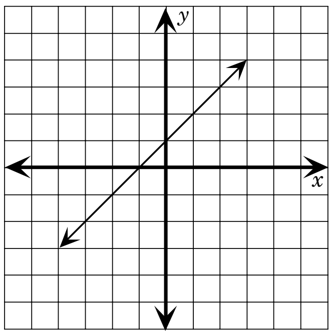
Unité A
Fonctions non-linéaires

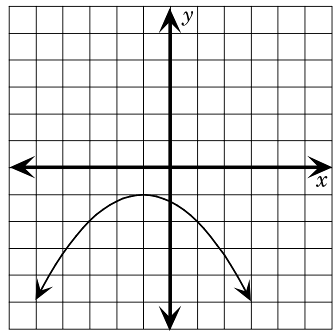
Exercice 1 : Fonctions quadratiques

1. Indique s'il s'agit de fonctions linéaires, quadratiques ou autres.

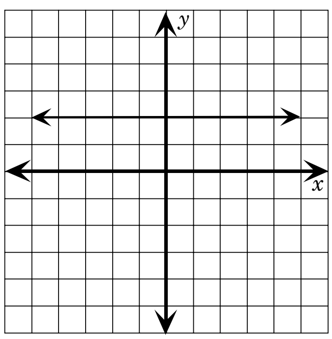
a)



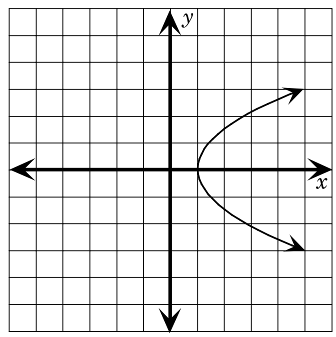
b)



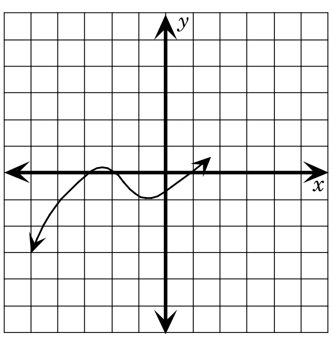
c)



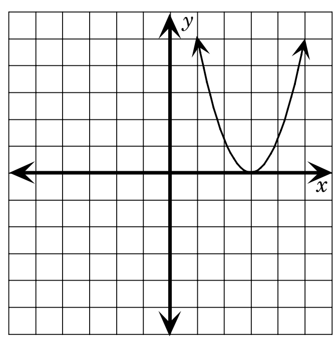
d)



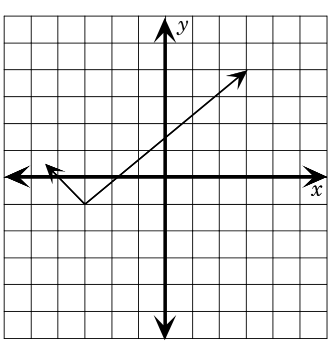
e)



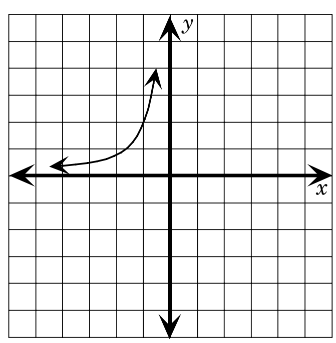
f)



g)



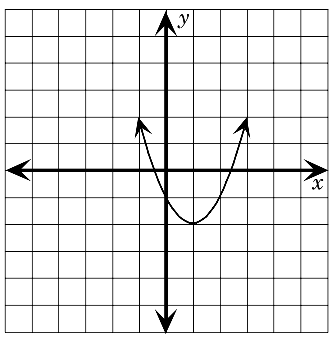
h)

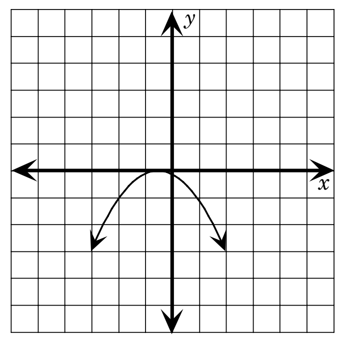


Exercice 1 : Fonctions quadratiques (suite)

2. Indique s'il s'agit de fonctions linéaires, quadratiques ou autres.
   a) $y = x^2 + x$
   b) $y = 5x + 3$
   c) $x + y = x^3 + x^2$
   d) $x + y = x^2 + 1$
   e) $x^2 + y^2 = 9$

