

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE GÉOMÉTRIQUE, DU SENS SPATIAL ET DU SENS DE LA MESURE

Le développement de la pensée géométrique se traduit par la capacité de passer d'un espace physique vers un espace plus abstrait basé sur les propriétés des objets. Ceci nécessite le traitement de connaissances spatiales et géométriques (Marchand, 2009).

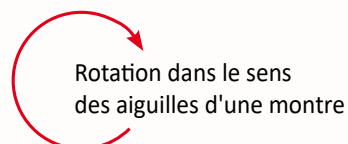
Le développement du sens spatial qui est intimement relié au développement de la pensée géométrique se traduit par la capacité « d'interpréter l'environnement physique et d'y réfléchir. Le sens spatial permet entre autres, à l'élève d'interpréter des figures à deux dimensions et des objets à trois dimensions et de voir les relations possibles entre ces figures et ces objets » (Manitoba, Ministère de l'Éducation, 2013, p. 10).

Le développement de la pensée géométrique et du sens spatial contribuent au développement du sens de la mesure, chez l'élève, qui consiste à « comprendre que mesurer signifie d'attribuer une valeur numérique à un certain attribut d'un objet, d'une figure ou d'un événement pour faire des comparaisons » (Small, 2012, p. 2). Tout comme l'évolution du sens du nombre, l'évolution du sens de la mesure est généralement un dérivé de l'apprentissage plutôt que le résultat d'un enseignement direct. En effet, le développement du sens de la mesure résulte de la réalisation de tâches mathématiques riches qui sont associées aux expériences personnelles et à l'apprentissage antérieur de l'élève (Manitoba, Ministère de l'Éducation, 2013).

LES ANGLES

PRIME : Connaissances et stratégies, p. 119 à 126

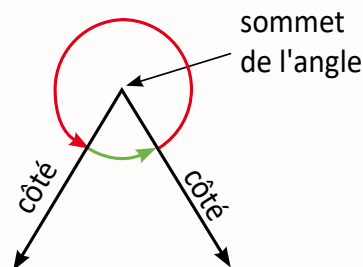
Un angle est composé de deux segments de droite ayant un point de rencontre commun appelé le sommet de l'angle.



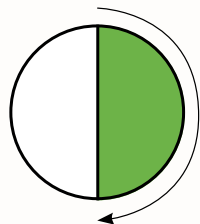
Rotation dans le sens
des aiguilles d'une montre

Rotation dans le sens inverse
des aiguilles d'une montre

La mesure de l'angle est définie par la rotation d'un des segments de droite de cet angle autour de son sommet par rapport à l'autre segment de droite, et ce, peu importe la longueur de ses côtés. Une rotation complète équivaut à 360° .

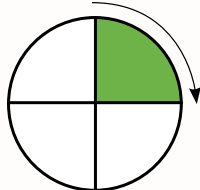


L'unité de mesure standard utilisée pour mesurer un angle est le degré. Un degré représente $\frac{1}{360}$ d'une rotation complète. Lors de ses études au secondaire, l'élève mesurera l'angle en radians et en grades.



Un demi-tour équivaut à 180° . On appelle cet angle un angle plat.

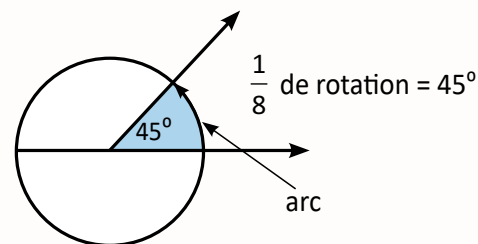
$\frac{1}{2}$ de 360° signifie $360^\circ \div 2 = 180^\circ$



Un quart de tour équivaut à 90° . On appelle cet angle un angle droit.

$\frac{1}{4}$ de 360° signifie $360^\circ \div 4 = 90^\circ$

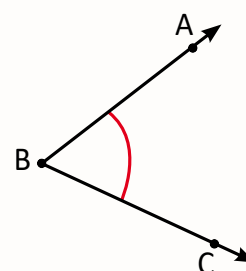
On indique un angle à l'aide d'un arc pour montrer son lien avec une rotation. Par contre, on utilise un petit carré pour indiquer un angle de 90° (angle droit).



