

Unité H
Suites

SUITES

Introduction

Dans cette unité, une approche pratique est utilisée pour l'étude du concept des suites à l'aide d'expériences et d'enquêtes. Vous effectuerez des expériences afin de recueillir des données linéaires ou exponentielles. Vous pouvez atteindre les objectifs visés par cette unité en utilisant les fonctions de régression des calculatrices graphiques ou des logiciels informatiques.

Les enseignants devraient savoir que la méthode traditionnelle utilisée pour déterminer une expression algébrique pour le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite ne devrait pas être utilisée dans cette unité. Ainsi, des formules telles de $t_n = t_1 r^{n-1}$ ou $t_n = t_1 + (n - 1)d$ ne devraient pas être utilisées. Vous devriez encourager les élèves à utiliser les formules récursives de la feuille de calcul. Les calculatrices graphiques peuvent être utilisées pour créer une équation de régression illustrant une suite en particulier telle qu'une suite arithmétique (régression linéaire) ou une suite géométrique (régression exponentielle).

Pratiques d'enseignement

Nous vous encourageons à faire travailler les élèves en petits groupes et à organiser des discussions en classe. Les élèves peuvent utiliser des outils technologiques tels que les unités LAC ou d'autres méthodes pour recueillir des données. Ensuite, l'analyse des données peut être exécutée à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel informatique approprié.

Matériel d'enseignement

- calculatrice graphique
- unités LAC avec diverses sondes
- ordinateur comprenant un logiciel approprié
- feuilles de calcul

Durée

12 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE

Résultat général

Produire et analyser des régularités cycliques, récursives et fractales.

Résultats spécifiques

H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• Présenter le concept des suites

Nota : Les enseignants devraient savoir que la méthode traditionnelle utilisée pour déterminer une expression algébrique pour le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite ne devrait pas être utilisée dans cette unité. Ainsi, des formules telles que $t_n = t_1 r^{n-1}$ ou $t_n = t_1 + (n - 1)d$ ne devraient pas être utilisées. Vous devriez encourager les élèves à utiliser les formules récursives de la feuille de calcul telles que = **B2 + 180** pour produire une suite de termes. Des formules explicites telles que = **(A3 - 2)*180** peuvent aussi être utilisées.

Les calculatrices graphiques peuvent être utilisées pour créer une équation de régression illustrant une suite en particulier telle qu'une suite authentique (régression linéaire) ou une suite géométrique (régression exponentielle). Il suffit d'enregistrer des données indépendantes dans la liste L1 et des données dépendantes correspondantes dans la liste L2. Une fois les données sur graphique, vous devriez encourager l'élève à identifier le type de droite de régression qui représente le mieux les données.

Exemple 1

Rappelez-vous de l'expérience faite avec une balle dans le cours *Mathématiques appliquées, Secondaire 2*. Dans cette expérience, la hauteur à laquelle la balle rebondissait était déterminée d'après la hauteur à laquelle vous laissiez tomber la balle, et cette hauteur était ensuite mise sur graphique. Cette expérience devrait être répétée, mais la hauteur à laquelle la balle rebondira doit être déterminée d'après la hauteur à laquelle elle vient tout juste de rebondir.

Directives

1. Utilisez une caméra vidéo et un magnétoscope à cassettes pouvant effectuer une lecture image par image.
2. Construisez une règle de papier sur laquelle vous tracerez des points de repère à tous les 5 cm.
3. Laissez tomber la balle d'une certaine hauteur, de 1 mètre par exemple. Filmez la balle qui rebondit.
4. Construisez une feuille de calcul comme celle ci-dessous.