3. Indique (i) les coordonnées du sommet; (ii) les points d'intersection avec l'axe des x; (iii) le domaine et (iv) l'image de chaque relation quadratique. Arrondis toutes les réponses à une décimale près.

   a) 

   b) 

   c) $y = x^2 + 6x + 4$
   d) $y = 4 - x^2$

4. À l'aide d'un outil graphique (calculatrice graphique ou graphiciel), trouve les coordonnées du sommet. Arrondis toutes les réponses à une décimale près.

   a) $y = x^2$ b) $y = -x^2 + 5x + 4$ c) $y = -x^2 + 4x$ Nota : $y = -1(x^2) + 4x$
   d) $x + y = x^2 + 1$ e) $y = (x - 2)^2$ f) $y = (x + 2)(x - 5)$
   g) $y = x(x + 6)$ h) $y = -x^2 - 2$ i) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{4}$

5. Trace le graphique d'une fonction quadratique possédant les caractéristiques suivantes :
   a) valeur maximale de $y = 8$ et abscisses à l'origine $x = 2$ et $x = 6$
   b) valeur minimale de $y = -4$ et abscisses $x = -3$ et $x = 1$
   c) Quelles sont les coordonnées du sommet en (a)? En (b)?

Exercice 1 : Fonctions quadratiques (suite)

6. Observe le graphique des relations quadratiques illustrées. Comment prédire si les graphiques auront une valeur minimale ou une valeur maximale (ou comment prédire si le graphique sera convexe ou concave)?

   a) $y = x^2$

   b) $y = -x^2$

   c) $y = 2x^2 + 1$

   d) $y = -2x^2 + 1$

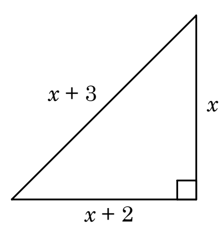
7. Détermine si :

   a) (5, 70) se trouve sur la courbe décrite par $y = 2x^2 + 3x + 4$.

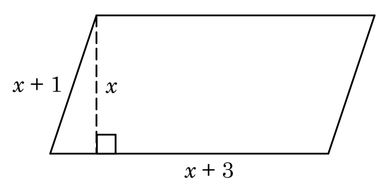
   b) la courbe de la fonction $y = x^2 - 4$ croise l'axe des x.

8. Trouve une expression appropriée pour l'aire des figures suivantes :

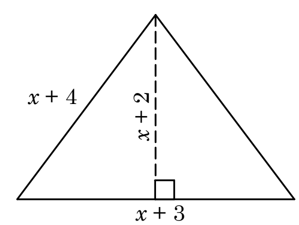
   a) triangle rectangle



   b) parallélogramme

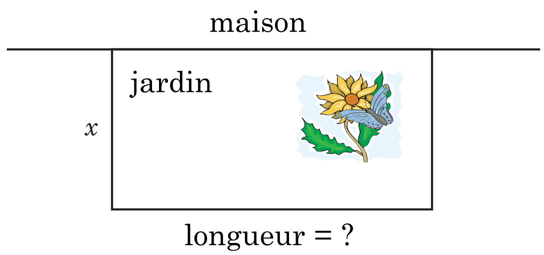


   c) triangle isocèle



Exercice 1 : Fonctions quadratiques (suite)

9. Jeannette dispose de 24 mètres de clôture à ***mailles*** qu'elle doit installer autour de son jardin. Elle veut tenir les voisins à distance! Le jardin est adjacent à sa maison, et la clôture doit fermer seulement trois côtés du jardin. Elle veut qu'il soit le plus grand possible. Tu dois trouver les dimensions du jardin qui permettront d'obtenir la plus grande aire.



a) Crée un tableau comportant des colonnes pour la largeur, la longueur, le périmètre et l'aire (tel qu'illustré). Si possible, utilise un tableur.

i) Quelle variable représente la longueur?

ii) Trouve une expression qui représente la longueur du jardin (x).

iii) Quelle est l'équation représentant l'aire du jardin (y)?