$\frac{1}{8}$ de rotation = 45°

Le symbole utilisé pour représenter un angle est $\angle$ et non pas $\sphericalangle$. On utilise souvent des lettres pour nommer un angle.

Par exemple, on pourrait nommer cet angle $\angle ABC$ ou $\angle CBA$ ou encore $\angle B$.



Les angles peuvent être classés en fonction de leur taille et de leur type (Voir *Types d'angles*, 6^e année).

L'HABILETÉ DE MESURER DES ANGLES DEMANDE À L'ÉLÈVE, ENTRE AUTRES :

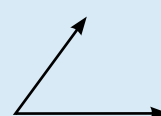
- d'établir des liens entre les figures géométriques, les fractions et la mesure d'un angle, par exemple, l'élève a été exposé auparavant au fait qu'un rectangle ou un carré a 4 angles droits;
- de bien comprendre le concept de l'angle, c'est-à-dire de pouvoir le définir et d'identifier différents types d'angles dans l'environnement;
- de comprendre que la mesure d'un angle peut se faire de façon directe ou indirecte;
- de comprendre que l'orientation d'un angle ou la longueur de ses côtés n'influencent pas sa mesure;
- de se créer un répertoire de référents (Voir *Types d'angles*, 6^e année) afin de lui permettre d'estimer ou de calculer la mesure d'un angle;
- d'estimer la mesure d'un angle afin de vérifier la vraisemblance de la mesure qu'il a prise;
- de comprendre l'outil de mesure non standard ou standard qu'il utilise pour effectuer ses mesures, c'est-à-dire d'associer une valeur numérique qui est déterminée par rapport à une unité de mesure quelconque.



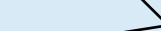
À noter : Comprendre l'idée de « la grandeur de l'angle » n'est pas une tâche facile. Pour faciliter cet apprentissage et prévenir de fausses conceptions, on doit s'assurer :

- de fournir de nombreuses expériences à l'élève qui l'amèneront à identifier des angles, à les comparer et à les mesurer à l'aide d'unités de mesure non standard et de référents avant de l'inviter à utiliser des outils de mesure tels le goniomètre et le rapporteur d'angle;
- de présenter les angles de différentes façons afin que l'élève comprenne que la mesure d'un angle ne change pas selon son orientation, car l'élève peut penser qu'un même angle orienté de différentes façons a une différente mesure;

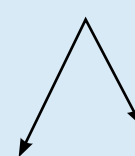
Il arrive souvent qu'un élève pense qu'un angle aigu se présente toujours de cette façon,



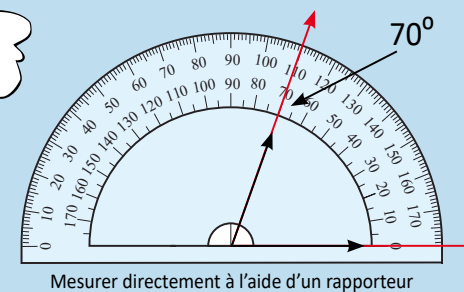
mais jamais de cette façon,



ni de cette façon.



Je peux allonger les côtés de l'angle pour le mesurer. Je sais qu'il mesure 70° parce qu'il est plus petit qu'un angle de 90° .



Mesurer directement à l'aide d'un rapporteur

ESTIMATION À L'AIDE DE RÉFÉRENTS

Pour que l'élève ait une bonne compréhension de la mesure d'un angle, il importe, tout comme pour le sens du nombre où l'élève a utilisé les nombres repères 0, $\frac{1}{2}$ et 1 pour situer différents types de nombres, qu'il se familiarise avec des angles de référence (Voir *Types d'angles*, 6^e année). L'estimation de la mesure d'un angle à l'aide d'angles de référence comme 45° , 90° et 180° devrait faire partie de toutes situations où l'élève aura à mesurer un angle.

