessif
taches de rousseur	pas de taches de rousseur
couleur de peau normale	couleur de peau albinos
grandes oreilles	petites oreilles
cheveux foncés	cheveux rouges
vision normale	***daltonien***
longs cils	cils courts
myope	vision normale
groupe sanguin A ou B	groupe sanguin O
narines larges	narines étroites

Les gènes ne sont pas tous entièrement dominants ou récessifs. Dans certains cas, la présence des deux gènes peut entraîner la « fusion » des traits. On appelle ce procédé la *dominance incomplète*. Un bon nombre des gènes humains démontrent une dominance incomplète entraînant un mélange des traits (par exemple, les gènes relatifs à la couleur de la peau et à la grandeur).

Lorsque des plantes à fleurs blanches et rouges produisent des semis roses, il s'agit d'un exemple de la dominance incomplète. Il faut cependant prendre note que même si les semis sont roses, ils conservent leurs gènes rouges et blancs. C'est pourquoi à la deuxième génération, des plantes pures rouges et pures blanches sont produites.

Devoir n° 3 : La probabilité et la génétique

Résous les problèmes ci-dessous à l'aide d'une matrice de probabilité.

1. Comment des parents hybrides pour les cheveux foncés peuvent-ils produire des enfants aux cheveux roux et aux cheveux foncés? Quelles seraient la probabilité et les chances favorables à chaque couleur de cheveux? Quelles seraient la probabilité et les chances favorables à des cheveux roux purs, foncés purs et foncés hybrides?
2. Comment se fait-il que deux parents albinos puissent uniquement avoir des enfants albinos?
3. Un parent d'une famille est pur pour ce qui est des cils longs. L'autre parent est hybride. Quelles sont les différentes possibilités pour leurs enfants? Quelle est la probabilité de chaque cas?
4. Un parent d'une famille est pur daltonien. La vision de l'autre parent est normale. Quels sont les deux résultats possibles pour leurs enfants? Quelle est la probabilité de chaque cas?

daltonien : (adj.) qui a une anomalie de la vue relative à la perception des couleurs

Exemple 4

Les humains héritent d'un groupe sanguin de la même façon qu'ils héritent de lobules adhérents ou non adhérents. On les sépare en quatre groupes différents selon la présence ou l'absence d'un agglutinogène particulier. Une personne ayant l'agglutinogène A est du groupe sanguin A. Une personne ayant l'agglutinogène B est du groupe sanguin B. Une personne ayant les agglutinogènes A et B est du groupe sanguin AB et une personne qui n'a ni l'un ni l'autre est du groupe sanguin O. Les agglutinogènes A et B sont dits ***dominants***. L'absence de ces agglutinogènes indique un gène ***récessif***. Ainsi, il existe six combinaisons de gènes possibles et quatre groupes sanguins possibles.

Combinaison de gènes	AA	AO	BB	BO	AB	OO
Groupe sanguin	A	A	B	B	AB	O

Il est important de connaître le groupe sanguin d'une personne, car son sang possède des anticorps susceptibles de réagir contre l'antigène* ou les agglutinogènes qui ne sont pas présents dans ses cellules rouges. Ainsi, une personne de type A a les anticorps de l'antigène de type B. Si on donne du sang de type B à une personne du groupe sanguin A, une réaction allergique appelée agglutination se manifeste. Cette réaction produit des caillots, ce qui bloque la circulation du sang et, par conséquent, entraîne la mort. S'ils connaissent leur groupe sanguin, des parents peuvent prédire à quel groupe sanguin leurs enfants appartiendront.

*Un antigène est une substance qui, introduite dans la circulation sanguine, stimule la production d'anticorps.

Devoir n° 4 : La probabilité et la génétique

À l'aide d'une matrice de probabilité, détermine quels groupes sanguins seront produits :

a) par le croisement d'une mère au type A et d'un père au type O;

b) par le croisement d'un père au type B et d'une mère au type A pur;

c) par le croisement d'une mère au type O et d'un père au type B.

Pour chaque question : Détermine les groupes sanguins possibles qu'un enfant pourrait avoir ainsi que la probabilité pour qu'il hérite chaque type.

Leçon n° 4 : La probabilité et l'espérance mathématique

Exemple 1

Supposons que tu joues à un simple jeu dans le cadre duquel tu recevras 3 $ si tu lances un 5 à l'aide d'un dé à cinq côtés. Si chaque lancer coûte 1 $, le jeu présente-t-il un risque financier équitable?