	A	B	C	D
1	largeur (m)	longueur (m)	périmètre (m)	aire (m^2)
2	0	x	24	y
3	1		24	
4	2		24	
5	3		24	
6	4		24	
7				

Formules possibles pour la feuille de calcul :
x = C2 – 2*A2
y = A2*B2

b) Trace le graphique de la largeur en fonction de l'aire. Trace-le de façon à ce que l'aire (y) dépende de la longueur (x). Si possible, utilise la fonction graphique du tableur ou de la calculatrice.

i) Quelle est la forme du graphique? Nomme le type de fonction que ce graphique décrit.

ii) Quelles sont les coordonnées du sommet du graphique? Inclus les unités dans ta réponse.

iii) Précise le domaine et le champ du graphique. (Est-ce possible que la valeur de la longueur ou de l'aire soit inférieure à zéro?)

iv) Quelle est l'équation de l'axe de symétrie?

v) Quelles sont les abscisses à l'origine du graphique? Quelle est la signification des abscisses à l'origine?

vi) Quelle est ou quelles sont les ordonnées à l'origine du graphique? Quelle est leur signification?

vii) Quelle est la valeur maximale de l'aire pouvant être contenue dans la clôture de 24 m?

c) Quelle serait l'aire maximale si Jeannette utilisait une clôture de 48 m au lieu d'une clôture de 24 m? L'aire serait-elle deux fois plus grande? Quelle serait l'aire si une clôture de 40 m était utilisée? Explique comment tu obtiens tes réponses.

mailles : (nom f.) boucles de fil ou de métal attachées entre elles pour fabriquer des clôtures

Exercice 1 : Fonctions quadratiques (suite)

10. Une balle est lancée à la verticale (à l'aide d'un lanceur mécanique) et sa vitesse initiale est de 100 milles à l'heure (environ 160 km/h). La hauteur h de la balle au moment t est donnée par la fonction suivante :

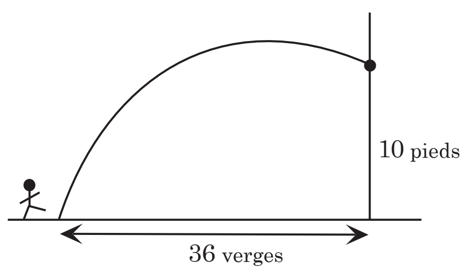
    $h = 147t - 16t^2$, où la hauteur est mesurée en pieds et le temps en secondes.

    a) Trouve la hauteur maximale à laquelle la balle va monter.
    b) À quel moment la balle atteint-elle sa hauteur maximale?
    c) À quel moment la balle frappe-t-elle le sol?
    d) À quelle hauteur se trouve la balle une seconde après avoir été lancée?

11. La trajectoire d'un ballon de football botté en direction du but est décrite par l'équation suivante : $y = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{90}$.

    Le ballon est botté à partir de la ligne de 35 verges. Dans cette équation, y représente la hauteur du ballon et x représente la distance horizontale (en pieds) à partir du botteur. Arrondis toutes les réponses à un pied près.

    a) À quelle hauteur maximale le ballon s'élèvera-t-il?
    b) À quelle distance (horizontale) le ballon frappera-t-il le sol?
    c) Le ballon passera-t-il au-dessus de la barre transversale? (Celle-ci se trouve à 10 pieds au-dessus du sol.)
    d) À quelle distance au-dessus de la barre (ou sous la barre) le ballon passera-t-il?



12. Un hélicoptère ***fait la navette*** entre un aéroport et le centre-ville. Le prix d'un billet est 10 $ et la capacité est de 300 personnes par jour. Le directeur estime qu'il perdra 15 passagers pour chaque augmentation de 1 $ du tarif. Trouve le tarif le plus avantageux pour l'entreprise.

13. Une station-service donnée vend en moyenne 4 000 litres d'essence par jour, au coût de 50 ¢ le litre. Le propriétaire juge qu'il vendra 60 litres de moins par mois pour chaque cent d'augmentation sur le prix du litre. Trouve le prix (arrondi au cent près) qui apportera au propriétaire les meilleurs revenus. Quelles sont les revenus maximaux?

