

Unité H
Séquences

Exercice 1

1. Un morceau de papier carré a une aire de $2\,500\text{ cm}^2$. On le plie en deux, ce qui réduit l'aire à $1\,250\text{ cm}^2$. Si on le plie en deux six autres fois, la feuille de calcul afficherait les données suivantes :

	A	B
1	Plis	Aire
2	0	2500,00
3	1	1250,00
4	2	625,00
5	3	312,50
6	4	157,25
7	5	78,12
8	6	39,06
9	7	19,53

- Quelle est la formule récursive pour la cellule B3?
 - Quelle est la formule explicite pour la cellule B3?
 - Quel est le graphique de la séquence des aires? Décris le graphique dans tes propres mots.
 - Quelle étiquette donnerais-tu à l'aire $78,12\text{ cm}^2$?
 - Que représente A_7 ?
2. Un groupe de 100 astronautes est envoyé sur Mars afin de coloniser la planète. Nous sommes en l'an 2020. Les scientifiques de la NASA prédisent que la population augmentera de 12 % tous les 20 ans. Voici la feuille de calcul illustrant les résultats.

	A	B
1	Année	Population
2	2020	100
3	2040	112
4	2060	125
5	2080	140
6	2100	157

- Quelle est la formule récursive pour la cellule B3?
- Quelle est la formule explicite pour la cellule B3?
- Trace le graphique de la séquence des populations. Décris le graphique dans tes propres mots.
- Quelle étiquette donnerais-tu à la population de 140 personnes?
- Que représente P_{2100} ?
- Selon les prédictions, quelle sera la population en l'an 2300?
- Combien de temps faudra-t-il pour que la population compte 1000 personnes?

Exercice 1 (suite)

3. Suppose que les scientifiques de la NASA aient fait une erreur. Ils ont tenu compte des décès naturels en raison de la vieillesse, mais ils ont oublié les décès dûs à des accidents et autres causes. Les astronautes qui vivent sur Mars découvrent qu'ils perdent environ un des leurs tous les deux ans en raison d'accidents. La nouvelle feuille de calcul aurait l'apparence suivante :

	A	B
1	Année	Population
2	2020	100
3	2040	102
4	2060	104
5	2080	107
6	2100	110

- Quelle est la nouvelle formule récursive pour la cellule B3?
 - Trace le graphique de la séquence des populations. Décris le graphique dans tes propres mots.
 - Quelle est la nouvelle population prévue pour l'année 2300?
 - Combien de temps faudra-t-il pour que la population atteigne 1000 personnes?
 - Qu'arriverait-il si le taux de décès dû à des accidents grimpe à une personne par année?
4. Une élève d'une école secondaire veut s'acheter une automobile usagée. Étant donné qu'elle n'a pas beaucoup d'argent, elle cherche une automobile qui a au moins dix années d'usure. Dans tous les livres, les annonces de journaux et les magazines qu'elle a consultés, elle ne trouve pas d'automobile assez vieille. Un voisin en a une à vendre, mais elle croit que le prix est trop élevé. Elle décide de surveiller les annonces classées des journaux pendant un moment et elle recueille les données suivantes.

	A	B
1	Année	Prix moyen
2	1999	19 500 \$
3	1998	16 630 \$
4	1997	14 530 \$
5	1996	12 580 \$
6	1995	11 130 \$
7	1994	9 870 \$

- Construis une feuille de calcul où tu consignes les données ci-dessus. Dans la troisième colonne, construis une formule qui détermine le pourcentage de diminution de la valeur d'une automobile chaque année (p. ex., $16\,630/19\,500 = 85,28\%$).
- Détermine la diminution moyenne en pourcentage par année.
- Utilise ce taux moyen de diminution pour déterminer le prix approximatif d'un véhicule de 1989, soit l'année recherchée.
- Trace le graphique de la séquence des prix. Décris ce graphique dans tes propres mots. Le prix de la voiture atteindra-t-il une limite?
- Explique pourquoi ce modèle mathématique ne décrit pas nécessairement précisément le prix éventuel d'une auto de 1989.