Afin de déterminer s'il s'agit d'un jeu favorable, il faut :

a) trouver la probabilité de lancer un 5 ou non;

Probabilité de lancer un 5 :	1:5 ou 1/5 ou 0,2 ou 20 %
Probabilité de ne pas lancer un 5 :	4:5 ou 4/5 ou 0,8 ou 80 %

b) déterminer les gains pour ce qui est de chaque probabilité (argent gagné – coût d'un lancer);

Si un 5 est lancé :	3,00 $ – 1,00 $ = +2,00 $ (gain)
Si ce n'est pas un 5 :	0,00 $ – 1,00 $ = –1,00 $ (perte)

c) déterminer l'***espérance mathématique*** pour ce jeu en multipliant chaque gain ou perte par la probabilité, et en calculant la somme de ces produits.

Espérance mathématique = 0,2 (+2,00 $) + 0,8 (–1,00 $)
= 0,40 $ + –0,80 $
= –0,40 $

Bref, dans le présent cas, si tu jouais à ce jeu à plusieurs reprises, tu perdrais en moyenne 0,40 $ à chaque jeu; voilà l'espérance mathématique. *Ainsi, ce jeu ne constitue pas un risque financier souhaitable à prendre.* C'est-à-dire,

si tu joues 10 parties, tu peux t'attendre à perdre 10 (0,40 $) = 4,00 $;

si tu joues 50 parties, tu peux t'attendre à perdre 50 (0,40 $) = 20,00 $;

si tu joues 100 parties, tu peux t'attendre à perdre 100 (0,40 $) = 40,00 $.

Pour un jeu ayant une espérance mathématique < 0, tu perdras de l'argent.
Pour un jeu ayant une espérance mathématique = 0, tu ne perdras pas d'argent et tu n'en gagneras pas.
Pour un jeu ayant une espérance mathématique > 0, tu gagneras de l'argent.

Toutefois, n'oublie pas que ces résultats ne peuvent être obtenus que si tu joues de nombreuses parties.

Exemple 2

1. Quelle est l'espérance mathématique d'un jeu pour lequel il faut débourser 1,00 $ pour lancer un dé à six côtés si au lancer d'un nombre pair tu obtiens 3,00 $?
   a) nombre de cas favorables :
   b) nombre de cas défavorables :
   c) probabilité d'obtenir un nombre pair :
   d) probabilité d'obtenir un nombre impair :
   e) gains relatifs à un nombre pair :
   f) gains relatifs à un nombre impair :
   g) espérance mathématique :
2. Ce jeu constitue-t-il un bon risque financier? Explique ta réponse.
3. Si tu joues à ce jeu à 50 reprises, quels seront tes gains ou tes pertes probables?
4. Si tu joues à ce jeu à 100 reprises, quels seront tes gains ou tes pertes probables?
5. Si le prix d'un lancer est haussé à 2,00 $, quel effet cela aura-t-il sur l'espérance mathématique du jeu? Justifie ta réponse à l'aide des calculs appropriés.
6. Si le prix est haussé à 2,00 $, à combien les gains doivent-ils s'élever pour que tu ne perdes pas de l'argent après plusieurs lancers?

Exemple 3

À partir des résultats obtenus par le passé, un homme d'affaires constate que la probabilité d'obtenir un contrat en informatique s'établit à 0,20. Le contrat vaut 12 000 $, et il faudra débourser 1 500 $ pour préparer une soumission. À l'aide du tableau ci-dessous, détermine l'espérance mathématique de cette situation.

Événement	probabilité	gains
obtient le contrat		
perd le contrat		

Espérance mathématique =

Rappel :

1. Cette mise en situation ne signifie pas que l'homme d'affaires, qui réussit à obtenir le contrat, recevra 900 $.
2. Elle signifie que les gains espérés par contrat sont de 900 $ si cette personne soumissionne plusieurs contrats de ce genre. Par exemple, si elle présente 50 soumissions, les gains seront en moyenne de 50 (900 $) = 45 000 $.
3. Si cette personne ne soumissionne que le premier contrat, elle pourrait gagner 10 500 $ ou perdre 1 500 $, selon l'obtention ou la perte du contrat.

Exemple 4

Détermine l'espérance mathématique (gains) de chaque résultat ainsi que l'espérance mathématique totale en ce qui concerne un jeu coûtant 1,00 $ la partie et pour lequel il existe trois résultats favorables possibles.

Espérance mathématique (EM) =
P(événement 1)(gains 1) + P(événement 2)(gains 2) + …

résultat probable	montant gagné	gains
1:4	2,00 $	
1:2	0,00 $	
1:4	3,00 $	

Devoir : Espérance mathématique

1. Pour chaque jeu :
   a) Indique si tu gagnerais, perdrais ou atteindrais le seuil de rentabilité si tu jouais plusieurs parties.
   b) Indique si tu comptes participer au jeu dans les cas suivants et explique ton raisonnement.
      i) Tu payes 1 $ pour lancer une pièce de monnaie; si le résultat est face, tu gagnes 2 $.
      ii) Tu payes 1 $ pour piger une carte d'un jeu de cartes; si tu tires un cœur, tu reçois 5 $.
      iii) Tu payes 2 $ pour piger une carte d'un jeu de cartes; si tu tires un valet ou un as, tu reçois 10 $.
      iv) Tu payes 1 $ pour lancer un dé. Si tu lances un 2 ou un 3, tu gagnes 4 $.
      v) Tu payes 1 $ pour lancer deux pièces de monnaie; si les deux pièces affichent face, tu obtiens 3 $.