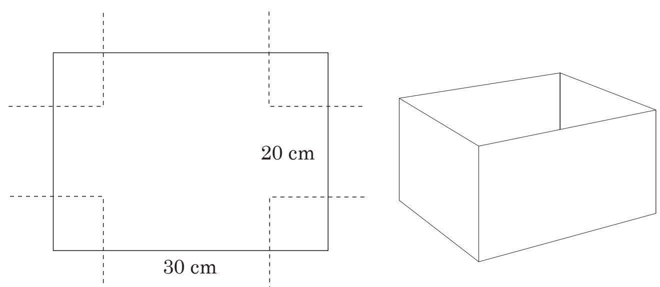
faire la navette : (locution) voyager continuellement entre les deux mêmes points

Exercice 2 : Fonctions cubiques

1. À l'aide d'un outil graphique (graphiciel ou calculatrice graphique), trace le graphique des fonctions cubiques suivantes.
   Donne (i) les coordonnées des valeurs minimales ou maximales associées, s'il y en a.
   Aussi, (ii) indique toutes les abscisses et les ordonnées à l'origine. Arrondis les réponses à une décimale près.

   a) $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
   b) $y = 2x^3 - 5x^2 + x - 3$
   c) $y = -3x^3 + 4x^2 - 2x + 3$
   d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
   e) $y = (x-1)^2(x+2)$
   f) $f(x) = (x-1)^2(x+3)$
   g) $y = (x+3)(x-2)(x+1)$
   h) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$

2. À l'aide de feuilles rectangulaires de 20 cm sur 30 cm, on fabrique des boîtes à toit ouvert en découpant des carrés de grandeur égale à chaque coin de la feuille et en pliant les quatre côtés vers le haut. De quelle longueur doivent être les carrés afin d'obtenir une boîte de volume maximal? Quel est le volume maximal?



3. Tu dois construire une boîte à dessus ouvert à l'aide d'un morceau de carton carré de 3 pieds de largeur, en découpant un carré dans chacun des 4 coins et en repliant les côtés vers le haut. Trouve le volume maximal de la boîte.

Exercice 3 : Fonctions exponentielles

1. Utilise un outil graphique pour déterminer les graphiques suivants.

   a) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = b^x$ quand $b > 1$.

      i) $y = 2^x$
      ii) $y = 3^x$
      iii) $y = 5^x$
      iv) $y = 10^x$
      v) $y = (1{,}5)^x$

   b) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = b^x$ quand $0 < b < 1$.

      i) $y = (0{,}8)^x$
      ii) $y = (0{,}5)^x$
      iii) $y = (0{,}2)^x$
      iv) $y = (0{,}05)^x$

   c) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = b^x$ quand $b < 0$.

      i) $y = (-2)^x$
      ii) $y = (-3)^x$
      iii) $y = (-10)^x$

   d) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = a(b)^x$ quand $b = 2$ et $a > 1$.

      i) $y = 2(2)^x$
      ii) $y = 3(2)^x$
      iii) $y = 4(2)^x$

   e) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = a(b)^x$ quand $b = 2$ et $0 < a < 1$.

      i) $y = 0{,}2(2)^x$
      ii) $y = 0{,}5(2)^x$
      iii) $y = 0{,}9(2)^x$

   f) Trace, sur le même plan de coordonnées, les graphiques suivants de $y = a(b)^x$ quand $b = 2$ et $a = 0$.

      i) $y = -1(2)^x$
      ii) $y = -2(2)^x$
      iii) $y = -0{,}5(2)^x$

Exercice 3 : Fonctions exponentielles (suite)

2. **Croissance des M&M**

Matériel : 40 M&M par élève ou par groupe; 1 tasse de papier

Problème : Quelle est la relation entre le nombre de M&M dans le gobelet et le nombre d'essais?

Instructions

Chaque élève ou groupe met 4 M&M dans le gobelet. C'est l'essai numéro 0.

Vide le gobelet de M&M sur la table. Compte le nombre de bonbons dont on voit le M. Pour chacun, ajoute un bonbon de plus dans le gobelet. Remets les quatre M&M du départ dans le gobelet, avec les M&M additionnels. Le nouveau total constitue l'essai numéro 1.

Vide de nouveau les M&M sur la table et refais la procédure de comptage et d'addition pour obtenir les données de l'essai numéro 2.

Continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de bonbons.

Enregistre les résultats des autres groupes de la classe ou répète l'expérience plusieurs fois.

