RELATIONS D'ÉGALITÉ ET RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE
(7.R.3)

La construction du sens de l'égalité est à la base de l'algèbre qui consiste à reconnaître les relations entre des quantités et des opérations. La recherche démontre que plusieurs élèves ne reconnaissent pas que le symbole d'égalité indique une relation entre les membres qui se trouvent de part et d'autre de celui-ci. Cette relation d'égalité se construit et se complexifie de la maternelle à la 12e année.

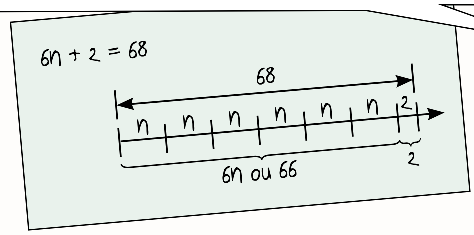
L'utilisation de différents modèles tels que la balance, la droite numérique, le mobile ou les tuiles algébriques constitue un moyen efficace et nécessaire pour représenter les relations entre les membres qui se trouvent de part et d'autre du symbole d'égalité et pour déterminer la valeur de la variable dans les types d'équations à l'étude. Ces modèles permettent à l'élève de développer sa compréhension des relations d'égalité et de créer des liens entre les représentations concrètes, imagées et symboliques de ces relations dans des contextes d'équations linéaires.

L'élève peut également utiliser différentes méthodes qui reposent sur la compréhension du concept d'égalité, dont l'essai systématique et la déduction. Il applique ainsi le maintien de l'égalité pour résoudre des équations. Il revient à l'élève de choisir le moyen le plus efficace selon le contexte ou la situation.

À noter : Pour que l'élève ait du succès en mathématiques, plus particulièrement en algèbre, il importe qu'il comprenne de façon conceptuelle la signification du symbolisme utilisé et qu'il fasse des liens entre les concepts liés à l'algèbre et ceux liés aux concepts du nombre et des opérations.

J'ai représenté l'équation à l'aide d'une droite numérique. J'ai tracé six segments égaux pour représenter six fois n et un segment qui représente une valeur de deux.

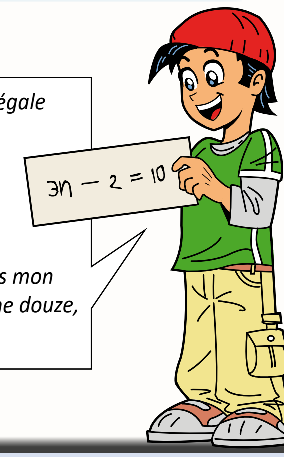
Je sais que la distance totale est de soixante-huit, ce qui veut dire que six fois n a une valeur de soixante-six, car soixante-six plus deux donne soixante-huit. Comme six fois onze donne soixante-six, je sais que n a une valeur de onze.



Pour résoudre l'équation trois fois n moins deux égale dix, je vais procéder par déduction.

Il faut que je détermine un nombre qui, soustrait de deux, donne dix. Ce nombre est douze, car douze moins deux donne dix.

Comme douze est représenté par trois fois n dans mon équation et que je sais que trois fois quatre donne douze, je sais que n a une valeur de quatre.



Application du concept d'égalité pour déterminer la valeur de la variable dans les types d'équations algébriques à l'étude.
La pensée algébrique utilise les propriétés fondamentales du nombre et des opérations pour transformer des expressions mathématiques au lieu de tout simplement calculer une réponse en suivant une série d'étapes prédéfinies. La pensée relationnelle est à la base de l'algèbre. Le développement de la pensée relationnelle ne se produit pas automatiquement chez l'élève. Il doit être stimulé par un enseignement soigneusement planifié à partir de la première année.

