Unité A
Modèles matriciels

MODÈLES MATRICIELS

Introduction

Dans cette unité,

- on présente les matrices et les opérations matricielles. Les opérations matricielles comprennent les additions, les soustractions, les multiplications scalaires et les multiplications matricielles;
- les matrices et les opérations matricielles sont utilisées pour créer des modèles et établir les solutions à propos de problèmes reliés à la consommation, à la transition et aux réseaux;
- la technologie est utilisée pour exécuter des opérations matricielles.

Pratiques d'enseignement

- Présenter les matrices et illustrer comment les données peuvent être présentées sous une forme matricielle.
- Démontrer des opérations matricielles simples.
- Dans le cadre de la communication technique, les élèves devraient consulter les manuels/écrans d'aide lorsqu'ils apprennent à exécuter des opérations matricielles à l'aide de la technologie.
- Les élèves peuvent étudier la majeure partie de cette unité de manière individuelle ou en petits groupes.

Matériel d'enseignement

- calculatrice graphique ou ordinateur
- logiciel informatique tel que *Winmat* (disponible gratuitement)

Durée

14 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE

Résultat général

Décrire et mettre en pratique des opérations matricielles afin de résoudre des problèmes en utilisant la technologie au besoin.

Résultats spécifiques

A-1 Créer des modèles et résoudre des problèmes, y compris ceux déjà résolus, en utilisant la technologie afin d'exécuter des opérations matricielles comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire au besoin.

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Comprendre la structure d'une matrice en créant des matrices de différentes dimensions et en interprétant des matrices données.**

Une matrice constitue un tableau rectangulaire de nombres qui représentent des données. Une lettre majuscule est habituellement utilisée pour identifier la matrice. Les dimensions de la matrice correspondent au nombre de lignes et au nombre de colonnes.

Exemple 1

Les données discrètes (non continues) peuvent être représentées sous une forme matricielle. Une matrice correspond à un tableau de nombres en deux dimensions, ce qui signifie que les nombres sont disposés en rangées et en colonnes.

La matrice ci-dessous illustre les prix moyens de l'essence dans les provinces de l'Ouest.

$$F = \begin{array}{r} \\ MB \\ SK \\ AB \\ C-B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Ordinaire} & \text{Or} & \text{Diesel} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 55{,}9 & 60{,}9 & 38{,}9 \\ 58{,}9 & 63{,}9 & 37{,}9 \\ 44{,}9 & 49{,}9 & 33{,}9 \\ 50{,}9 & 55{,}9 & 42{,}9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il s'agit d'une matrice de quatre par trois, ce qui signifie qu'elle comporte quatre rangées et trois colonnes. (Elle se lit 4 par 3)

Exemple 2

Une compagnie de logiciels vend trois types différents de logiciels de graphisme : T61, T62 et T63. Vous trouverez ci-dessous un tableau et une matrice qui illustrent le nombre de logiciels commandés par quatre magasins.

	T61	T62	T63
Magasin 1	10	20	20
Magasin 2	30	20	35
Magasin 3	20	30	10
Magasin 4	30	10	10

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 35 \\ 20 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Quelles sont les dimensions de la matrice A?

b) Quelle est la valeur de A_{23}?

c) À quoi correspond A_{31}?

—suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 5 & 29 \\ 18 & 4 & 2 & 38 \\ 14 & 8 & 1 & 29 \\ 11 & 8 & 4 & 26 \\ 9 & 12 & 3 & 21 \end{pmatrix}$$

Les données de la matrice A représentent les statistiques et les points de cinq équipes. Les quatre colonnes représentent les victoires, les défaites, les parties nulles et les points (deux points par victoire, un point par partie nulle) respectivement, et les cinq lignes représentent les cinq équipes.

a) Quelles sont les dimensions de la matrice A?

b) Quelle est la valeur de A_{32}?

c) Quelle est la signification de A_{54}?

d) Les dirigeants de la ligue ont décidé de modifier la méthode utilisée pour déterminer les points. Chaque victoire correspondra à trois points, et chaque partie nulle correspondra à deux points. Vous devez réécrire la matrice pour qu'elle indique les nouvelles valeurs en points. Nommez cette nouvelle matrice la matrice B.

e) Le classement des équipes est-il modifié lorsque le nouveau système (d) est utilisé? Expliquez pourquoi.

Solutions

a) Les dimensions sont de 5 sur 4.

b) $A_{32} = 8$.

c) $A_{54} = 21$ points. Ce nombre indique le nombre de points de la cinquième équipe et que cette équipe occupe le rang le moins élevé parmi les cinq équipes.

d)

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 5 & 46 \\ 18 & 4 & 2 & 58 \\ 14 & 8 & 1 & 44 \\ 11 & 8 & 4 & 41 \\ 9 & 12 & 3 & 33 \end{pmatrix}$$

e) Oui. Les première et troisième équipes ne sont plus sur un pied d'égalité au deuxième rang. La première équipe a maintenant 12 points d'avance.

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques appliquées, Secondaire 4 – Exercices – Supplément au programme d'études, Winnipeg, MB : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques appliquées, Secondaire 4 – Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, MB : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

— Module 1, leçons 1, 2 et 3

Mathématiques appliquées 12 (trousse de deux manuels : Manuel de l'élève et Recueil de projets. Don Mills, ON : Addison Wesley Longman, 2000.

Gage Mathematics 10 (Discrete Mathematics Module). Gary Flewelling. Toronto, ON : Nelson Canada, 1985.

Site Internet

Winmat (version française)

http://math.exeter.edu/rparris

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-1 Créer des modèles et résoudre des problèmes, y compris ceux déjà résolus, en utilisant la technologie afin d'exécuter des opérations matricielles comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Comprendre la structure d'une matrice en créant des matrices de différentes dimensions et en interprétant des matrices données. (suite)**

Exemple 2 — suite

Solution

a) [4 par 3] — quatre rangées et trois colonnes

b) [A_{23} = 35]

c) [A_{31} = 20 logiciels de graphisme T61 commandés par le magasin 3]

Nota : Dans le symbole A_{rc}, r représente la rangée et c représente la colonne de la matrice A.

Exemple 3

La matrice ci-dessous indique les distances en kilomètres entre des villes du Manitoba et de la Saskatchewan. ***Note :*** Les valeurs de la diagonale principale correspondent toutes à zéro.

$$D = \begin{array}{r} \\ \text{Brandon} \\ \text{Flin Flon} \\ \text{Saskatoon} \\ \text{Regina} \\ \text{Winnipeg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{BR} & \text{FF} & \text{Sask} & \text{Reg} & \text{Wpg} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 448 & 383 & 226 & 136 \\ 448 & 0 & 345 & 493 & 490 \\ 383 & 345 & 0 & 155 & 492 \\ 226 & 493 & 155 & 0 & 360 \\ 136 & 490 & 492 & 360 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Être en mesure d'exécuter des opérations matricielles, comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire.**

Les règles d'exécution des opérations sur les matrices sont les suivantes :

Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

Soustraction

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

Nota : Seules des matrices de même dimension peuvent être additionnées ou soustraites.