	A	B	C
1	n° du rebond	hauteur du rebond	varia. de haut. (%)
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

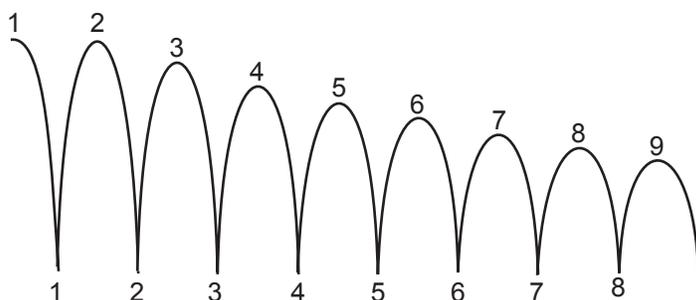
NOTES

Problème

Prenons l'exemple de la balle qui rebondit. Nous supposons que la balle rebondit à 90 % de la hauteur de laquelle vous la laissez tomber. Remplissez le tableau ci-dessous pour les 15 premiers rebonds. (Cela doit être effectué sur une feuille de calcul ou une calculatrice graphique.)

	A	B	C
1	n° du rebond	hauteur (cm)	hauteur du rebond (cm)
2	1	100	90
3	2	90	81
4	3	81	72,9
5	4	72,9	65,61

a) À quelle hauteur la balle rebondit-elle après le 8^e rebond?



- b) Après combien de rebonds la balle rebondit-elle à une hauteur de 72,9 cm?
- c) Quand la balle arrête-t-elle de rebondir?
- d) Après 8 rebonds, quelle distance la balle a-t-elle parcouru en tout?
- e) Construisez un graphique sur les données de la hauteur des rebonds. Décrivez la forme du graphique dans vos propres mots.

Solution

- a) Hauteur du 9^e rebond (après le 8^e rebond) = 43,05 cm.
- b) Trois rebonds
- c) D'après ce modèle, la balle n'arrête jamais de rebondir. Mais, il ne s'agit que d'un modèle mathématique qui reproduit le comportement; il ne le décrit pas avec précision.
- d) En supposant que nous tenons compte de la distance parcourue pour le 8^e rebond, cette distance est de 1 082,1 cm. Si on ne tient pas compte du 8^e rebond, la distance est de 1 039,1 cm.

— suite

Ressources

Mathématiques appliquées, Secondaire 4 – Exercices, Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Logiciel de dessin de géométrie comme *Cybergéomètre* ou *Euklid*.

Tableur comme *Microsoft Excel*.

Calculatrice graphique comme la TI-83.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

• Présenter le concept des suites (suite)

Exemple 1 – suite

Directives – suite

5. Visionnez la cassette vidéo et enregistrez les hauteurs des rebonds.
6. Dans la troisième colonne, déterminez le changement en pourcentage de la hauteur des rebonds.
7. Calculez le changement moyen en pourcentage pour les cinq rebonds enregistrés. Utilisez ce pourcentage pour compléter le tableau pour les 20 rebonds. Utilisez le tableau complété pour répondre aux questions ci-dessous :
 - a) À quelle hauteur la balle rebondit-elle après le 8^e rebond?
 - b) Après combien de rebonds la balle rebondit-elle à une hauteur correspondant seulement à la moitié de la hauteur d'origine?

Notes :

- a) Vous pouvez aussi utiliser les méthodes suivantes pour exécuter cette expérience :
 - i) vous pouvez utiliser un capteur de mouvement et un système de type LAC;
 - ii) vous pouvez laisser tomber la balle d'une hauteur de 1 m, enregistrer la hauteur du rebond; laisser tomber la balle d'une hauteur différente, enregistrer la hauteur du nouveau rebond, répéter ce procédé.
- b) Les couleurs de la balle et de la règle en papier devraient être contrastantes. N'utilisez pas une balle de golf blanche et une règle en papier blanc.
- c) Les enseignants peuvent exécuter cette expérience plus d'une fois et faire la moyenne des essais.
- d) Des balles différentes peuvent être utilisées par les groupes d'élèves.
- e) Exemple de données recueillies