L'élève
- articule clairement ce qu'il sait au sujet de la signification du symbole d'égalité;
- reconnaît que les phrases mathématiques peuvent être écrites de différentes façons;
- comprend que le symbole d'égalité représente la relation entre les membres qui se trouvent de part et d'autre du symbole d'égalité;
- sait que l'ordre des termes d'une expression numérique n'est pas important dans une addition ni dans une multiplication (commutativité), mais que l'ordre des termes doit être respecté dans une soustraction et dans une division lorsqu'il compare les termes du membre de gauche aux termes du membre de droite pour déterminer s'il y a égalité entre les deux membres;
- compare les membres de part et d'autre du symbole d'égalité afin de déterminer la valeur de la variable représentée par une lettre, par exemple, pour $8 + (-3) = 4 + a$, l'élève articule clairement que 4 est 4 de moins que 8, et que la variable représentée par a doit être 4 de plus que -3 c'est-à-dire 1.

$7 - 5 = b$ — $7 + (-3) = b + 2$ (-5, +5)

$c - 7 = (-5) - 11$ (-4, -4) — $(-5) - 4 = c$

$2x + 2 = 5 + 7$ (+3, -3) — $7 + 3 = 10$ alors $2x = 10$ et $x = 5$

À noter : Il est essentiel de/d'
- consulter les cartes de route des niveaux scolaires précédents pour mieux comprendre le cheminement que l'élève a parcouru de la première à la sixième année (Voir *Relations d'égalité et raisonnement algébrique*);
- inviter l'élève à communiquer clairement la stratégie qu'il a utilisée pour déterminer la valeur de la variable. Ceci fournit une occasion d'aborder les fausses conceptions de l'élève.

LE DÉVELOPPEMENT DU SENS DU NOMBRE

PRIME : Connaissances et stratégies, p. 103 à 116, 143, 147 et 149

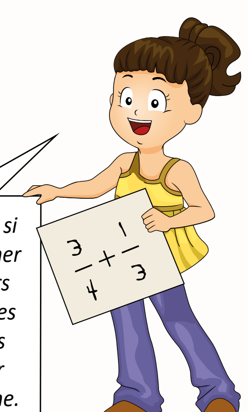
Chez l'élève, le développement du sens du nombre se fait de façon graduelle à partir de l'établissement de liens entre les nombres et son vécu ainsi qu'en ayant recours à des repères et à des référents. L'élève possédant le sens du nombre fait preuve d'un raisonnement de calcul fluide, de souplesse avec les nombres et d'une intuition du nombre. L'évolution du sens du nombre est généralement un dérivé de l'apprentissage plutôt que le résultat d'un enseignement direct. En effet, le sens du nombre ne s'enseigne pas en vase clos, il résulte plutôt de la réalisation de tâches mathématiques riches qui sont associées aux expériences personnelles et à l'apprentissage antérieur de l'élève. Le développement du sens du nombre chez l'élève peut résulter de l'exécution de tâches mathématiques complexes où il lui est possible d'établir des **relations entre les nombres**.

LES OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

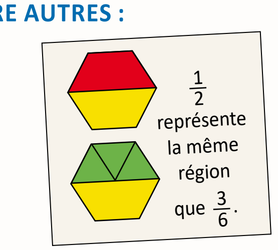
L'élève de la 7e et de la 8e années applique son sens des fractions et des opérations pour effectuer des opérations sur les fractions avec souplesse. Il s'avère essentiel d'amener l'élève à faire des liens explicites entre les représentations **concrètes**, **imagées** et **symboliques** des opérations sur les fractions tout comme il a développé son sens des opérations sur les nombres entiers et les nombres décimaux au cours des années antérieures. Il ne s'agit pas de fournir les règles à l'élève ni de lui demander de les appliquer sans les comprendre pour effectuer des opérations sur les fractions. Il est essentiel d'inviter l'élève à déterminer et à préciser lui-même le rationnel de chacune des règles. L'élève sera alors en mesure de déterminer des règles qui vont au-delà des règles conventionnelles pour effectuer des opérations sur les fractions.