Pour aider l'élève à développer ses habiletés à estimer la mesure d'un angle, on peut lui demander de faire une estimation en comparant cet angle à un angle de référence. Par exemple, on peut lui poser les questions suivantes :

- Cet angle est-il plus petit ou plus grand qu'un angle de 90° ?**
- L'angle suivant est-il plus près de 0° , de 45° ou de 90° ?**

Et enfin, il est important que l'élève puisse avoir accès à des modèles d'angles de 45° , de 90° ou de 180° lorsqu'il doit estimer la mesure d'un angle. On peut aussi lui suggérer d'utiliser des référents tels que le coin d'une feuille de papier pour déterminer si un angle est plus petit ou plus grand que 90° .

- de présenter des angles dont les côtés varient en longueur, car un angle plus large dont les côtés sont plus courts peut paraître plus petit qu'un angle plus étroit avec des côtés plus longs;
- de fournir de nombreuses expériences à l'élève qui l'amèneront à s'exercer à mesurer des angles à l'aide d'un rapporteur qu'il a construit ainsi qu'avec un rapporteur standard et d'en profiter pour faire ressortir le vocabulaire propre à l'utilisation d'un rapporteur d'angles (ligne de foi, sommet, côté etc.);
- d'aborder les erreurs courantes et les idées fausses que l'élève pourrait avoir lorsqu'il utilise un rapporteur standard telles que le choix de l'échelle, l'alignement du rapporteur et la mesure d'angles dont les côtés n'atteignent pas l'échelle du rapporteur.

PRIME Connaissance et stratégies, p. 124

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE GÉOMÉTRIQUE, DU SENS SPATIAL ET DE LA MESURE

Cheminement vers l'acquisition de la mesure d'un angle

Pour que l'élève comprenne bien la mesure d'un angle, il est essentiel qu'on lui présente des situations d'apprentissage qui l'amèneront à faire des liens explicites entre les représentations concrètes, imagées et symboliques de la mesure des angles. Au cours de son cheminement vers l'acquisition de la mesure d'un angle, l'élève devrait : explorer le concept de l'angle dans son environnement et se créer un répertoire de référents pour les angles de 45° , 90° et 180° , utiliser la comparaison directe et indirecte, utiliser des unités de mesure non standard et unités de mesure standard (Ontario, ministère de l'Éducation, 2015).

EXPLORER LE CONCEPT DE L'ANGLE DANS SON ENVIRONNEMENT ET SE CRÉER UN RÉPERTOIRE DE RÉFÉRENTS POUR LES ANGLES DE 45° , 90° ET 180°

Avant d'inviter l'élève à mesurer un angle, il est essentiel qu'il puisse explorer le concept de l'angle. Au cours de ses premières explorations du concept de l'angle, l'élève doit, entre autres :

- être exposé à une variété de types d'angles (aigus, obtus, rentrants, droits, plats);
- être incité à faire des liens avec ses connaissances antérieures et les autres domaines mathématiques tels que les fractions et la géométrie;
- avoir de multiples occasions de communiquer de diverses façons sa compréhension de ce qu'est un angle;
- reconnaître et identifier des angles dans son environnement, par exemple : horloge, cadre de porte, ouverture entre le pouce et l'index, etc.;

afin d'approfondir sa compréhension du concept de l'angle et bâtir son répertoire de référents pour des angles de 45° , 90° et 180° .

Stratégies d'enseignement :

Inviter l'élève à :

- faire part de ses connaissances antérieures en lui posant des questions telles que :
 - À quoi ressemble un angle? Montre-moi.
 - As-tu déjà vu des angles?
 - Dans quels contextes as-tu entendu parler des angles?
 - Montre-moi des angles d'une figure et parles-en.
- découvrir et identifier des angles dans son environnement en allant faire une promenade ou une chasse aux angles et présenter ses découvertes à la classe;
- créer des angles avec du matériel concret tel que des blocs mosaïques;
- classer des angles selon divers critères tels que plus grand que, plus petit que ou à peu près égal à un angle de 45° , 90° ou 180° ;
- décrire des angles dans le contexte de figures à deux dimensions, par exemple, le trapèze a deux angles aigus et deux angles obtus, ses angles aigus sont environ de la même grandeur qu'un angle de 45° ;
- nommer un angle en utilisant des lettres;
- créer ou dessiner un angle qui est plus grand que, plus petit que ou à peu près égal à un angle de 45° , 90° et 180° .