Multiplication scalaire

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

— suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Nota : Seules les matrices de même dimension peuvent être additionnées ou soustraites

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-1 Créer des modèles et résoudre des problèmes, y compris ceux déjà résolus, à l'aide de la technologie afin d'exécuter des opérations matricielles comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Être en mesure d'exécuter des opérations matricielles, comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire. (suite)**

Exemple 1

Utilisez une calculatrice graphique ou un ordinateur pour exécuter les opérations matricielles suivantes à propos des matrices données.

***Nota* :** Consultez l'annexe A pour obtenir des directives sur l'utilisation de la calculatrice graphique TI-83 ou le logiciel informatique Winmat pour exécuter les opérations matricielles et pour enregistrer votre réponse en tant que nouvelle matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 3{,}1 & -4{,}4 \\ 1{,}3 & 0{,}0 & 5{,}7 \end{pmatrix}$$

a) $A + B$ b) $4C$ c) $B - A$

d) $C + B$ e) $-2{,}7A$ f) $3{,}5A + 4{,}1B$

Solution

a) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9{,}2 & 12{,}4 & -17{,}6 \\ 5{,}2 & 0{,}0 & 22{,}8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ d) Aucune solution

e) $\begin{pmatrix} -10{,}8 & -16{,}2 \\ -5{,}4 & 2{,}7 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 26{,}3 & 53{,}8 \\ 15{,}2 & -24 \end{pmatrix}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

Étant donné les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2,2 & 7,1 & 4,7 \\ 3,1 & 1,1 & 6,9 \\ 5,4 & 2,2 & 5,2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4,6 & 6,6 \\ 1,1 & 1,9 \\ 3,5 & 2,8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3,9 & 6,1 \\ 1,8 & 2,3 \\ 8,1 & 3,4 \end{pmatrix}$$

1. Identifie lesquelles des opérations ci-dessous sont possibles.
   a) $A + C$ b) $B + C$
   c) $2,2A$ d) $6,6C + 3,4B$
   e) $2A - 3C$ f) $A + A$
2. Complète les opérations ci dessous :
   a) $C + 2B$ b) $3,5A$
   c) $5,7B - 0,9C$ d) $B + B + B + B + B + B$

Solutions

1. b, c, d, et f sont possibles

2. a) $C + 2B = \begin{pmatrix} 13,1 & 19,3 \\ 4 & 6,1 \\ 15,1 & 9 \end{pmatrix}$

   b) $3,5A = \begin{pmatrix} 7,7 & 24,85 & 16,45 \\ 10,85 & 3,85 & 24,15 \\ 18,9 & 7,7 & 18,2 \end{pmatrix}$

   c) $5,7B - 0,9C = \begin{pmatrix} 22,71 & 32,13 \\ 4,65 & 8,76 \\ 12,66 & 12,9 \end{pmatrix}$

   d) $6B = \begin{pmatrix} 27,6 & 39,6 \\ 6,6 & 11,4 \\ 21 & 16,8 \end{pmatrix}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-1 Créer des modèles et résoudre des problèmes, y compris ceux déjà résolus, à l'aide de la technologie afin d'exécuter des opérations matricielles comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Résoudre une variété de problèmes par moyen de matrices en utilisant l'information tirée de la vie quotidienne.**

Exemple 1

Vous devez créer une matrice qui représente les victoires, les défaites, les parties nulles et les points de cinq équipes pour les six premières semaines de la saison.

Ligue de soccer intérieur Spectrum Hommes – Div. 1				
	V	D	N	P
Barca	10	1	2	22
Internatonale	10	1	1	21
Sabres	7	1	3	17
Allemagne	6	3	4	16
Sorrentos	4	0	8	16

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Bar} \\ \text{Int} \\ \text{Sab} \\ \text{All} \\ \text{Sor} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{V} & \text{D} & \text{N} & \text{P} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 22 \\ 10 & 1 & 1 & 21 \\ 7 & 1 & 3 & 17 \\ 6 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

Cette matrice correspond à une matrice des équipes et des points dans laquelle les équipes sont représentées par une rangée et les points par une colonne.

La matrice B représente le tableau des points pour la semaine suivante.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si les éléments de A et de B sont combinés, nous obtenons les résultats pour les sept premières semaines.

$$\text{Donc, } A + B = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 22 \\ 10 & 1 & 1 & 21 \\ 7 & 1 & 3 & 17 \\ 6 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & 24 \\ 12 & 1 & 1 & 25 \\ 8 & 1 & 4 & 20 \\ 6 & 4 & 5 & 17 \\ 5 & 1 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Enregistrez les données des matrices A et B dans la calculatrice graphique et déterminez la somme de A et de B. Utilisez le manuel de votre calculatrice graphique au besoin pour déterminer la procédure à suivre.

—suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Les Aliments de Californie distribuent des arachides, des amandes et des noix de cajou à trois magasins. La valeur des marchandises distribuées à chaque magasin en décembre et en janvier est indiquée dans les deux tableaux ci-dessous.

Décembre

	arachides	amandes	noix de cajou
Magasin A	235	310	280
Magasin B	400	240	400
Magasin C	180	120	200

Janvier

	arachides	amandes	noix de cajou
Magasin A	210	270	190
Magasin B	340	180	300
Magasin C	160	90	175

a) En utilisant votre calculatrice graphique ou ordinateur, créez les matrices *D* et *J* représentant la valeur des produits dans chaque magasin pour les mois de décembre et de janvier.

b) Additionnez les matrices *D* et *J* pour illustrer la valeur totale de chaque produit distribué à chaque magasin pendant la période de deux mois.

c) Soustrayez la matrice *J* de la matrice *D* pour illustrer la diminution des ventes de chaque produit dans chaque magasin.

d) Le directeur de chaque magasin augmente les prix de 40 %. Déterminez le revenu brut pour les magasins en décembre si les arachides, les amandes et les noix de cajou sont toutes vendues.

Solution

b) $$D+J=\begin{pmatrix}235 & 310 & 280\\ 400 & 240 & 400\\ 180 & 120 & 200\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}210 & 270 & 190\\ 340 & 180 & 300\\ 160 & 90 & 175\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}445 & 580 & 470\\ 740 & 420 & 700\\ 340 & 210 & 375\end{pmatrix}$$

c) $$D-J=\begin{pmatrix}235 & 310 & 280\\ 400 & 240 & 200\\ 180 & 120 & 200\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}210 & 270 & 190\\ 340 & 180 & 300\\ 160 & 90 & 175\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 40 & 90\\ 60 & 60 & 100\\ 20 & 30 & 25\end{pmatrix}$$

d) $$1,4D=1,4\begin{pmatrix}235 & 310 & 280\\ 400 & 240 & 400\\ 180 & 120 & 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}329 & 434 & 392\\ 560 & 336 & 560\\ 252 & 168 & 280\end{pmatrix}$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-1 Créer des modèles et résoudre des problèmes, y compris ceux déjà résolus, à l'aide de la technologie afin d'exécuter des opérations matricielles comme l'addition, la soustraction et la multiplication scalaire au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Résoudre une variété de problèmes par moyen de matrices en utilisant l'information tirée de la vie quotidienne. (suite)**

Exemple 2

Créez des matrices qui illustrent les listes de prix des pneus une fois la taxe de vente ajoutée.