	A	B	C
1	Rebond	Hauteur du rebond	Varia. de hauteur
2	1	85	
3	2	75	88,2 %
4	3	68	90,7 %
5	4	60	88,2 %
6	5	56	93,3 %

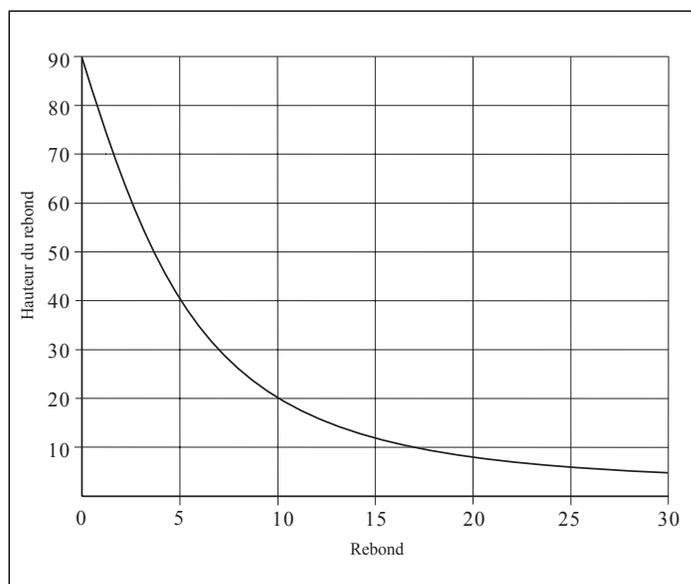
— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème — suite*Solution — suite*

e)



La courbe du graphique diminue, et elle semble demeurer stable à partir d'un certain point.

— suite

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

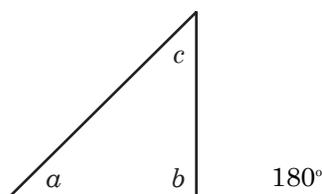
H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

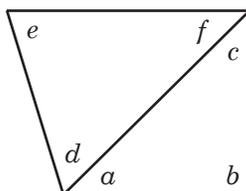
- présenter le concept des suites (suite)

Exemple 2

Demandez aux élèves de tracer un triangle. Quelle est la somme des angles?

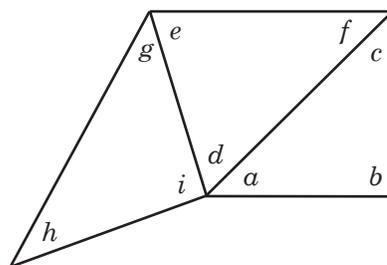


Placez un autre triangle partageant un côté avec le premier triangle et déterminez la somme des angles.



$$\begin{aligned} a + b + c &= 180^\circ \\ d + e + f &= 180^\circ \\ \hline a + d + b + e + c + f &= 360^\circ \\ (a + d) + b + e + (c + f) &= 360^\circ \end{aligned}$$

Ajoutez un autre triangle.



$$\begin{aligned} a + b + c &= 180^\circ \\ d + e + f &= 180^\circ \\ g + h + i &= 180^\circ \\ \hline a + d + g + b + e + h + c + f + i &= 540^\circ \\ (a + d + i) + (c + f) + b + (g + e) + h &= 540^\circ \end{aligned}$$

Les élèves doivent remplir le reste du tableau. Quelle formule de la feuille de calcul utilisez-vous?