2. Détermine l'espérance mathématique (gains) de chaque résultat ainsi que l'espérance mathématique totale en ce qui concerne un jeu coûtant 2,00 $ la partie et pour lequel il existe trois résultats favorables possibles.

	résultat probable	montant gagné	gains
a)	1:3	0,00 $	
b)	1:3	3,00 $	
c)	1:3	3,00 $	

3. Détermine l'espérance mathématique (gains) de chaque résultat ainsi que l'espérance mathématique totale en ce qui concerne un jeu coûtant 2,00 $ la partie et pour lequel il existe trois résultats favorables possibles.

	résultat probable	montant gagné	gains
a)	2:3	3,00 $	
b)	1:4	2,00 $	
c)	1:12	0,00 $	

4. Selon les questions 2 et 3, quels jeux seraient favorables? Explique ta réponse.
5. Si tu réussis à lancer un anneau sur un piquet, tu peux gagner un ourson en peluche d'une valeur de 25 $. L'opératrice du jeu sait que seul un participant sur 250 peut gagner à ce jeu.
   a) L'opératrice fera-t-elle un profit si elle demande 25 ¢ pour chaque lancer? Explique ta réponse.
   b) Fera-t-elle un profit si elle demande 15 ¢ pour chaque lancer? Explique ta réponse.
   c) Si elle demande 10 ¢ le lancer, quelle sera l'espérance mathématique?
   d) Lequel des jeux ci-dessus est favorable? Est-il probable que l'opératrice fixe le prix du jeu afin qu'il soit équitable mathématiquement? Explique ta réponse.
6. Marie paye 1 $ pour piger un canard en plastique d'un ***bassin***. Si le canard est muni d'un collant rouge, elle gagnera 10 $. Si 260 canards se trouvent sur le bassin et que seulement 13 d'entre eux portent un collant rouge, quelle est l'espérance mathématique? Si Marie joue à 10 reprises, combien d'argent peut-elle probablement gagner ou perdre?
7. Hélène fait un examen qui comporte 100 questions à choix multiple ayant 4 choix de réponses possibles chacune. Elle connaît 64 réponses et choisit au hasard pour les 32 autres questions. Calcule le nombre de bonnes réponses prévues.

bassin : (nom m.) grand récipient de forme circulaire

8. Il est possible de jouer à « Piger une bille » au coût de 2 $. Ce jeu consiste à choisir une bille au hasard d'un sac comptant 4 billes rouges, 1 bille noire et 5 billes blanches. Si la bille que tu choisis est rouge, tu gagnes 5 $ et si elle est noire, tu gagnes 10 $. Toutefois, tu ne gagnes rien si la bille est blanche. Détermine l'espérance mathématique de ce jeu. Si tu y joues à 20 reprises, quels seraient tes gains ou tes pertes prévus?

9. Certaines personnes dépensent beaucoup d'argent sur la loterie vidéo. Tu constates que la machine sur laquelle tu joues a un ***décaissement*** de 8 000 $ et que quelqu'un devrait y gagner 0,01 % du temps. S'il faut débourser 1 $ pour chaque partie, détermine :

   a) l'espérance mathématique de cette machine;

   b) s'il s'agit d'un jeu équitable;

   c) tes gains ou tes pertes prévus si tu joues à cette machine à 1 000 reprises.

10. Un ***organisme de bienfaisance*** offre à des participants la chance de jouer à un jeu à l'occasion d'un carnaval d'été. Il faut débourser 2 $ pour jouer. Ce jeu consiste à choisir une bille d'un sac comptant 3 billes rouges, 2 billes bleues et 5 billes vertes. Tu gagnes 1 $ pour une bille verte, 2 $ pour une bille rouge et 3 $ pour une bille bleue. L'organisme estime que 1 000 personnes participeront au jeu. Combien d'argent peut-il récolter?

11. Un groupe communautaire fait tirer un téléviseur grand écran d'une valeur de 1 500 $. Chaque billet coûte 5 $; 2 500 billets ont été vendus. Quelle est l'espérance mathématique si tu as acheté un billet? Quelle est l'espérance mathématique si tu achètes cinq billets?

décaissement : (nom m.) sortie de fonds

organisme de bienfaisance : organisme sans but lucratif qui a pour objet de porter secours aux personnes dans le besoin