La matrice ci-dessous représente le prix de quatre types de pneus d'automobile de Pneus Michelli et de Pneus Goodline. La première rangée représente les prix de Michelli et la deuxième rangée représente les prix de Goodline.

$$A = \begin{pmatrix} 46{,}50 & 52{,}70 & 62{,}40 & 81{,}70 \\ 48{,}30 & 51{,}90 & 59{,}70 & 83{,}50 \end{pmatrix}$$

a) Créez une nouvelle matrice, T_0 représentant le montant de la taxe de vente payable pour chaque pneu si cette taxe est de 10 %.

b) Enregistrez la matrice dans votre calculatrice et utilisez les opérations appropriées pour produire les matrices B et C en indiquant par B la taxe de vente payable sur chaque pneu de 14 % et par C le coût de chaque pneu lorsque la taxe de vente est incluse.

c) Expliquez comment vous pouvez obtenir la matrice C en utilisant la matrice A seulement, et comment vous pouvez obtenir la matrice C en utilisant les matrices A et B.

d) Expliquez dans quelles circonstances il serait préférable d'exécuter des opérations semblables en utilisant la technologie plutôt qu'en effectuant les calculs par écrit.

Solution

a) Chaque élément de la matrice A est multiplié par 0,10.

$$0{,}10A = T_0 = \begin{pmatrix} 4{,}65 & 5{,}27 & 6{,}24 & 8{,}17 \\ 4{,}83 & 5{,}19 & 5{,}97 & 8{,}35 \end{pmatrix}$$

b)
$$0{,}14A = B = \begin{pmatrix} 6{,}51 & 7{,}38 & 8{,}74 & 11{,}44 \\ 6{,}76 & 7{,}27 & 8{,}36 & 11{,}69 \end{pmatrix}$$

$$1{,}14A = C = \begin{pmatrix} 53{,}01 & 60{,}08 & 71{,}14 & 93{,}14 \\ 55{,}06 & 59{,}17 & 68{,}06 & 95{,}19 \end{pmatrix}$$

c) $C = 1{,}14A$ ou $C = A + B$

d) La technologie devient très utile lorsque la quantité de données augmente (par exemple, pour dix fabricants de pneus et 15 marques de pneus). La technologie est aussi utile lorsque les calculs sont difficiles à exécuter mentalement.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES
A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.	• **Utiliser la technologie pour exécuter la multiplication matricielle.**

La règle de la multiplication matricielle est énoncée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

Nota **:** Pour le produit d'une matrice $M \times N$ et d'une matrice $P \times Q$:

a) N doit égaler P

b) La matrice qui en résulte a pour dimension $M \times Q$

Exemple

Utilisez une calculatrice graphique ou un ordinateur pour exécuter les multiplications matricielles ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

a) AB b) BA

c) CB d) BC

e) DC

f) $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $(1 \quad 1)C$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Exécutez les opérations matricielles ci-dessous. Ces questions peuvent être utilisées en tant que questions de mathématiques mentales.

a) Déterminez les valeurs de x et y : $(5\ \ 7) + (3\ \ 11) = (x\ \ y)$

b) Déterminez les valeurs de x et y : $4\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) Simplifiez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) Simplifiez : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) Simplifiez : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) Simplifiez : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

g) Simplifiez : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

h) Simplifiez : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

i) Simplifiez : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution

a) $x = 8$, $y = 18$

b) $x = 8$, $y = 20$

c) (9)

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

NOTES

Mathématiques appliquées, Secondaire 4 – Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, MB : Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

— Module 1, Leçons 4, 5 et 6

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Utiliser la technologie pour exécuter une multiplication matricielle. (suite)**

Exemple — suite

Solution

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = (10 + 18 + 28) = 56$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 12 & 18 & 24 \\ 14 & 21 & 28 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 94 \\ 52 \end{pmatrix}$

d) Aucune solution — dimension ne correspond pas.

e) $\begin{pmatrix} 7 & -22 & 39 \\ 61 & 20 & 63 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Expliquez comment multiplier ces matrices mentalement.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. Expliquez pourquoi il est impossible de déterminer le produit ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Expliquez pourquoi il est impossible de déterminer la somme ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solutions

1. Multipliez les rangées par les colonnes et additionner les produits.
   $2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-7) = 2$
   $(-1) \cdot 4 + 6 \cdot 3 + (-2)(-7) = 28$
2. Le nombre de colonnes et de rangées doit être le même dans la première et la deuxième matrices pour qu'elles puissent être multipliées.
3. Lorsqu'on additionne des matrices, la dimension des deux matrices doit être la même.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Créer et utiliser des matrices pour résoudre des problèmes.**

Exemple 1

La compagnie Articles de sport Burgess fournit des balles, des bâtons et des gants à des magasins d'articles de sport. Le tableau ci-dessous indique le nombre d'articles commandés par quatre magasins différents.

	Balles	Bâtons	Gants
Magasin P	70	30	22
Magasin Q	60	20	19
Magasin R	70	15	24
Magasin S	50	40	12

Le coût de chaque balle est de 8 \$, celui de chaque bâton est de 30 \$ et celui de chaque gant est de 75 \$.

a) Indiquez la commande totale dans la matrice N.

b) Indiquez le coût par article dans une colonne de la matrice A.

c) En utilisant la multiplication matricielle, créez une matrice C illustrant le coût par magasin pour chaque type d'article commandé.

d) Créez la matrice D pour qu'elle comprenne des frais d'expédition de 2 % par article.

e) Quel est le montant que doit verser chaque magasin à la compagnie Burgess?

f) Déterminez le montant total que recevra la compagnie Burgess.

Solutions

a) $N = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 22 \\ 60 & 20 & 19 \\ 70 & 15 & 24 \\ 50 & 40 & 12 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{array}{r} \text{balle} \\ \text{bâton} \\ \text{gant} \end{array} \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 75 \end{pmatrix}$

c) $C = N \cdot A,\ C = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 22 \\ 60 & 20 & 19 \\ 70 & 15 & 24 \\ 50 & 40 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 75 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3110 \\ 2505 \\ 2810 \\ 2500 \end{pmatrix}$

d) $D = 1{,}02 \cdot C,\ D = \begin{pmatrix} 3172{,}20 \\ 2555{,}10 \\ 2866{,}20 \\ 2550{,}00 \end{pmatrix}$

e) Le magasin P doit verser 3172,20 \$
Le magasin Q doit verser 2555,10 \$
Le magasin R doit verser 2866,20 \$
Le magasin S doit verser 2550,00 \$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

L'Entrepôt du son fabrique des chaînes stéréo. Il fabrique quatre modèles : les modèles Budget, Économie, Exécutif et Présidentiel. Le modèle Budget requiert 50 transistors, 30 condensateurs, sept connecteurs et trois cadrans. Le modèle Économie requiert 65 transistors, 50 condensateurs, neuf connecteurs et quatre cadrans. Le modèle Exécutif requiert 85 transistors, 42 condensateurs, dix connecteurs et six cadrans. Le modèle Présidentiel requiert 85 transistors, 42 condensateurs, dix connecteurs et douze cadrans. La production quotidienne visée dans un trimestre normal est de 10 chaînes du modèle Budget, 12 du modèle Économie, 11 du modèle Exécutif et 7 du modèle Présidentiel.

a) Combien de transistors sont requis chaque jour? De condensateurs? De connecteurs? De cadrans?

b) Pendant les mois d'août et de septembre, la production a augmenté de 40 %. Combien de chaînes des modèles Budget, Économie, Exécutif et Présidentiel ont été produites pendant ces mois?

c) La fabrication du modèle Budget requiert 5 personnes/heure, le modèle Économie requiert 7 personnes/heure, le modèle Exécutif requiert 6 personnes/heure et le modèle Présidentiel requiert 7 personnes/heure. Déterminez le nombre d'employés requis pour respecter l'horaire de production normal si chaque employé travaille pendant une moyenne de 7 heures par jour. Combien d'employés sont requis pendant les mois d'août et de septembre?