	A	B
1	nombre de côtés	somme des angles
2	3	180
3	4	360
4	5	540
5		

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE
SPÉCIFIQUES

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

• Présenter le concept des suites (suite)

Exemple 2 - suite

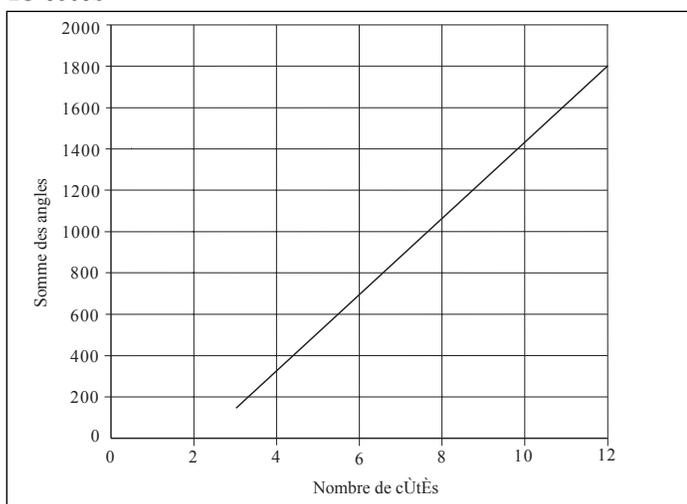
Inscrivez la somme de la colonne des angles sous forme de suite, c'est-à-dire 180, 360, 540, ...

1. Quelle est la somme des angles d'une figure à huit côtés?
2. Si la somme des angles d'une figure est de 1 980°, combien de côtés cette figure a-t-elle?
3. Construisez un graphique pour ces données et décrivez-le dans vos propres mots.
4. Vous avez probablement utilisé la formule de la feuille de calcul = **B2 + 180** dans la cellule B3. Cette formule ou règle est fondée sur la valeur précédente de la suite. Ce type de règle se nomme une **formule récurrente**. Inscrivez une formule de la feuille de calcul pour la cellule B3 qui utilise la valeur dans A3.

Solution

1. 1 080°. Vous remarquerez que la somme des angles d'une figure à huit côtés se trouve à la cellule B7 et qu'elle est la 6^e valeur de la suite.
2. 13 côtés

3.



La courbe augmente à un rythme constant.

4. = **(A3 - 2)*180**. Il s'agit d'une **formule explicite** parce qu'elle est fondée sur la position de la valeur dans la suite. Vous pouvez utiliser une calculatrice graphique pour trouver des formules explicites simples à l'aide de *Curve Expert* ou d'autres programmes d'ajustement de courbe. Vous devriez encourager les élèves à le faire.

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE
SPÉCIFIQUES

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

• Présenter le concept des suites (suite)

Exemple 3

Habituellement, les suites sont représentées en deux colonnes dans une feuille de calcul. La première colonne correspond souvent au temps ou parfois à d'autres variables semblables qui représentent quelles sont les valeurs relatives à la suite dont il est question. La deuxième colonne représente la suite même.

Par exemple, l'allocation de Vincent double chaque année. À 10 ans, il recevait 2 \$ par semaine. La feuille de calcul serait donc la suivante :

	A	B
1	âge	allocation
2	10	2 \$
3	11	4 \$
4	12	8 \$
5	13	16 \$
6	14	32 \$

Pour faciliter les choses, l'allocation à l'âge de 12 ans sera représentée par a_{12} .

Nota : Cette méthode n'est pas celle habituellement utilisée pour nommer les données. L'allocation à l'âge de 12 ans serait plutôt représentée par t_3 , parce qu'il s'agit du troisième terme. Vous ne devriez pas utiliser cette méthode de notation des termes et des valeurs des termes. Permettez aux élèves de créer leur propre système de notation.

1. Quelle est la formule récursive de la feuille de calcul dans la cellule B3 pour cette suite?
2. Quelle est la formule explicite de la feuille de calcul dans la cellule B3 pour cette suite?
3. Quelle est la valeur de a_{20} si Vincent reçoit une allocation jusqu'à ce qu'il atteigne l'âge de 21 ans?
4. Produisez le graphique de la suite de l'allocation de Vincent.