L'élève qui n'a pas un bon sens des fractions ou des opérations devra mémoriser des règles sans les comprendre pour effectuer des opérations sur les fractions. Ce manque de compréhension fera en sorte qu'il appliquera n'importe quelle règle pour résoudre une opération sur les fractions. Il est donc essentiel de s'attarder au développement du sens des :
- fractions chez l'élève de la maternelle à la 6e année. Le tableau *Progression des apprentissages - Développement du sens de la fraction* présente les étapes de ce cheminement. Les cartes de route de la 3e à la 6e année décrivent ce cheminement de façon plus détaillée.
- opérations chez l'élève de la maternelle à la 6e année. Le sens de chaque opération demeurant le même, quel que soit le type de nombre, les opérations sur les fractions devraient donc être présentées en appliquant ces mêmes sens aux parties fractionnaires. Le document *Les cartes de route des apprentissages mathématiques – Maternelle à la 6e année* décrit ce cheminement de façon plus détaillée.

Je me demande si je dois additionner les numérateurs ensemble puis les dénominateurs ensemble pour trouver la somme.



L'HABILETÉ D'EFFECTUER DES OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS DEMANDE À L'ÉLÈVE, ENTRE AUTRES :
- de décomposer et d'assembler des fractions et des nombres fractionnaires;
- de représenter les fractions de différentes façons à l'aide de modèles de longueur (droites numériques), de surface (rectangles), de volumes (solides) ou d'ensemble;
- de déterminer des fractions équivalentes par fractionnement et assemblage;
- de considérer le tout, le numérateur et le dénominateur lorsqu'ils comparent des fractions;
- d'établir des relations avec d'autres ensembles de nombres pour trouver des équivalences;
- de faire des liens avec les concepts liés aux opérations sur les nombres entiers, tels que :
  - de comprendre que l'addition ne peut être effectuée qu'avec des quantités dont les unités sont identiques;
  - de comprendre qu'une opération peut être représentée et effectuée de différentes façons;
  - d'appliquer des stratégies de calcul qui reposent sur l'acquisition d'un sens du nombre et des opérations plutôt que sur l'application de règles et de procédures qui ont été mémorisées.
- d'utiliser son répertoire de référents (fractions repères) pour estimer sa solution et en évaluer la vraisemblance.



IL EST ESSENTIEL QUE L'ÉLÈVE AIT DÉVELOPPÉ SUFFISAMMENT SON SENS DES FRACTIONS ET DES OPÉRATIONS POUR POUVOIR, ENTRE AUTRES :
- résoudre des équations algébriques comportant des fractions;
- exprimer la probabilité d'un résultat sous la forme d'une fraction;
- comprendre et appliquer des formules mathématiques et scientifiques;
- effectuer des opérations sur les fractions.

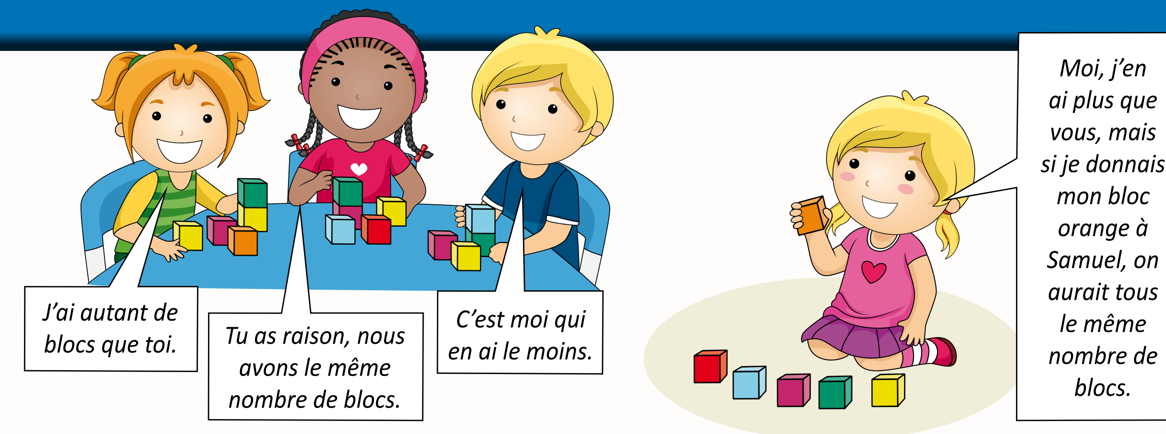
À noter : L'estimation et le calcul mental doivent être intégrés aux calculs comprenant des fractions. L'élève qui a un bon sens du nombre et des opérations sera en mesure de déterminer que $\frac{15}{8} + 1\frac{3}{4}$ est environ 2 + 2, ce qui est égal à 4, et que la somme devrait se situer entre 3 et 4.