Solution

a)

$$A = \begin{array}{r} \\ trans \\ cond \\ conn \\ cadr \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Bud} & \text{Éco} & \text{Exe} & \text{Pré} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 65 & 85 & 85 \\ 30 & 50 & 42 & 42 \\ 7 & 9 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{r} \\ Bud \\ Éco \\ Exe \\ Pré \end{array} \begin{array}{c} \text{jour} \\ \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A \cdot B = \begin{array}{r} \\ trans \\ cond \\ conn \\ cadr \end{array} \begin{array}{c} \text{jour} \\ \begin{pmatrix} 2810 \\ 1656 \\ 358 \\ 228 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nombre de transistors par jour = 2 810
Nombre de condensateurs par jour = 1 656
Nombre de connecteurs par jour = 358
Nombre de cadrans par jour = 228

– suite

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

–suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Créer et utiliser des matrices pour résoudre des problèmes.**

Exemple 1 — suite

Solution — suite

f) En multipliant la matrice D par la matrice en rangées $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$, on additionne les éléments de chaque colonne dans la matrice.
$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)D = 11\ 143{,}50$ $

***Nota* :** Le même procédé peut être utilisé pour décrire les stocks de nombreux magasins tenant une grande quantité d'articles en stock. Les calculs peuvent être effectués très rapidement à l'aide de la technologie.

Exemple 2

Un virus s'attaque aux élèves d'une école. L'infirmière Bertha découvre que les élèves sont malades, se portent bien ou sont porteurs du virus. Elle détermine que les pourcentages d'élèves du secondaire 3 et du secondaire 4 dans chaque catégorie sont les suivants :

	Sec. 3	Sec. 4
Bien	15 %	25 %
Malades	35 %	40 %
Porteurs	50 %	35 %

La population étudiante est répartie par catégorie et par sexe comme suit :

	Garçons	Filles
Sec. 3	104	80
Sec. 4	107	103

Utilisez les opérations matricielles pour répondre aux questions ci-dessous. Arrondissez toutes les réponses au nombre entier le plus près.

a) Quel est le nombre de garçons malades?

b) Quel est le nombre de filles qui se portent bien?

c) Quel est le nombre de filles qui sont porteuses du virus?

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Solution – suite

b) $D = 1,4 \cdot B = \begin{pmatrix} 14 \\ 16,8 \\ 15,4 \\ 9,8 \end{pmatrix}$

La production quotidienne moyenne est de quatorze chaînes du modèle Budget, 16,8 du modèle Économie, 15,4 du modèle Exécutif et 9,8 du modèle Présidentiel.

c) $C = \text{heures} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Bu} & \text{Ec} & \text{Ex} & \text{Pr} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} = 249 \text{ heures/jour}$

Nombre d'employés = 249/7 = 35 4/7 = 36 employés

En août et en septembre, 1,4 x 249 = 348,6 heures/jour

Ou

$C \cdot D = (348,6)$

Nombre d'employés = 348,6/7 = 49,8 = 50 employés

Problème

Dans une mine de charbon, les quantités de charbon de catégorie 1 et de catégorie 2 (en tonnes) obtenues par ***quart de travail*** sont différentes pour deux couches exploitables, les couches A et B, et ces quantités sont illustrées dans le tableau suivant.

	Catégorie 1	Catégorie 2
Couche A	4000	2000
Couche B	1000	3000

La couche A accueille cinq quarts de travail par semaine et la couche B accueille quatre quarts de travail par semaine. Le charbon de catégorie 1 se vend 9 $ la tonne et le charbon de la catégorie 2 se vend 8 $ la tonne.

a) Créez une matrice de 2 par 2 illustrant le nombre de tonnes de charbon de chaque catégorie extrait de chaque couche par semaine. Identifiez cette matrice par la lettre *A*.

b) Créez une matrice de 2 par 1 illustrant le prix d'une tonne de charbon de chaque catégorie. Identifiez cette matrice par la lettre *B*.

c) Créez une matrice de 1 par 2 illustrant le nombre de quarts de travail par semaine par couche. Identifiez cette matrice par la lettre *C*.

d) Déterminez la quantité totale de charbon de chaque catégorie extraite par semaine. Votre réponse doit être présentée sous la forme d'une matrice de 1 par 2 qui sera identifiée par la lettre *D*.

e) Déterminez la valeur du charbon extrait à chaque couche en une semaine. Votre réponse doit être présentée sous la forme d'une matrice de 2 par 1 qui sera identifiée par la lettre *E*.

f) Déterminez la valeur marchande totale de tout le charbon extrait en une semaine. Utilisez la multiplication matricielle pour déterminer votre réponse.

g) L'élève TZ était dans la lune pendant le cours sur la multiplication matricielle et il a répondu à la question d) en multipliant

$$\begin{pmatrix} 4000 & 2000 \\ 1000 & 3000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ plutôt que } \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 & 2000 \\ 1000 & 3000 \end{pmatrix}$$

et il a découvert que la multiplication fonctionnait, mais que la réponse n'avait aucun sens. Expliquez pourquoi.

– suite

quart de travail **:** Période au cours de laquelle un salarié exécute sa tâche dans une organisation dont l'activité est divisée en deux ou trois périodes successives au cours d'une journée

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Créer et utiliser des matrices pour résoudre des problèmes. (suite)**

  Exemple – suite

  Solution

$$A = \begin{array}{c} \\ B \\ M \\ P \end{array}\begin{array}{c} \text{Sec. 3} \quad \text{Sec. 4} \\ \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}25 \\ 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}50 & 0{,}35 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{Sec. 3} \\ \text{Sec. 4} \end{array}\begin{array}{c} \text{G} \quad \text{F} \\ \begin{pmatrix} 104 & 80 \\ 107 & 103 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = A \cdot B,\ C = \begin{array}{c} \\ B \\ M \\ P \end{array}\begin{array}{c} \text{G} \quad \text{F} \\ \begin{pmatrix} 42 & 37 \\ 79 & 69 \\ 89 & 76 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Les réponses sont indiquées dans la matrice C.

  a) C_{21} = 79 garçons malades

  b) C_{12} = 37 filles qui se portent bien

  c) C_{32} = 76 filles porteuses du virus

- **Créer et utiliser des matrices de transition pour résoudre des problèmes.**

  Définition d'une matrice de transition : matrice qui contient de l'information illustrant le changement d'un état présent à un nouvel état.

$$T = \text{De} \begin{array}{r} \\ \\ \text{Amér.} \\ \text{Jap.} \\ \text{All.} \\ \text{Autre} \end{array}\begin{array}{c} \text{À} \\ \text{Amér.} \quad \text{Jap.} \quad \text{All.} \quad \text{Autre} \\ \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}60 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}35 & 0{,}10 & 0{,}45 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{pmatrix} \end{array}$$

  L'entrée T_{12} représente le pourcentage d'acheteurs d'automobiles qui possèdent présentement une automobile américaine et qui prévoient que leur prochaine automobile sera japonaise.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Solution

a) $A = \begin{pmatrix} 4000 & 2000 \\ 1000 & 3000 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $C = (5 \quad 4)$

d) $D = C \cdot A = (5 \quad 4)\begin{pmatrix} 4\,000 & 2\,000 \\ 1\,000 & 3\,000 \end{pmatrix} = (24\,000 \quad 22\,000)$

e) $E = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4\,000 & 2\,000 \\ 1\,000 & 3\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52\,000 \\ 33\,000 \end{pmatrix}$

f) $C \cdot E = (5 \quad 4)\begin{pmatrix} 52\,000 \\ 33\,000 \end{pmatrix} = 392\,000\,\$$

g) Les unités des colonnes de la première matrice doivent être les mêmes que les unités des rangées de la deuxième matrice.