Exercice 2

1. La pépinière Toujours Vert possède 7000 pins blancs. Les propriétaires estiment qu'ils vendront 12 % des arbres toutes les années, et ils prévoient en planter 600 nouveaux.
 - a) Crée une feuille de calcul qui décrit la situation.
 - b) Détermine le nombre de pins que la pépinière possédera après 10 années. Quel étiquette utiliserais-tu pour décrire cette valeur?
 - c) Construis un graphique de la séquence des pins. Est-ce qu'il y a convergence ou est-ce que l'on atteint un plateau à une certaine valeur? Si oui, à quelle valeur?
 - d) Supposons que la valeur de départ est 8000 arbres. Décris l'influence de cette donnée sur la valeur à long terme.
 - e) Si la valeur de départ était 7000 arbres, suppose que dans 10 ans, 15 % des arbres seront morts en raison d'une maladie. Quelle est l'incidence à long terme sur les stocks de la pépinière?

2. Les propriétaires de deux magasins offrent différents rabais sur des disques compacts dont le prix de vente ordinaire est 18,99 \$. Le propriétaire du magasin A réduit son prix de 6 % après chaque semaine qu'un disque compact est resté sur la tablette. Le propriétaire B réduit son prix de 1 \$ par semaine.
 - a) Créé une feuille de calcul pour modéliser la situation.
 - b) Suppose que tu as décidé que tu ne paieras pas plus de 14 \$ pour un disque compact donné. Combien de temps devras-tu attendre?
 - c) Est-ce que, à un moment donné, un des propriétaires donnera le disque compact? Explique pourquoi il s'agit d'un modèle mathématique qui ne peut décrire une situation réelle.
 - d) Suppose que le magasin qui demande le prix plus élevé pour un disque donné en vend cinq par semaine, et qu'il en vend dix quand son prix est le moins élevé. Qui vendrait le plus de disques compacts et qui ferait le plus gros profit après huit semaines de réduction des prix? Suppose que le propriétaire paie 10 \$ pour 1 CD, sans égard au prix demandé au consommateur.

3. La plupart des comptes d'épargne à la banque rapportent un petit montant d'intérêts au consommateur, qui paie des frais de service. Suppose que tu ouvres un compte dans l'intention d'économiser en vue d'un voyage. Tu affectes à cet égard 100 \$ à toutes les payes mensuelles. Tu peux choisir entre deux comptes :

Épargne de base : Ce compte rapporte 1,5 % d'intérêts annuels composés une fois par mois, mais il n'y a pas de frais de service.

Épargnes additionnelles : Ce compte rapporte 2,0 % d'intérêts composés une fois par mois et les frais de service sont de 1,50 \$ par mois. Cela te permettra de faire 5 retraits sans frais par mois et de tirer 5 chèques par mois sans frais.

Si ton but est d'économiser 1500 \$ en vue de ton voyage, quel compte devrais-tu choisir? Explique pourquoi. Dans quelle circonstance devrais-tu choisir l'autre type de compte? Joins à ta réponse des exemplaires de tes feuilles de calcul.

Exercice 2 (suite)

4. Quand les lapins ont été introduits en Australie à la fin des années 1800, ils n'avaient aucun ennemi naturel sur le continent. Par conséquent, le nombre de lapins a rapidement pris des proportions hors de contrôle.

Suppose que deux lapins, un mâle et une femelle, se soient faufiletés à bord d'un bateau ancré dans un port d'Europe. Suppose aussi que le bateau part pour l'Australie et que, quand il jette l'ancre à la fin de décembre, les deux lapins quittent le navire. Considère les hypothèses suivantes :