Solution

1. $=B2*2$
2. $2^{(A2 - 9)} = 2^{(A3 - 9)}$
3. 2 048 \$/semaine

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

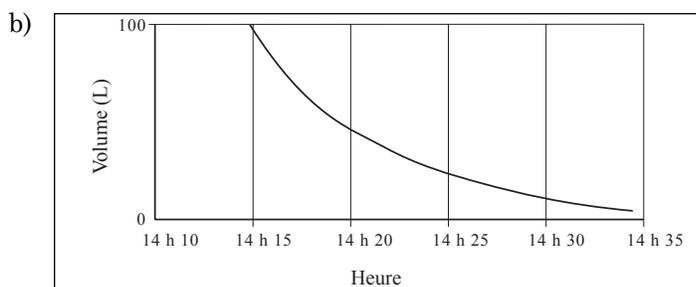
Le fond d'un baril de 100 litres d'eau est troué et la moitié de l'eau du baril se vide en cinq minutes. On retire le bouchon du trou à 14 h 15.

- Produisez une feuille de calcul qui décrit la situation.
- Construisez un graphique des données et décrivez-le dans vos propres mots.
- De quelle manière représenteriez-vous le volume d'eau dans le baril après 20 minutes?
- Indiquez les formules récursives et explicites pour cette situation.

Solution

a)

	A	B
1	Heure	Volume
2	14 h 15	100
3	14 h 20	50
4	14 h 25	25
5	14 h 30	12,5
6	14 h 35	6,25



La courbe diminue et semble demeurer stable après un certain point.

- Réponses possibles : V_{20} , E_{20} , $V_{14\text{ h }35}$, $E_{14\text{ h }35}$
- $B3 = B2/2$ $*B3 = 100 / (2^{(A3/5)})$

***Nota :** Pour écrire la formule explicite, il est nécessaire d'ajouter une colonne à la feuille de calcul en (a) pour illustrer le « temps écoulé en minutes ».

	A	B	C
1	Heure	Temps écoulé	Volume
2	14 h 15	0	100
3	14 h 20	5	50
4	14 h 25	10	25
5	14 h 30	15	12,5
6	14 h 35	20	6,25

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE
SPÉCIFIQUES

- H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

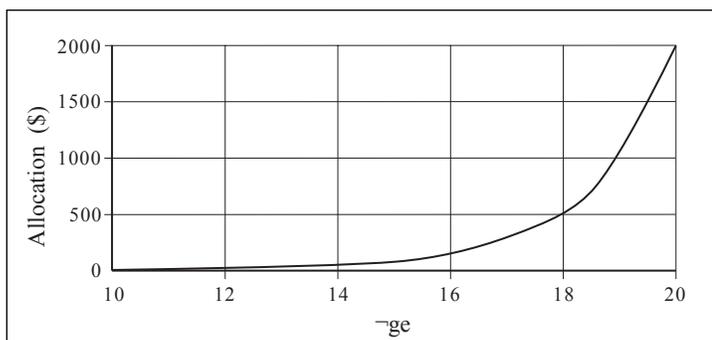
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- Présenter le concept des suites. (suite)

Exemple 3 – suite

Solution – suite

4.



- Utiliser des feuilles de calcul pour résoudre des problèmes reliés à des suites.

Exemple 1

Chaque année, Victor Généreux offre à sa nièce un cadeau pour son anniversaire. Il lui remet une somme d'argent égale à quatre fois son âge en années. L'argent est déposé dans un compte de banque ne produisant aucun intérêt et elle ne peut en retirer aucune partie avant d'atteindre l'âge de 18 ans.

- Construisez une feuille de calcul illustrant son âge dans la colonne A, le montant de l'année dans la colonne B et le montant total dans la colonne C.
- Indiquez les formules récursive et explicite pour la cellule B3.
- Inscrivez une formule récursive pour la cellule C3.
- Combien d'argent a-t-elle dans son compte à son 18^e anniversaire?
- Quel âge a-t-elle lorsque le montant d'argent dans son compte de banque devient plus élevé que 400 \$?