PROGRESSION DES APPRENTISSAGES - DÉVELOPPEMENT DU SENS DE LA FRACTION

M - 2e année

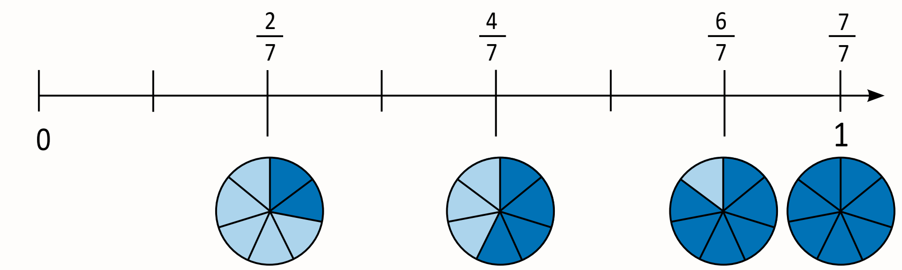
L’élève de la maternelle a développé un sens intuitif des fractions avant son arrivée à l’école. Il a notamment une notion de ce que représente la moitié ou un demi d’un gâteau ou d’un ensemble de petites voitures. Le développement du sens de la fraction se continue de façon informelle de la maternelle à la deuxième année par l’entremise de jeux, d’échanges, de lecture d’albums et de situations quotidiennes favorisant le développement du sens du nombre incluant le concept de partie-partie-tout.

Même si un élève de la maternelle à la deuxième année ne peut pas nécessairement représenter ses connaissances des fractions formellement, il comprend que s’il doit partager son sandwich ou ses collections avec une autre personne, ils en auront tous les deux la moitié, et que ces deux moitiés seront égales pour que le partage soit équitable.