Problème

La main-d'œuvre d'une petite localité est de 1 800 personnes. Sur ces personnes, 120 sont au chômage et 1 680 ont un emploi. Au cours d'une année, 10 % des travailleurs qui ont un emploi perdront leur emploi et 60 % des personnes qui sont au chômage trouveront un emploi.

a) Créez une matrice de 1 × 2 illustrant le nombre de personnes ayant un emploi et le nombre de personnes au chômage. Nommez cette matrice E_1.

b) Complétez la matrice de transition et nommez cette matrice T.

c) Déterminez le nombre de personnes ayant un emploi et au chômage pendant la deuxième année. Inscrivez vos réponses dans la matrice E_2.

d) Déterminez le nombre de personnes ayant un emploi et au chômage pendant la troisième année. Inscrivez vos réponses dans la matrice E_3.

e) Répétez le même processus qu'à la question d) pour déterminer le nombre de personnes ayant un emploi et au chômage pendant les quatrième et cinquième années. Donnez des commentaires sur les résultats.

Solution

a) $E_1 = (\text{n}^{\text{bre}} \text{ à l'emploi} \quad \text{au chômage}) = (1680 \quad 120)$

b) $T = \begin{array}{r} \text{à l'emploi} \\ \text{au chômage} \end{array}\begin{pmatrix} \text{garde emploi} & \text{perd emploi} \\ \text{trouve emploi} & \text{pas d'emploi} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}40 \end{pmatrix}$

c) $E_2 = (1680 \quad 120)\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}40 \end{pmatrix} = (1584 \quad 216)$

d) $E_3 = (1584 \quad 216)\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}40 \end{pmatrix} = (1555 \quad 245)$

e) $E_4 = E_3 \cdot T = (1546 \quad 253)$
$E_5 = E_4 \cdot T = (1544 \quad 256)$

Le nombre de personnes au chômage a augmenté rapidement pendant la première année, mais il atteint un certain équilibre à la cinquième année.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Créer et utiliser des matrices pour résoudre des problèmes. (suite)**

Exemple

Un fabricant d'automobiles fabrique trois modèles d'automobiles : une grosse voiture, une compacte et une voiture économique. Sur les acheteurs de grosses voitures, 13 % affirment que leur prochaine automobile sera une voiture compacte et 2 % affirment que leur prochaine automobile sera une voiture économique. Sur les acheteurs de voitures compactes, 5 % affirment que leur prochaine automobile sera une grosse voiture et 4 % affirment que leur prochaine automobile sera une voiture économique. Sur les acheteurs de voitures économiques, 21 % affirment que leur prochaine automobile sera une voiture compacte et 3 % affirment que leur prochaine automobile sera une grosse voiture.

a) Créez la matrice T de 3 x 3 qui illustre les changements de comportement.

b) À l'origine, les parts de marché de chaque type de voiture étaient les suivantes : 30 % pour les grosses voitures, 20 % pour les voitures compactes et 50 % pour les voitures économiques. Créez une matrice M_1 de 1 x 3 illustrant les parts de marché actuelles pour les grosses voitures, les voitures compactes et les voitures économiques.

c) Déterminez les parts de marché en ce qui concerne les prochaines automobiles achetées en multipliant $M_1 \cdot T$. Nommez cette matrice M_2.

d) Calculez $M_2 \cdot T$ pour déterminer les parts de marché en ce qui concerne les prochaines automobiles achetées (c'est-à-dire les troisièmes automobiles). Nommez cette matrice M_3.

Solution

a) Soit

$$T = de \quad \begin{array}{r} \\ \textit{grosse} \\ \textit{compact} \\ \textit{économique} \end{array} \begin{array}{c} \text{a} \\ \begin{array}{ccc} \text{grosse} & \text{comp.} & \text{écono.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,85 & 0,13 & 0,02 \\ 0,05 & 0,91 & 0,04 \\ 0,03 & 0,31 & 0,76 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$M_1 = \% \quad \begin{array}{ccc} \text{grosse} & \text{comp.} & \text{écono.} \\ (0,3 & 0,2 & 0,5) \end{array}$$

M_1 correspond à la part de marché d'origine

c)

$$M_1 \cdot T = (0,3 \quad 0,2 \quad 0,5)\begin{pmatrix} 0,85 & 0,13 & 0,02 \\ 0,05 & 0,91 & 0,04 \\ 0,03 & 0,21 & 0,76 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \text{grosse} & \text{comp.} & \text{écono.} \\ (0,28 & 0,33 & 0,39) \end{array} = M_2$$

Donc, les parts de marché en ce qui concerne les prochaines automobiles achetées sont les suivantes : grosse voiture = 28 %; compacte = 33 %; économique = 39 %.

d)

$$M_2 = \begin{array}{ccc} \text{grosse} & \text{comp.} & \text{écono.} \\ (0,28 & 0,33 & 0,39) \end{array}$$

M2 correspond à la part de marché des deuxièmes automobiles achetées.

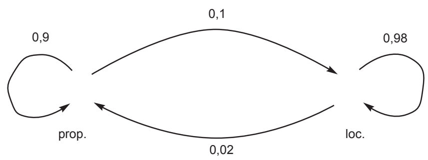
$$M_2 \cdot T = (0,28 \quad 0,33 \quad 0,39)\begin{pmatrix} 0,85 & 0,13 & 0,02 \\ 0,05 & 0,91 & 0,04 \\ 0,03 & 0,21 & 0,76 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \text{grosse} & \text{comp.} & \text{écono.} \\ (0,27 & 0,42 & 0,32) \end{array} = M_3$$

Donc, les parts de marché pour les prochaines automobiles achetées sont les suivantes : grosse voiture = 27 %; compacte = 42 %; économique = 32 %. (***Nota*** **:** les pourcentages sont arrondis à des nombres entiers.)

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

En 1998, dans une petite ville, 65 % des habitants sont propriétaires d'une maison et 35 % sont locataires. Le diagramme ci-dessous illustre les changements quant aux pourcentages de propriétaires et de locataires.



a) Créez la matrice en rangées A (à l'aide de décimales) illustrant les pourcentages de propriétaires et de locataires en 1998.

b) Créez la matrice de transition T décrivant les changements illustrés dans le diagramme.

c) Utilisez la multiplication matricielle pour déterminer les pourcentages de propriétaires et de locataires en 1999. Inscrivez vos réponses dans la matrice B.

d) Si les pourcentages continuent à changer, déterminez les pourcentages projetés de propriétaires et de locataires en 2000 et 2001. Quelle conclusion peut-on tirer à propos des pourcentages de propriétaires et de locataires?

e) Complétez le tableau illustré.

f) Si les habitudes de changement observées en 1998 se maintiennent pendant 50 ans, quel est le pourcentage des gens qui seront propriétaires de leur résidence? Les pourcentages des gens qui possèdent et qui louent leur résidence semblent-ils atteindre un équilibre? Donnez des commentaires.