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Supposez que la banque accepte que la nièce de Victor utilise les 684 \$ accumulés dans son compte pour ouvrir un autre compte lorsqu'elle atteint 18 ans. La banque accepte de lui verser des intérêts garantis de 8 % si elle accepte de ne pas retirer l'argent avant d'atteindre l'âge de 40 ans. La nièce de Victor doit aussi verser une somme de 500 \$ dans son compte à chacun de ses anniversaires. Quelle somme aura-t-elle accumulée à 40 ans si elle verse les premiers 500 \$ à son 19^e anniversaire de naissance et les derniers 500 \$ à son 40^e anniversaire de naissance? Quelles sont les formules récursive et explicite pour la cellule D3?

Solution

31 446,97 \$

La formule récursive est $D3 = D2 + 500 + (0,08 \cdot D2)$

La formule explicite est très complexe en raison du montant de 500 \$ versé chaque année.

2. Du chlore est ajouté à l'eau d'une piscine pour en contrôler le film biologique et les algues. La quantité idéale de chlore se situe entre 1 et 2 ppm (parties par million). Si la concentration de chlore atteint 3 ppm, on peut se baigner dans la piscine mais le chlore excédentaire se combine avec l'azote pour former un produit chimique ayant une forte odeur et irritant les yeux. Si la concentration de chlore est inférieure à 1 ppm, un film biologique se forme dans la piscine. Chaque jour, environ 15 % du chlore est utilisé pour éliminer le film biologique et les algues et s'évapore de manière naturelle. Utilisez une feuille de calcul pour répondre aux questions suivantes. Fournissez une feuille de calcul et un graphique pour chaque réponse.
- Si le contenu de chlore est de 3 ppm et aucune quantité supplémentaire de chlore n'est ajoutée, après combien de temps le film biologique commencera-t-il à se former dans la piscine?
 - Si le contenu de chlore au départ est de 3 ppm et si une quantité de 0,5 ppm est ajoutée chaque jour, la concentration augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle? La piscine deviendra-t-elle un jour remplie de chlore pur? Expliquez votre réponse.
 - En supposant que le contenu de chlore de départ est de 3 ppm, et qu'une quantité de 0,1 ppm de chlore est ajoutée chaque jour, que se passera-t-il?
 - Quelle quantité de chlore devez-vous ajouter chaque jour (si la quantité de départ est de 3 ppm) pour que la concentration se stabilise à 1,5 ppm? Combien de jours doivent s'écouler pour que vous obteniez une concentration de 1,5 ppm à 0,1 ppm près? Pouvez-vous suggérer une façon de stabiliser la piscine plus rapidement?

Encouragez les élèves à utiliser une méthode de réponses provisoires de vérification pour résoudre ce problème. Demandez-leur d'ajouter des ppm différentes jusqu'à ce qu'une solution au problème devienne apparente.

— suite

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE
SPÉCIFIQUES

H-1 Utiliser la technologie pour produire et mettre sur graphique des suites représentant des phénomènes de la vie de tous les jours.
— suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- Utiliser des feuilles de calcul pour résoudre des problèmes reliés à des suites. (suite)

Exemple 1 – suite

Solution

a)

	A	B	C
1	Âge	Montant de l'année	Montant total
2	1	4,00 \$	4,00 \$
3	2	8,00 \$	12,00 \$
4	3	12,00 \$	24,00 \$
5	4	16,00 \$	40,00 \$

- b) La formule réursive est $B_3 = B_2 + 4$.
La formule explicite est $B_3 = 4 \cdot A_3$.
- c) $C_3 = C_2 + B_3$
- d) 684 \$
- e) 14 ans

Exemple 2

En supposant qu'une paire de jeans perd 4 % de sa couleur chaque fois qu'on la lave, utilisez un outil de graphisme pour répondre aux questions suivantes :

- a) Quel pourcentage de la couleur d'origine restera-t-il après 10 lavages?
- b) Combien de fois une paire de jeans neuve doit-elle être lavée pour que sa couleur ne représente que 25 % de la couleur d'origine?
- c) Décrivez la forme du graphique. Est-ce qu'il est convergent ou est-ce qu'il se stabilise? À quel point?