UTILISER LA COMPARAISON DIRECTE ET INDIRECTE

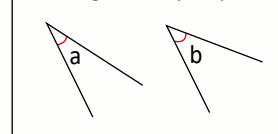
Avant d'inviter l'élève à mesurer un angle à l'aide d'unités de mesure, il est essentiel qu'il puisse comparer des angles en utilisant les termes plus petit que, plus grand que et égal à. Pour ce faire, l'élève peut utiliser la comparaison directe (superposition d'un angle sur un autre) et indirecte (comparaison à l'aide d'un objet de référence).

Stratégies d'enseignement :

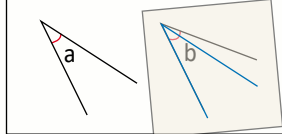
Inviter l'élève à comparer :

- deux angles en reproduisant un des deux angles à l'aide de papier calque et en le superposant sur l'autre angle.

Quel angle est le plus petit?



L'angle a est le plus petit.

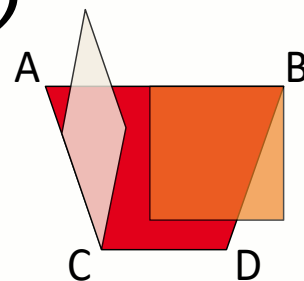


- les angles d'un polygone en utilisant un bloc mosaïque comme objet de référence. Par exemple, le carré peut être utilisé pour décrire les angles plus petits ou plus grands que l'angle droit.

Je remarque que l'angle ACD ou l'angle C est plus grand que le petit angle du losange beige.



Mais, je remarque aussi que l'angle ABD ou l'angle B est plus petit que l'angle droit du carré.



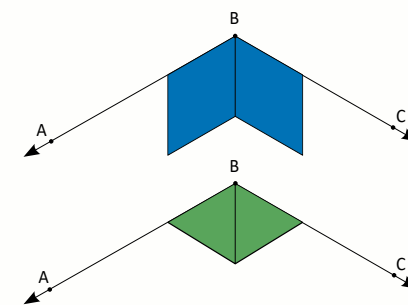
UTILISER DES UNITÉS DE MESURE NON STANDARD

Avant d'inviter l'élève à mesurer un angle à l'aide d'un outil de mesure standard, il est essentiel qu'il puisse mesurer et tracer des angles en utilisant des unités de mesure non standard.

Stratégies d'enseignement :

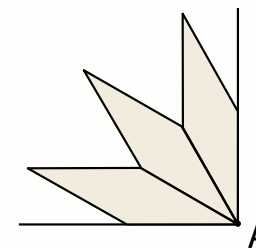
Inviter l'élève à :

- mesurer la grandeur d'un angle à l'aide de blocs mosaïques;



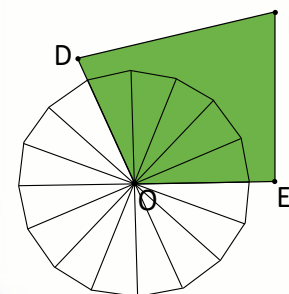
L'angle ABC mesure deux losanges bleus ou deux triangles verts.

- tracer un angle ayant la grandeur de 3 petites pointes d'un losange beige;



Ici, l'angle A mesure trois pointes de losange.

- construire un rapporteur d'angle et l'utiliser pour mesurer et tracer des angles mesurant un nombre de secteurs quelconque. (Voir Construction d'un rapporteur d'angles, 6^e année).



Je sais que l'angle DOE mesure 5 secteurs.

UTILISER DES UNITÉS DE MESURE STANDARD

Avant d'inviter l'élève à mesurer un angle à l'aide d'un outil de mesure standard, il est essentiel qu'il ait eu de nombreuses expériences qui l'auront amené à identifier des angles, à les comparer et à les mesurer à l'aide d'unités de mesure non standard et de référents.