N^bre^ d'années	Année	Opération matricielle	Propr. (%)	Loc. (%)
0	1998	A	65	35
1	1999	AT	59,2	40,8
2	2000	AT^2	54,1	45,9
3	2001	AT^3		
5	2003	AT^5		
10	2008	AT^{10}		
20	2018			
35				
50				
100				

Solution

a) $A = \begin{array}{cc} \text{propr.} & \text{loc.} \\ (0{,}65 & 0{,}35) \end{array}$

b) $T = \begin{array}{c} \\ \text{prop.} \\ \text{loc.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{prop.} & \text{loc.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix} \end{array}$

c) $B = A \cdot T = (0{,}592 \quad 0{,}408)$

d) $C = B \cdot T = AT^2 = (0{,}541 \quad 0{,}459)$
$D = C \cdot T = AT^3 = (0{,}496 \quad 0{,}504)$

En l'an 2001, le nombre de locataires excédera le nombre de propriétaires.

e)

N^bre^ d'années	Année	Opération matricielle	Propr. (%)	Loc. (%)
0	1998	A	65	35
1	1999	AT	59,2	40,8
2	2000	AT^2	54,1	45,9
3	2001	AT^3	49,6	50,4
5	2003	AT^5	42,2	57,8
10	2008	AT^{10}	30,1	69,9
20	2018	AT^{20}	20,4	79,6
35	2033	AT^{35}	17,2	82,8
50	2048	AT^{50}	16,7	83,3
100	2098	AT^{100}	16,7	83,3

f) Dans 50 ans, 16,7 % des gens seront propriétaires de leur résidence. Le nombre de personnes propriétaires et locataires de leur résidence semble avoir atteint un équilibre. Si on vérifie pendant 100 ans, AB^{100} = 16,7 et 83,3 (même résultat que pour AT^{50}).

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

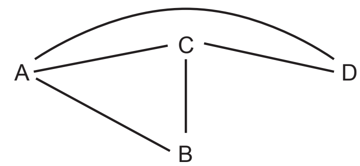
A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Reconnaître les réseaux et les matrices.**

Examinez les noeuds suivants [A, B, C et D] et les routes entre eux.



Routes directes : La matrice R représente le nombre de routes ***directes*** entre chaque paire de noeuds. Le chiffre 1 indique qu'il existe une route entre deux noeuds et 0 indique qu'il n'existe aucune route entre deux noeuds.

$$R = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Routes indirectes : La matrice suivante représente le nombre de routes ***indirectes*** reliant des noeuds lorsque la route croise un autre nœud seulement. Par exemple, de D à B, les routes sont D-C-B et D-A-B. Les routes de A à A sont A-B-A, A-C-A et A-D-A.

$$I = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vous remarquerez que la matrice I ci-dessus peut aussi être déterminée par le produit de la matrice $R \cdot R$ ou R^2.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I$$

De la même manière, R^3 représenterait des routes indirectes croisant deux autres noeuds.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

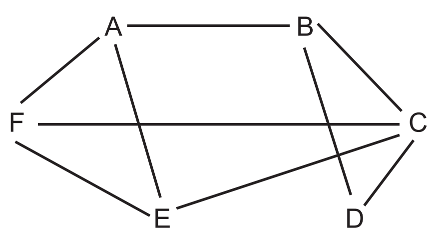
Problème

Six personnes assistent à une fête. Leurs noms sont Anne, Bruno, Colin, Diane, Éric et François. La matrice ci-dessous indique quelle personne a parlé à une autre personne (représentée par 1), et quelle personne n'a pas parlé à une autre personne (indiquée par 0).

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tracez un graphique de réseau pour illustrer la matrice.

Solution



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

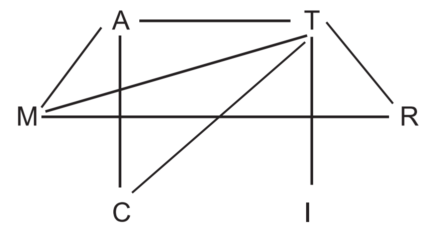
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Reconnaître les réseaux et les matrices. (suite)**

Exemple

Six villes, M, A, T, R, I et C ont le réseau de communication illustré ci-dessous.



a) Créez la matrice A représentant les routes directes entre les villes.

b) Déterminez A^2 et A^3.

c) Quelle ville est la plus vulnérable aux pannes si une route de communication est coupée?

d) Nommez la ville qui a le plus grand nombre de liens indirects de communication via une autre ville seulement.

e) Nommez deux villes qui n'ont aucun lien indirect de communication via une autre ville seulement. Expliquez votre réponse.

f) Combien de liens indirects de communication les deux villes en e) ont-elles si elles peuvent être reliées via deux villes?

g) Quelles villes ne peuvent pas être reliées via deux autres villes seulement? Expliquez votre réponse.

h) Qu'est-ce que $A + A^2 + A^3$ représente?

Solution

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ A \\ T \\ R \\ I \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M & A & T & R & I & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

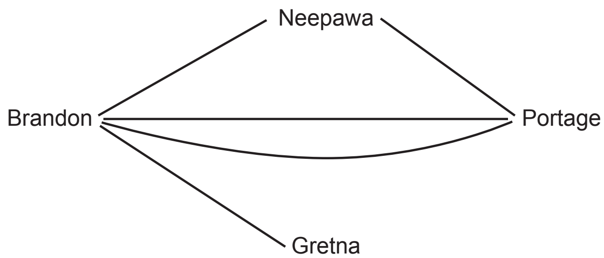
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème 2

Créez la matrice d'un réseau carré à partir du diagramme ci-dessous, dans lequel 1 indique qu'il existe un chemin direct entre chaque sommet et 0 indique qu'il n'existe aucun chemin direct.



Solution

$$\begin{array}{c} \\ B \\ G \\ N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & G & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Reconnaître les réseaux et les matrices. (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite

b)

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ M \\ A \\ T \\ R \\ I \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M & A & T & R & I & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ M \\ A \\ T \\ R \\ I \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M & A & T & R & I & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) La ville I parce qu'elle n'a qu'un seul lien direct.

d) $A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 11 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ La matrice en colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ multipliée par A^2

fournit la somme des éléments des rangées de A^2. La ville T a le plus grand nombre de liens de communication, soit 11, y compris cinq jusqu'à elle-même.

e) La ville T et la ville I n'ont aucun lien indirect de communication via une autre ville. Nous le savons parce que dans A^2, $A_{35} = A_{53} = 0$.

f) La ville T et la ville I ont cinq liens indirects de communication via deux autres villes parce que dans A^2, $A_{35} = A_{53} = 0$.

g) La matrice A^3 n'a qu'un seul élément 0 à A_{55}, et cela indique que la ville I ne peut pas être reliée à elle-même via deux autres villes seulement. Tous les autres éléments ont des solutions non nulles, ce qui signifie que des connexions sont possibles.