	A	B
1	Nombre de lavages	% de la couleur d'origine
2	0	100,0
3	1	96,0
4	2	92,2
5	3	88,5
6	4	84,9
7

Solution

- a) 66,48 %
- b) 34 lavages
- c) Le graphique diminue et semble converger à la couleur de 0 %.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

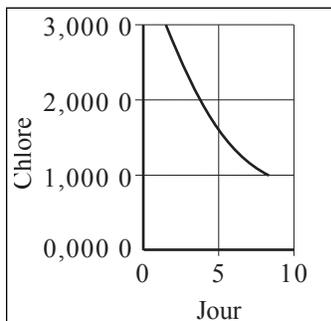
NOTES

Problème – suite

Solution

a)

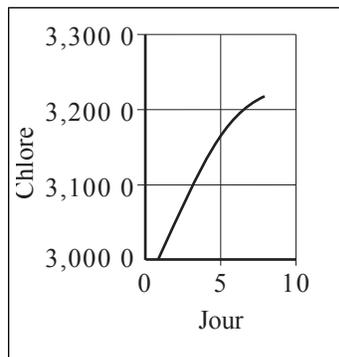
	A	B
1	jour	chlore
2	1	3,000 0
3	2	2,550 0
4	3	2,167 5
5	4	1,842 4
6	5	1,566 0
7	6	1,331 1
8	7	1,131 4
9	8	0,961 7



Entre 7 et 8 jours

b)

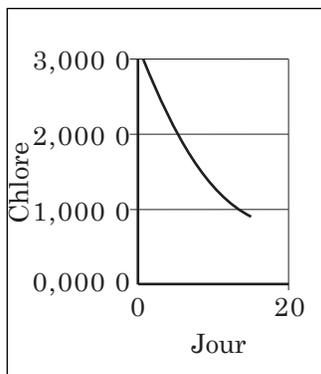
	A	B
1	jour	chlore
2	1	3,000 0
3	2	3,050 0
4	3	3,092 5
5	4	3,128 6
6	5	3,159 3
7	6	3,185 4
8	7	3,207 6
9	8	3,226 5



La concentration de chlore se stabilise à une valeur supérieure à 3 ppm, mais elle est de beaucoup inférieure à la valeur du chlore pur.

c)

	A	B
1	jour	chlore
2	1	3,000 0
3	2	2,650 0
4	3	2,352 5
5	4	2,099 6
6	5	1,884 7
7	6	1,702 0
8	7	1,546 7
9	8	1,414 7
10	9	1,302 5
11	10	1,207 1
12	11	1,126 0
13	12	1,057 1
14	13	0,998 6
15	14	0,948 8



La concentration diminue et se stabilise à une valeur inférieure à 1 ppm.

— suite

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

- H-2 Utiliser un outil technologique pour construire un motif fractal en appliquant à répétition un procédé à une figure géométrique.
- H-3 Utiliser le concept de l'autosimilarité pour comparer et prédire les périmètres, les aires et les volumes de motifs fractals.

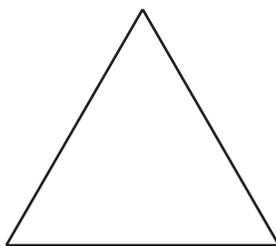
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Suivre les directives pour créer des motifs fractals.**

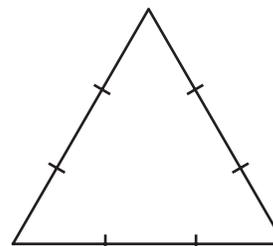
Le programme *Cybergéomètre* peut être utilisé pour créer des motifs fractals.