- Chaque portée compte six lapereaux, dont trois sont des femelles.
 - La première femelle donne naissance à six lapereaux le 1er janvier; elle produit une autre portée de 6 lapereaux 40 jours plus tard. Elle continue de produire six descendants tous les 40 jours, jusqu'à sa mort.
 - Chaque femelle née produira sa première portée 120 jours après sa naissance, puis tous les 40 jours par après.
 - La nourriture abonde et il n'existe aucun ennemi naturel. Aucun des lapins ne meurt la première année.
- a) Combien de lapins trouve-t-on en Australie le 1er janvier de l'année suivante?
- b) Si la capacité du milieu est de 20 millions de lapins, combien d'années faudra-t-il avant que l'île n'atteigne le nombre maximal de lapins qui peuvent survivre?
- c) Une fois que la population de lapins a atteint 11 millions, les instituts gouvernementaux décident d'adopter un règlement permettant de tuer 10 millions de lapins chaque année. Quelle sera l'incidence à long terme de cette politique sur la population de lapins? Quelles hypothèses as-tu dû faire?
- d) Peux-tu imaginer un plan permettant de stabiliser la population de lapins à 10 millions environ?
5. Une ville a une population d'environ 10 000 personnes en l'an 2000. Elle a connu une croissance d'environ 0,5 % par année durant plusieurs années. Une société décide d'installer une nouvelle usine dans la ville. La population augmentera et le conseil de ville s'inquiète de la capacité du site de décharge municipale. Il forme un comité pour étudier le problème. Voici les conclusions du comité :
- En moyenne, un citoyen produit la moitié d'un sac de déchets par semaine.
 - L'usine provoquera une augmentation de population de 100 personnes chaque année durant les 5 premières années.
 - Pour chacune des 5 premières années, l'usine attirera des gens nouveaux, auxquels s'ajouteront 15 autres personnes qui immigreront pour d'autres raisons.
 - Le dépotoir a une aire de 2 km² qui n'a pas encore été utilisée.
 - Chaque sac de déchets exige 0,5 m² de surface de sol.

Suppose que :

- L'usine amènera des gens nouveaux dans la ville à compter de 2000.
- La population continuera de croître à un rythme de 0,5 % après l'implantation et le démarrage de l'usine.

Répond aux questions suivantes :

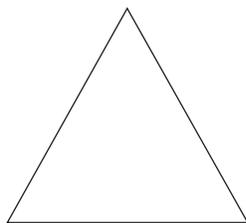
- a) Pourquoi l'augmentation de 100 nouveaux travailleurs d'usine entraînera-t-elle la venue de 15 autres personnes?
- b) Combien faudra-t-il de temps avant que le dépotoir ne soit plein?
- c) Si la ville met sur pied un système de cueillette de produits recyclables à la source et si elle limite chaque personne habitant dans une maison à 0,25 sac de déchets par semaine durant la première année après l'arrivée des travailleurs d'usine (2 006), combien de temps faudra-t-il avant de remplir le site de décharge?
- d) Suppose que le taux de croissance se maintient à 0,5 % et que la ville adopte la limite de 0,25 sac par personne en 2006. Quelles dimensions devrait avoir un nouveau dépotoir pour que la ville puisse l'exploiter à partir de l'année où l'autre site est plein jusqu'en 2100?

Exercice 2 (suite)

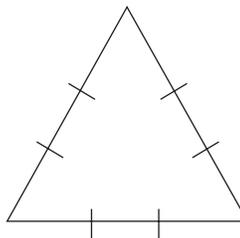
6. Les agents de conservation locaux s'inquiètent de la santé du lac Howe. Voilà 5 ans, on dénombrait 1 500 poissons dans le lac. En outre, on a établi les conditions suivantes :
- le taux de naissance est de 20 % par année;
 - le taux de décès par cause naturelle est de 33 %;
 - onensemence 500 poissons dans le lac chaque année;
 - la limite de prises pour les pêcheurs est de 300 poissons par année.
- a) Combien y a-t-il de poissons dans le lac maintenant, et combien y en aura-t-il dans cinq ans?
- b) Quelle sera la population à long terme du lac? Va-t-elle se stabiliser, exploser ou être réduite à néant?
- c) La capacité du milieu est estimée à 2 000 poissons. Élabore un plan qui pourrait être mis en oeuvre maintenant, cinq ans après l'étude, qui permettrait que la population atteigne sa pleine capacité en moins de 10 ans. Inclus un plan d'entretien qui permettra de maintenir la population à 2 000.
7. Quand tu achètes des aliments, des vêtements, etc., dans un magasin de détail, l'article est passé par beaucoup de mains avant les tiennes. Ainsi, le fermier peut vendre son produit à un camionneur, qui le revend à un grossiste, qui le vend à un emballeur, qui le vend à son tour à un distributeur, qui le vend à un détaillant, qui te le vend. Chaque personne de la chaîne entre le fermier et toi est appelée un *intermédiaire*. Suppose qu'un fermier dépense 1 \$ pour produire un kilo de boeuf.
- a) Si le fermier et chaque intermédiaire empochent un profit de 30 %, combien le consommateur devra-t-il payer pour un kilo de boeuf?
- b) Combien d'argent le fermier et chaque intermédiaire obtient-il?
- c) Si le fermier augmente sa marge à 40 % et que tous les intermédiaires font de même, le prix demandé au consommateur augmentera-t-il aussi de 10 %? Explique pourquoi.
- d) Suppose que les consommateurs paient un maximum de 5 \$ par kilo de boeuf. Si le taux de marge est de 35 % à chaque étape, combien d'argent le fermier peut-il dépenser pour produire un kilo de boeuf s'il veut maintenir son profit de 35 %?
8. Un médecin prescrit un médicament à un malade. La personne doit prendre un comprimé de 20 mg chaque jour, à jeun le matin. À la même heure le lendemain matin, 25 % du médicament a été éliminé de son corps.
- a) Un patient n'écoute pas son médecin et prend seulement le premier comprimé. Si le premier comprimé a été avalé le 1er avril, quel jour la concentration de médicament sera-t-elle inférieure à 1 mg?
- b) Un autre malade suit le conseil du médecin. S'il a aussi pris son premier comprimé le 1er avril, et s'il prend un comprimé de 20 mg chaque matin, décris ce qui se passe en ce qui a trait à la concentration de médicament.
- c) La personne dont il est question à la question b) oublie de prendre son comprimé le 20 avril. Quelle option ci-dessous lui permettra de la bonne concentration de médicament le plus rapidement, sans toutefois la dépasser?
- i) prendre deux comprimés le matin du 21 avril?
 - ii) prendre un comprimé le 21 avril?
- d) Peux-tu imaginer un autre plan qui permettrait à cette personne de revenir à la concentration recommandée de médicament rapidement, sans la dépasser? Explique ta réponse.