Données

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
N° d'essai	Nombre de M&M	Nombre de M&M	Nombre de M&M
0	4	4	4
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

a) Trace un croquis montrant la relation qui existe entre le nombre de bonbons (sur l'axe des y) et le nombre d'essais (sur l'axe des x). Le graphique devrait être tracé à l'aide de la fonction graphique. Le graphique montre une courbe de croissance exponentielle qui peut être représentée par la relation $y = a(b)^x$.

b) À l'aide d'une régression exponentielle, détermine les valeurs de a et de b dans la relation $y = a(b)^x$.

c) Quelle est la signification (dans la question b) de la valeur de b? De la valeur de a?

d) De quelle façon pourrais-tu transformer l'expérience afin que la relation soit $y = 200(b)^x$?

e) De quelle façon changerais-tu l'expérience pour que la relation devienne $y = a(0{,}25)^x$ ou $y = a(1/4)^x$?

f) De quelle façon l'équation et la forme du graphique changeraient-elles si la moitié des bonbons avaient un M d'un seul côté, et si l'autre moitié des bonbons avaient un M des deux côtés?

Exercice 3 : Fonctions exponentielles (suite)

3. **Valeur finale d'un REÉR**

   Un REÉR à long terme rapporte des intérêts composés à un taux de 5 % par année, calculés annuellement. À l'aide d'une feuille de calcul (comme celle qui est commencée ci-dessous), montre la croissance de la valeur du REÉR sur une période de 20 ans si la valeur initiale est de 200 $.

	A	B	C
1	Temps (années)	Valeur ($) à 5%	
2	0	200	
3	1	**	
4	2	***	
5	3		
6	*		

* = A5 + 1

Nota : Après une année, la valeur du REÉR sera égale à la valeur initiale plus les intérêts

$y = 200,00 + 0,05(200,00) = 200,00(1 + 0,05) = 200(1,05)$

$y = 210,00$ $

** y = B2*1,05

À la fin de la deuxième année, la valeur du REÉR sera de 210,00 $ plus les intérêts

$y = 210,00 + 0,05(210,00) = 210,00(1 + 0,05) = 210(1,05)$

$y = 200(1,05)(1,05)$

$y = 200(1,05)^2$

$y = 220,50$

*** y = B2*1,05^A4

Utilise la fonction « remplir vers le bas » pour remplir les colonnes A et B.

Note la ressemblance :
B2*1,05
$y = 200,00(1,05)^2$
$y = a(b)^x$

Exercice 3 : Fonctions exponentielles (suite)

Valeur finale d'un REÉR (suite)

À l'aide de la fonction graphique du tableur, trace le graphique de la valeur (y) en fonction du temps (x). Si ce n'est pas possible, utilise un outil graphique (ex. un graphiciel ou une calculatrice graphique) pour tracer le ***croquis*** de $y = 200(1{,}05)^x$ et pour répondre aux questions.

a) Quelles sont les valeurs de a et de b? Quelle est la signification de chacune d'entre elles? Que représentent x et y? (Tu voudras peut-être comparer tes réponses à la formule utilisée auparavant : $A = P(1 + i)^n$.)

b) À l'aide d'une calculatrice scientifique, détermine la valeur du REÉR après 10 ans, puis après 20 ans.

c) Combien d'années environ sont nécessaires pour que la valeur du REÉR double? Tu peux déduire cette réponse en observant le graphique.

d) Ajoute une autre colonne à la feuille de calcul. Montre la valeur du REÉR si le taux de rendement composé est de 6 % par année, calculé annuellement. Trace le graphique pour des taux de 5 % et de 6 % en fonction du temps (20 ans) sur le même plan de coordonnées. Quelle est la différence de valeur du REÉR après 20 ans s'il est investi à 6 % plutôt qu'à 5 %?

e) Utilise la formule $y = a(b)^x$ pour résoudre les problèmes suivants. Tu devras d'abord déterminer les valeurs exactes de a, de b et de x pour trouver la valeur de y. Utilise ta réponse à la question (a). Trouve les valeurs finales de chacun :

i) 800 $ placés pendant 15 ans à un taux annuel de 9 %, composé ***annuellement***

ii) 2 000 $ placés pendant 10 ans à un taux annuel de 12 %, composé annuellement

iii) 2 000 $ placés pendant 10 ans à un taux annuel de 12 %, composé ***semestriellement***

iv) 2 000 $ placés pendant 10 ans à un taux annuel de 12 %, composé ***trimestriellement***

v) 2 000 $ placés pendant 10 ans à un taux annuel de 12 %, composé ***mensuellement***.

croquis : (nom m.) dessin fait très vite pour montrer l'idée générale et les éléments les plus importants
annuellement : (adv.) chaque année; par an
semestriellement : (adv.) qui a lieu tous les six mois
trimestriellement : (adv.) qui revient tous les trois mois
mensuellement : (adv.) qui revient tous les mois; chaque mois