h) La somme correspond au nombre total de routes entre les villes si nous incluons toutes les routes directes, les routes indirectes via une ville et les routes indirectes via deux villes.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème 3

Une entreprise de nettoyage du grain compte cinq appareils de nettoyage, A, B, C, D et E. Ces appareils sont reliés par un convoyeur qui déplace le grain comme suit :

A peut déplacer le grain vers B et D.
B peut déplacer le grain vers A et C.
C peut déplacer le grain vers D.
D peut déplacer le grain vers E.
E peut déplacer le grain vers A et C.

a) Vous devez créer la matrice A pour représenter les routes directes entre les appareils. Le chiffre « 1 » indique qu'il existe une route directe et le « 0 » indique qu'il n'y a pas de route directe.

b) Vous devez aussi créer la matrice B pour indiquer le nombre de façons dont le grain peut être déplacé entre les appareils en passant par un autre appareil.

c) Le grain peut-il être déplacé de chacun des appareils à tous les autres appareils en ne faisant que deux déplacements sur le convoyeur? Si cela est impossible, vous devez indiquer à partir de quels appareils cela n'est pas possible. Expliquez comment vous pouvez déterminer la réponse.

Solutions

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$B = A^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Le grain ne peut pas être déplacé de B à E, de C à A, de C à B ni de D à B.

$$A + B = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le « 0 » indique qu'il n'existe aucun lien entre les appareils si un maximum de deux déplacements sur le convoyeur sont utilisés.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

A-2 Créer des modèles et résoudre des problèmes reliés aux consommateurs et aux réseaux en utilisant la technologie afin d'exécuter une multiplication matricielle au besoin.

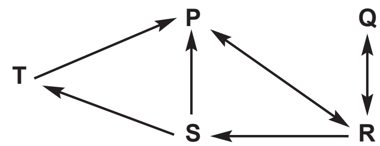
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **Reconnaître les réseaux et les matrices. (suite)**

  Exemple 2

  Le diagramme ci-dessous illustre les vols entre cinq villes pendant une fin de semaine.



a) Créez la matrice A pour représenter les routes directes entre les villes.

b) Déterminez le nombre de façons dont les passagers de chacune des villes peuvent se rendre à toute autre ville en ne faisant qu'un arrêt. Représentez votre réponse sous forme de matrice.

c) Quelles villes ne peuvent pas être reliées si seulement deux arrêts sont faits?

d) Est-il possible de se rendre de chacune des villes à toute autre ville sans arrêt, avec un arrêt ou avec deux arrêts? Comment le savez-vous?

Solution

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{T} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$B = A^2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{T} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

c)

$$C = A^3 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{T} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) Toutes les villes peuvent être reliées directement, avec un arrêt ou avec deux arrêts. Toutes les routes entre les différentes villes ont un chiffre autre que « 0 » en A, B ou C.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Stratégies d'évaluation

Notes

Opérations matricielles sur la calculatrice TI-83

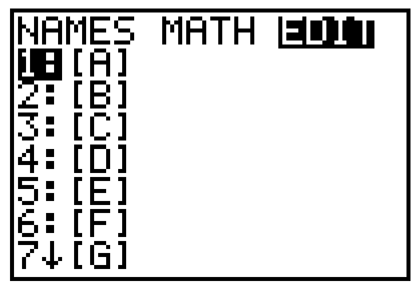
Annexe A-1

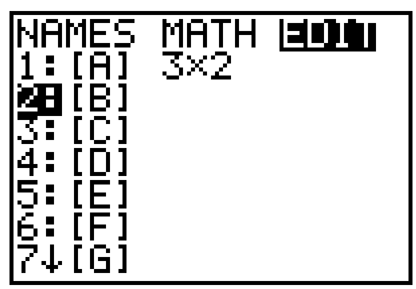
Pour remettre des matrices à zéro

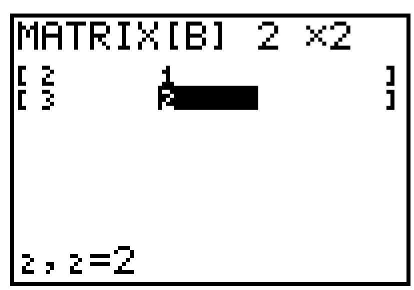
- ❒ Mettez la calculatrice TI-83 en marche.
- ❒ Appuyez sur [2nd] [+] pour avoir accès à l'écran Memory
- ❒ Appuyez sur [2] pour avoir accès à l'écran Delete
- ❒ Appuyez sur [5] pour faire une suppression à l'écran Matrix
- ❒ Lorsque le curseur est sur [A], Appuyez sur [ENTER]
- ❒ Appuyez sur [ENTER] pour supprimer toute autre matrice.
- ❒ Appuyez sur [2nd] [QUIT] pour faire afficher l'écran d'accueil.

Pour enregistrer des matrices

- ❒ Appuyez sur [MATRIX]
- ❒ Déplacez le curseur jusqu'à EDIT
- ❒ Appuyez sur [ENTER] pour sélectionner et modifier la matrice A.
- ❒ Appuyez sur [3], [ENTER], [2] pour obtenir la structure d'une matrice de 3 x 2.
- ❒ Appuyez sur [1], [ENTER], [2], [ENTER], pour enregistrer les éléments de la première ligne.
- ❒ Appuyez sur [3], [ENTER], [4], [ENTER], pour enregistrer les éléments de la deuxième ligne.
- ❒ Appuyez sur [5], [ENTER], [6], [ENTER], pour enregistrer les éléments de la troisième ligne.
- ❒ Appuyez sur [MATRIX] pour revenir à l'écran Matrix
- ❒ Déplacez le curseur jusqu'à EDIT
- ❒ Déplacez le curseur vers le bas jusqu'à [2:] et appuyez sur [ENTER] pour sélectionner et modifier la matrice B.
- ❒ Appuyez sur [2], [ENTER], [2] pour obtenir la structure d'une matrice de 2 x 2.
- ❒ Appuyez sur [2], [ENTER], [1], [ENTER], pour enregistrer les éléments de la première ligne.
- ❒ Appuyez sur [3], [ENTER], [2], [ENTER], pour enregistrer les éléments de la deuxième ligne.
- ❒ Appuyez sur [2nd] [MODE] pour quitter la fonction de modification et pour retourner à l'écran d'accueil de la calculatrice TI-83.

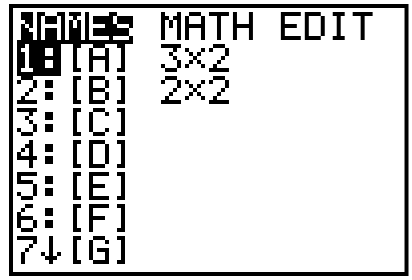


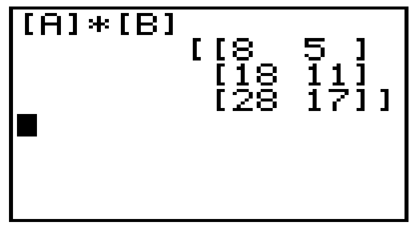




Opérations matricielles

- ❒ Appuyez sur [MATRIX] pour obtenir l'écran Matrix.
- ❒ Lorsque le curseur est sur [1:], Appuyez sur [ENTER] pour obtenir la matrice [A].
- ❒ Appuyez sur [x] pour obtenir un produit.
- ❒ Appuyez sur [MATRIX] pour retourner à l'écran Matrix.
- ❒ Déplacez le curseur vers le bas jusqu'à [2:], et appuyez sur [ENTER] pour obtenir la matrice [B].
- ❒ Appuyez sur [ENTER] une fois de plus pour effectuer la multiplication.
- ❒ Le résultat apparaît à l'écran.
- ❒ Appuyez sur [CLEAR] pour remettre l'écran à zéro.
- ❒ Répétez le même processus pour obtenir le produit BB ou B^2





Pour enregistrer une nouvelle matrice après une opération matricielle

Dans l'exemple ci-dessus, la réponse de [A] * [B] peut être enregistrée en tant que matrice C.