Stratégies d'enseignement :

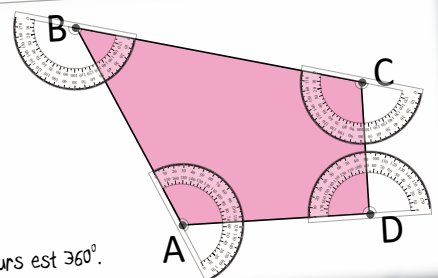
Inviter l'élève à :

- établir des comparaisons entre un rapporteur d'angles standard et celui qu'il a construit en l'amenant à :
 - faire l'analogie entre les secteurs et les degrés et à comprendre que le degré est en fait un tout petit angle;
 - expliquer pourquoi, sur un rapporteur d'angles, les nombres utilisés pour mesurer les angles sont placés selon le sens des aiguilles d'une montre ainsi que dans le sens contraire des aiguilles d'une montre;
 - expliquer comment il s'y prendrait pour mesurer ou tracer des angles à l'aide d'un rapporteur d'angles standard.
- s'exercer à mesurer, dans des contextes significatifs, des angles qui sont représentés de diverses façons, par exemple des angles équivalents dont les segments qui les composent sont de longueurs différentes ou des angles présentés sous plusieurs orientations;
- assembler et décomposer des angles;
- utiliser le cercle pour la représentation des angles pour effectuer des tâches dans lesquelles il doit déterminer des fractions équivalentes par fractionnement et assemblage;
- mesurer et tracer des angles aigus, droits, obtus et plats. Une fois qu'il se sentira à l'aise avec ces types d'angles, lui demander de discuter avec un partenaire de la façon dont on peut s'y prendre pour mesurer et tracer des angles rentrants à l'aide d'un rapporteur d'angles.

J'ai mesuré les angles du quadrilatère avec mon rapporteur :

$\angle ABC$ mesure 50° ,
 $\angle BCD$ mesure 105° ,
 $\angle CDA$ mesure 90° ,
 $\angle DAB$ mesure 115° .

La somme des 4 angles intérieurs est 360° .



LE RAPPORTEUR D'ANGLE

Voici comment on peut construire un rapporteur d'angles :

Remettre un carré de papier ciré ou de papier calque à l'élève.

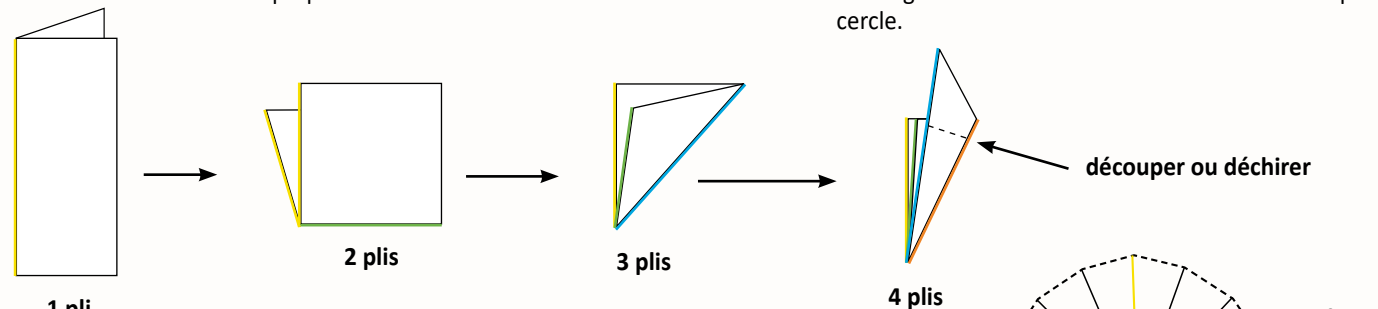
Lui demander de plier le papier en deux en appuyant bien sur la pliure.

Plier en deux de nouveau façon à ce que les côtés pliés soient bien superposés.

Répéter deux autres fois en s'assurant de toujours bien appuyer sur les plis.

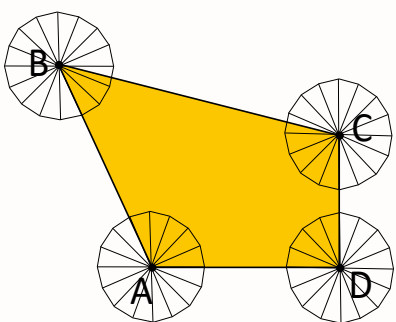
Il devrait maintenant y avoir un total de 16 angles (secteurs) autour de l'angle au centre du cercle.