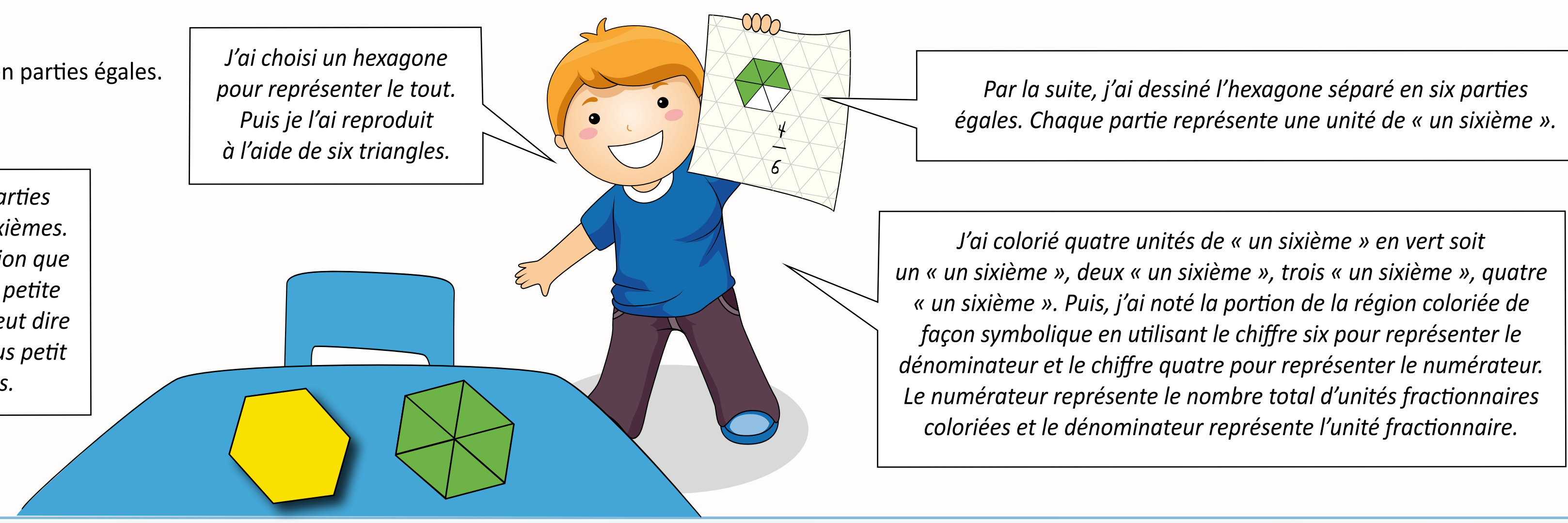
3e année et 4e année

L’élève de la 3e et de la 4e années développe sa compréhension du sens de la fraction de façon formelle par l’entremise du matériel de manipulation tel que des blocs mosaïques, des réglettes, des géoplans, des bandes de papier. Il comprend qu’une fraction représente une portion d’un tout divisé en parties égales et il peut décrire des situations quotidiennes dans lesquelles on utilise des fractions telles que mesurer, cuisiner et faire du sport.



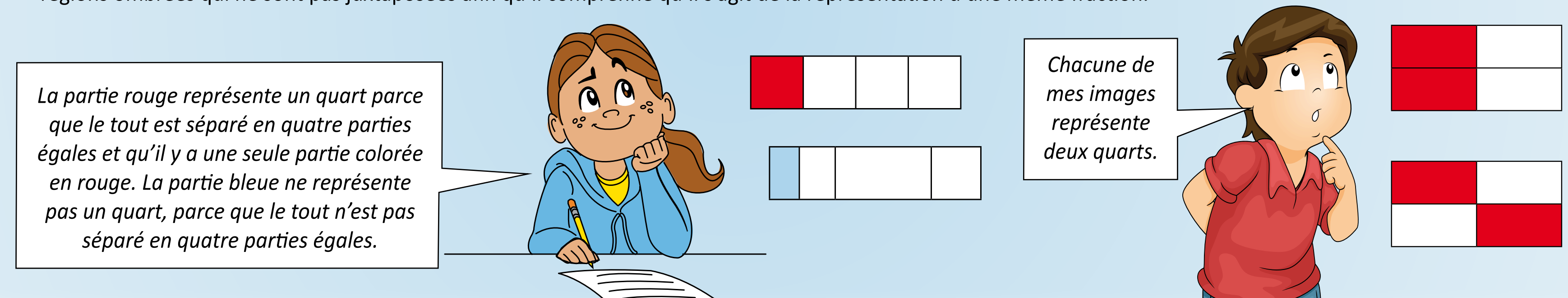
L’élève de la 3e année

- aborde le concept des fractions de façon formelle pour la première fois. Il peut représenter des fractions (portions d’un tout) de façon concrète et imagée à l’aide de modèles de mesure (longueur) tels que des droites numériques, des bandes fractionnées, des blocs de base 10 et des modèles de région tels que des cercles, des rectangles et des arrangements rectangulaires;
- nomme et note des fractions représentées de façon **concrète** et **imagée**;
- comprend que le dénominateur (le nombre au-dessous de la ligne) indique l’unité fractionnaire et que le numérateur (le nombre au-dessus de la ligne) indique le nombre d’unités fractionnaires;
- compte par fraction unitaire en mettant l’accent sur le rôle de l’unité fractionnaire, p. ex. : 1 un quart, 2 un quart, 3 un quart, 4 un quart;
- décompose des fractions, p. ex. :
  - la fraction 2 quarts peut être décomposée en 1 quart et 1 quart;
  - la fraction 3 quarts peut être décomposée en 1 quart et 2 quarts ou en un quart, un quart et un quart.
- compare des fractions ayant un dénominateur commun à l’aide de modèles en découpant, pliant, dessinant un même tout en parties égales.