- ❒ Appuyer sur [STO→] pour obtenir Ans→
- ❒ Appuyer sur [MATRIX] pour obtenir la liste de noms.
- ❒ Appuyer sur [3:] pour sélectionner C, puis appuyez sur [ENTER]
- ❒ Appuyer sur [CLEAR] pour remettre l'écran à zéro.

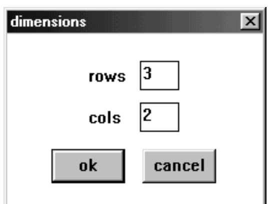
La réponse de [A] * [B] est maintenant enregistrée en tant que matrice C.

Opérations matricielles à l'aide de Winmat

Annexe A-2

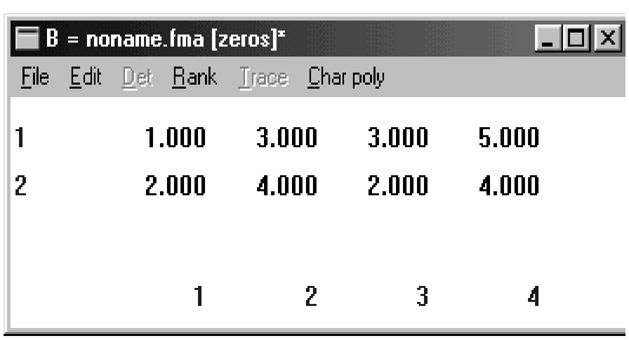
Pour enregistrer la matrice A

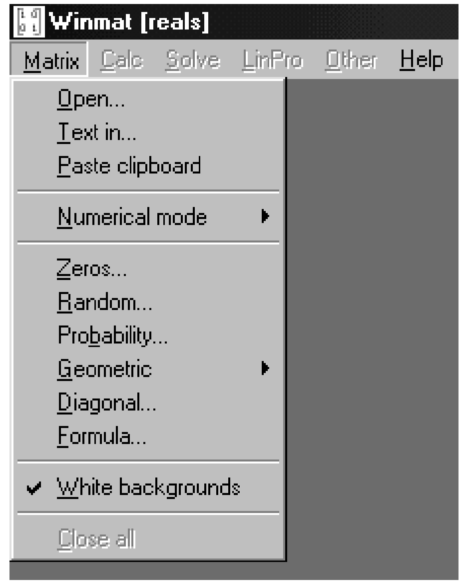
- ❒ Ouvrez Winmat
- ❒ Cliquez sur Matrix
- ❒ Sélectionnez Zeros dans la boîte de dialogue qui s'ouvre.
- ❒ Enregistrez [3] pour le nombre de lignes et [2] pour le nombre de colonnes et cliquez sur OK
- ❒ Une boîte de dialogue de matrice apparaît.
- ❒ Cliquez sur l'entrée (0.000) dans la 1ère ligne et dans la 1ère colonne et tapez [1]
- ❒ Appuyer sur [Enter] et tapez les autres éléments de la matrice de la même manière.

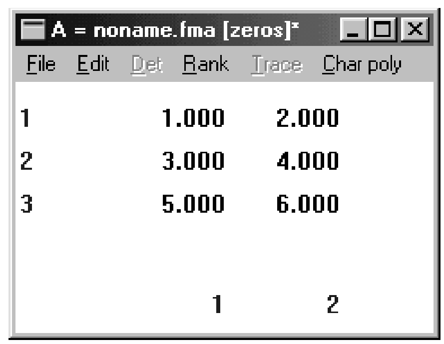


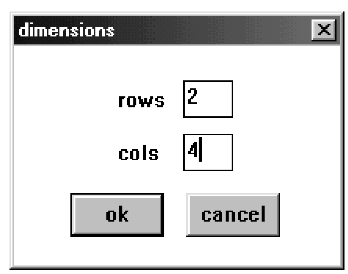
Pour enregistrer la matrice B

- ❒ Cliquez sur Matrix.
- ❒ Sélectionnez Zeros dans la boîte de dialogue qui s'ouvre.
- ❒ Enregistrer [2] pour le nombre de lignes et [4] pour le nombre de colonnes et cliquez sur OK.
- ❒ Une boîte de dialogue de matrice apparaît.
- ❒ Cliquez sur l'entrée dans la 1ère ligne et dans la 1ère colonne et tapez [1].
- ❒ Appuyer sur [Enter] et tapez les autres éléments de la matrice de la même manière.
- ❒ Appuyer sur [Enter] et tapez les autres éléments de la matrice de la même manière.



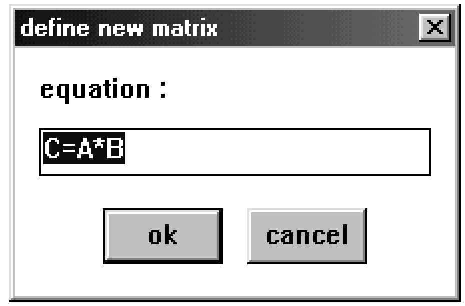


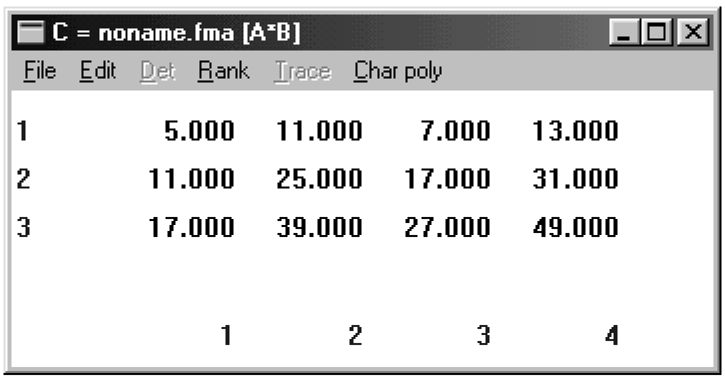




Opérations matricielles

- ❒ Cliquez sur Calc…
- ❒ Une boîte de dialogue s'affichera pour la définition de la nouvelle matrice.
- ❒ Modifiez la définition (C= A*B) ou cliquez sur OK pour obtenir le produit.
- ❒ Cliquez sur Calc une fois de plus pour définir une nouvelle opération.





Winmat est un logiciel de mathématiques gratuit offert par Peanut Software. Il est disponible en français. Il s'agit d'un fichier comprimé (127 K) qui est autodécompressible.

L'adresse électronique est la suivante : http://math.exeter.edu/rparris/. Cette adresse fera afficher la page d'accueil.