Découper la partie extérieure du papier plié de façon à ce qu'il forme un cercle une fois déplié.



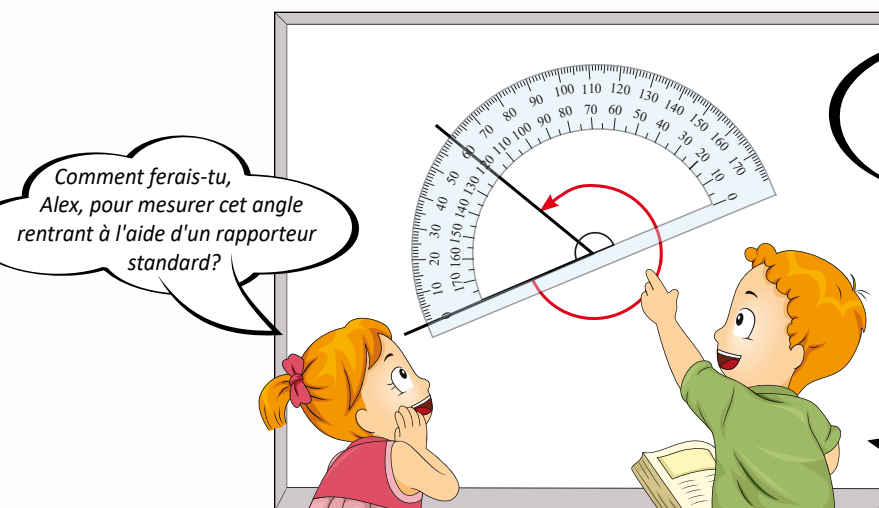
Chaque secteur de cercle correspondra à $\frac{1}{8}$ d'un angle plat ou à $\frac{1}{16}$ de l'angle au centre du cercle.

Puisque le papier ciré est presque transparent, on peut placer le rapporteur d'angles directement sur un angle à mesurer.



J'ai utilisé le rapporteur d'angles que je viens de créer pour mesurer les différents angles intérieurs d'un quadrilatère ABCD. L'angle ABC mesure trois secteurs, l'angle BCD mesure cinq secteurs, l'angle CDA mesure quatre secteurs et l'angle DAB mesure quatre secteurs. Je me demande si tous les angles intérieurs d'un quadrilatère ont une somme de seize secteurs?

MESURER UN ANGLE RENTRANT

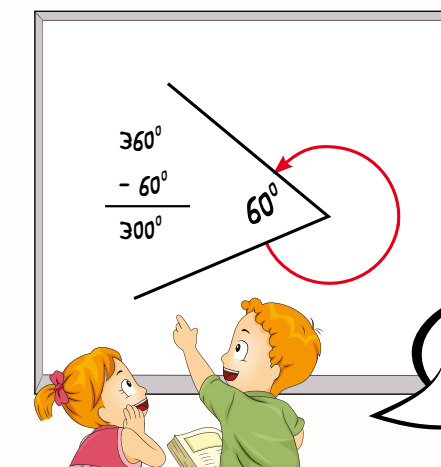


Comment ferais-tu, Alex, pour mesurer cet angle rentrant à l'aide d'un rapporteur standard?

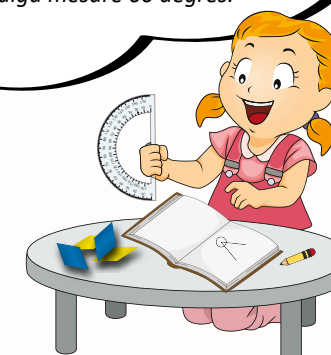
Regarde, Émilie. Premièrement, je sais qu'un angle rentrant est plus grand que 180 degrés. Donc, pour mesurer cet angle rentrant, je ne peux pas utiliser un rapporteur, mais je peux utiliser le rapporteur pour mesurer l'angle aigu.

J'ai estimé la mesure de l'angle aigu et je sais qu'il est plus petit que 90 degrés.

Ensuite, pour le mesurer, j'ai aligné la ligne de foi du rapporteur avec l'un des côtés et je me suis assuré que le sommet de l'angle était bien aligné avec l'origine du rapporteur. Comme je sais que l'angle que je veux mesurer est plus petit que 90 degrés, j'ai choisi l'échelle du haut sur le rapporteur. Tu vois que l'angle aigu mesure 60 degrés.