Exercice 3

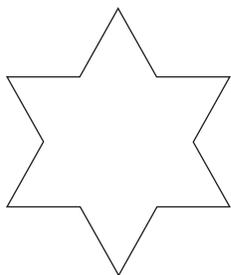
1. Tu dois suivre les directives ci-dessous pour créer une courbe de Koch (flocon de neige). Il pourrait être utile d'utiliser du papier graphique.



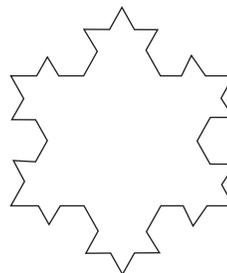
Construis un triangle équilatéral ayant des côtés de 12 cm.



Divise chaque côté en trois sections de 4 cm chacune.



Efface la section du centre de chaque côté et construis un autre triangle équilatéral ayant des côtés de 4 cm.



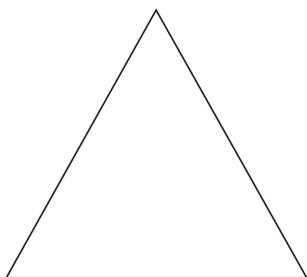
Répète ce procédé. Maintenant, chaque côté a une longueur de 1,3 cm.

- a) Répète ce procédé autant de fois que tu le peux.
- b) Le triangle d'origine a trois côtés de 12 cm. Cela signifie que le périmètre de la génération 1 est le suivant : $(P_1) = 3 \times 12 = 36$. Remplis le reste de la feuille de calcul sur la page suivante. Quelle règle peux-tu établir pour P_n ?

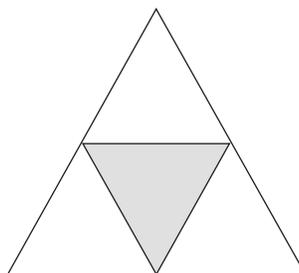
Exercice 3 (suite)

	A	B	C	D
1	Génération	Nombre de côtés	Longueur des côtés	Périmètre
2	1	3	12	36
3	2	12	4	
4	3			
5	4			
6	5			

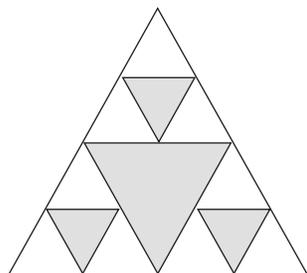
- c) Trace le graphique de la séquence des périmètres. Décris le graphique dans tes propres mots. A-t-il une limite? Si c'est le cas, quelle est cette limite?
- d) Peux-tu établir une formule d'équation récursive et explicite pour la cellule D3?
2. Pour créer une courbe en pointe de flèche (triangle de Sierpinski), tu dois suivre les directives suivantes :



Trace un triangle équilatéral.