Exemple 1

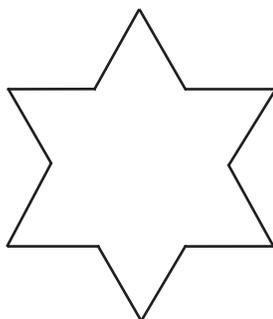
Les élèves devraient suivre les directives pour créer des motifs fractals. Vous trouverez ci-dessous l'exemple du mathématicien Koch : flocon de neige.



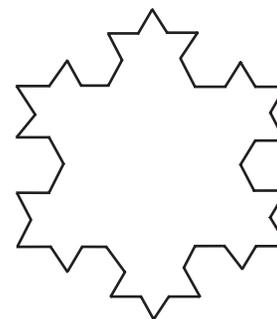
Construisez un triangle équilatéral ayant des côtés de 12 cm.



Divisez chaque côté en trois sections de 4 cm chacune.



Construisez un triangle équilatéral ayant des côtés de 4 cm sur chacune des sections du centre. Effacez la section du centre pour obtenir le diagramme ci-dessus.



Répétez ce procédé. Maintenant, chaque côté a une longueur de $1,3$ cm.

Exemple 2

À l'aide d'un motif fractal et de feuilles de calcul, les élèves doivent résoudre des problèmes reliés au périmètre, à l'aire et au volume de la figure fractale. Par exemple, quel est le périmètre de la 10^e génération du flocon de neige illustré ci-dessus?

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

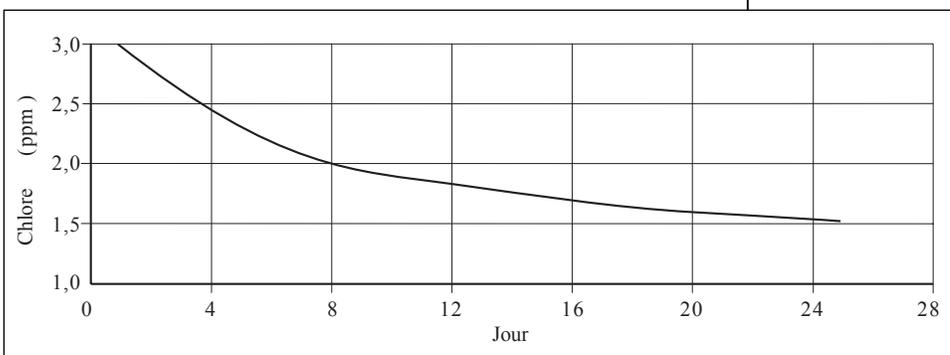
NOTES

Problème – suite

Solution

- d) On obtiendra 1,5 ppm à 0,1 ppm près à l'aide de 0,225 ppm/ jour pendant 18 jours.

	A	B
1	jour	chlore
2	1	3,00
3	2	2,78
4	3	2,58
5	4	2,42
6	5	2,28
7	6	2,17
8	7	2,07
9	8	1,98
10	9	1,91
11	10	1,85



3. Les élèves peuvent créer leur propre problème en ce qui concerne les suites. Les enseignants des projets pilotes ont indiqué que la méthode d'évaluation ci-dessous s'est avérée très efficace.
- Demandez aux élèves de créer leur propre problème. Ils doivent aussi indiquer la solution.
 - Recueillez tous les problèmes.
 - Sélectionnez trois problèmes adéquats et modifiez-les au besoin.
 - Ensuite, distribuez les trois problèmes à tous les élèves. Chaque élève doit choisir un problème parmi les trois problèmes distribués. Ils peuvent ne pas choisir le problème qu'ils ont présenté.
 - Deux tiers de la note des élèves est fondée sur la note attribuée au test. Un tiers de la note est fondée sur la note qu'ils ont reçue pour le problème qu'ils ont créé.