Enfin, puisqu'une rotation complète équivaut à 360 degrés, je dois soustraire la mesure de l'angle aigu de 360 degrés pour connaître la mesure de l'angle rentrant. Donc, l'angle rentrant mesure 300 degrés.



RELATIONS D'ÉGALITÉ ET RAISONNEMENT ALGÈBRE

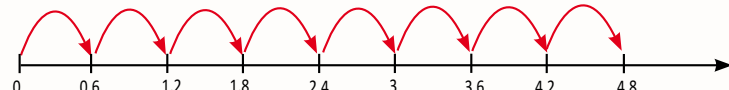
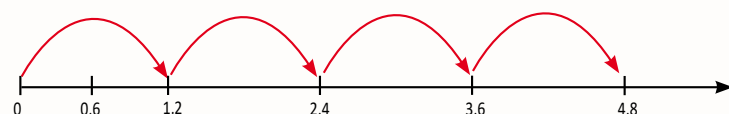
(6.R.3, 6.R.4)

La construction du sens de l'égalité est à la base de l'algèbre qui consiste à reconnaître les relations entre des quantités et des opérations. La recherche démontre que plusieurs élèves ne reconnaissent pas que le symbole d'égalité indique une relation entre les nombres qui se trouvent de part et d'autre de celui-ci. Cette relation d'égalité se construit et se complexifie de la maternelle à la 12^e année.

L'utilisation de différents modèles tels que la balance, la droite numérique double ou des blocs de base dix constitue un moyen efficace et nécessaire pour représenter les relations entre les nombres qui se trouvent de part et d'autre du symbole d'égalité et pour déterminer la valeur d'un inconnu. Ces modèles permettent à l'élève de développer sa compréhension des relations d'égalité et de créer des liens entre les représentations concrètes, imagées et symboliques de ces relations dans des contextes d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des nombres à l'étude. **Pour que l'élève ait du succès en mathématiques, plus particulièrement en algèbre, il importe qu'il comprenne de façon conceptuelle la signification du symbolisme lié aux variables et à l'égalité.**

$$4 \times 1,2 = 0,6 \times 8$$

$$3,6 \div 6 = 1,2 \div 2$$



Application du concept d'égalité dans des équations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division pour déterminer un nombre inconnu.

La pensée algébrique utilise les propriétés fondamentales du nombre et des opérations pour transformer des expressions mathématiques au lieu de tout simplement calculer une réponse en suivant une série d'étapes prédéfinies. La pensée relationnelle est à la base de l'algèbre. Le développement de la pensée relationnelle ne se produit pas automatiquement chez les enfants. Il doit être stimulé par un enseignement soigneusement planifié.

L'élève :

- articule clairement ce qu'il sait au sujet de la signification du symbole d'égalité;
- reconnaît que les phrases mathématiques peuvent être écrites de différentes façons, c'est-à-dire qu'elles ne se représentent pas seulement sous la forme « $a + b = c$ » (Voir les cartes de route de 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e et 5^e année, *Relations d'égalité et raisonnement algébrique*);
- sait que l'ordre des termes d'une expression n'est pas important dans une addition ou une multiplication (commutativité), mais que l'ordre des termes doit être respecté dans une soustraction ou une division lorsqu'il compare deux expressions mathématiques pour déterminer l'égalité entre celles-ci;
- compare les nombres de part et d'autre du symbole d'égalité afin de déterminer la valeur d'un nombre inconnu représenté par une lettre sans avoir à faire de calcul. Par exemple pour $0,40 \div 8 = r \div 2$, l'élève articule clairement que puisque 8 est 4 fois plus grand que 2, le nombre inconnu représenté par r doit être 4 fois plus petit que 0,40 afin de maintenir l'égalité.

$$8 \times 4 = 2 \times 16$$

$$48 \div 16 = 12 \div 4$$

À noter : Il est essentiel d'inviter l'élève à communiquer clairement la stratégie qu'il a utilisée pour déterminer la valeur d'un inconnu. Ceci fournit une occasion d'aborder les fausses conceptions de l'élève.