Relie les points du centre des côtés avec des droites pour former un autre triangle. Colorie cette image.



Répète ce procédé pour chacun des des autres triangles.

Quelle devrait être la prochaine étape?

Exercice 3 (suite)

- Détermine l'aire du triangle d'origine non ombragée si les côtés étaient d'une longueur de 12 cm.
- Dans la génération 1 (un seul triangle ombragé), un quart du triangle a été coloré. Quelle est donc l'aire des zones non colorées?
- Remplis la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	Génération	Aire
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	

- Quelles sont les formules des équations récursives et explicites pour la cellule B3?
 - Quelle serait la valeur de A_{10} ?
 - Trace le graphique de la séquence des aires. Décris le graphique. Atteint-il une limite? Si c'est le cas, quelle est cette limite?
3. Suis les directives ci-dessous pour créer une autre figure fractale, sans l'aide d'un diagramme. Utilise une feuille blanche placée sur la longueur.
- Trace une ligne droite le long du bas de la page, d'un côté à l'autre.
 - Trace un carré dont les côtés sont égaux à 5 cm et qui repose sur la ligne.
 - Sur chaque côté du carré qui ne touche pas à la ligne, trace un autre carré dont les côtés équivalent à un tiers des côtés du premier carré.
 - Répète l'étape 3 trois autres fois.
- Tu dois créer une feuille de calcul comme celle ci-dessous. Remplis cette feuille de calcul.

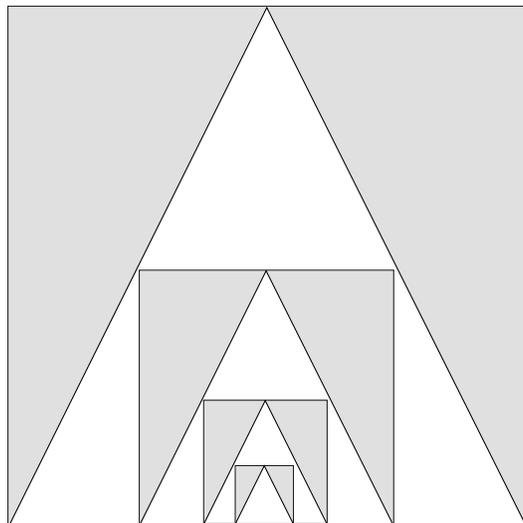
	A	B	C
1	Génération	Aire	Périmètre
2			
3			

- Décris le graphique de la séquence de l'aire. Atteint-il une limite?
- Décris le graphique de la séquence du périmètre. Atteint-il une limite?
- La figure fractale deviendra-t-elle trop grosse pour la page?

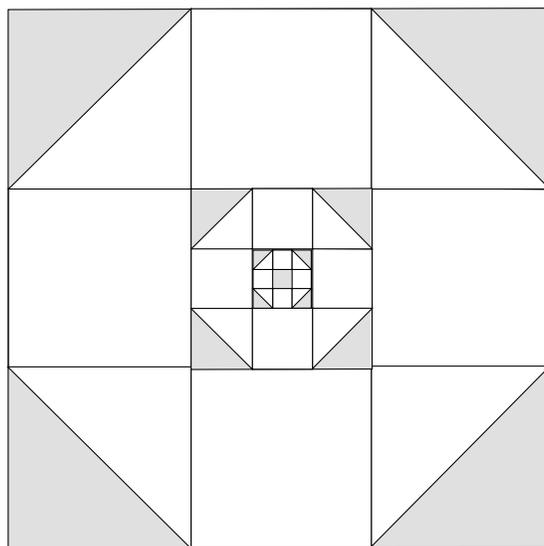
Exercice 3 (suite)

4. a) Inscris la série de directives requises pour créer chaque figure fractale ci-dessous.

i)



ii)



b) Remplis une feuille de calcul comme celle ci-dessous pour chacune des figures fractales, jusqu'à la 10^e génération.

	A	B
1	Génération	Aire ombrée
2		
3		

Exercice 3 (suite)

5. Tu dois créer ta propre figure fractale. Inscris la série de directives requises. Ensuite, tu dois créer une question à propos de l'aire ou du périmètre. Échange ta question avec celle d'un de tes compagnons de classe et essaie de tracer sa figure fractale et de résoudre sa question.