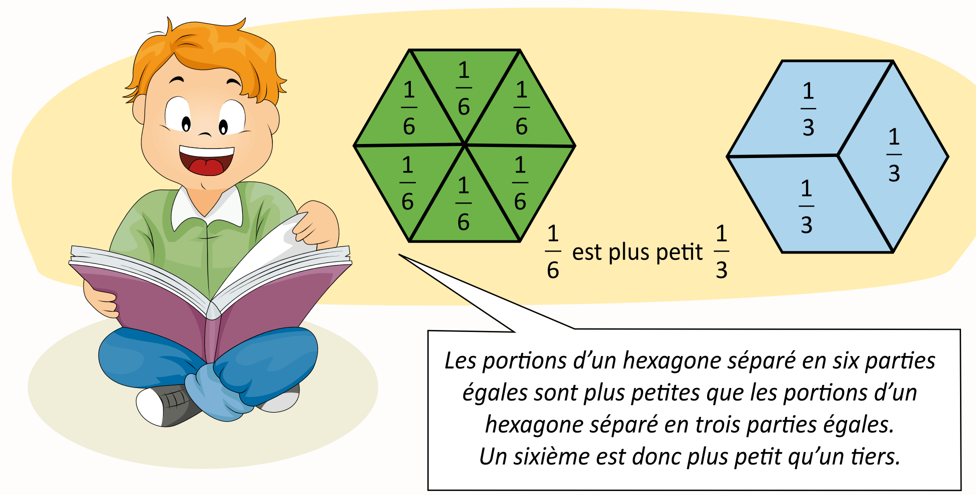
À noter : L’élève ne prête pas toujours suffisamment attention au fait que toutes les parties du tout doivent être égales. Et il n’est pas toujours conscient du fait que l’emplacement des régions ombrées n’a pas d’impact sur la fraction qu’elles représentent. Il est donc essentiel de lui fournir plusieurs occasions de manipuler et représenter des

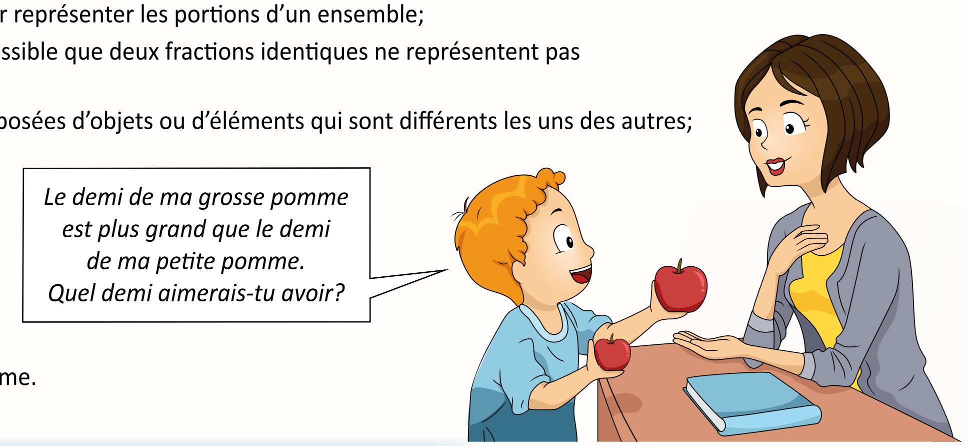
- touts divisés également et inégalement afin qu’il comprenne mieux le concept de parties égales;
- régions ombrées qui ne sont pas juxtaposées afin qu’il comprenne qu’il s’agit de la représentation d’une même fraction.



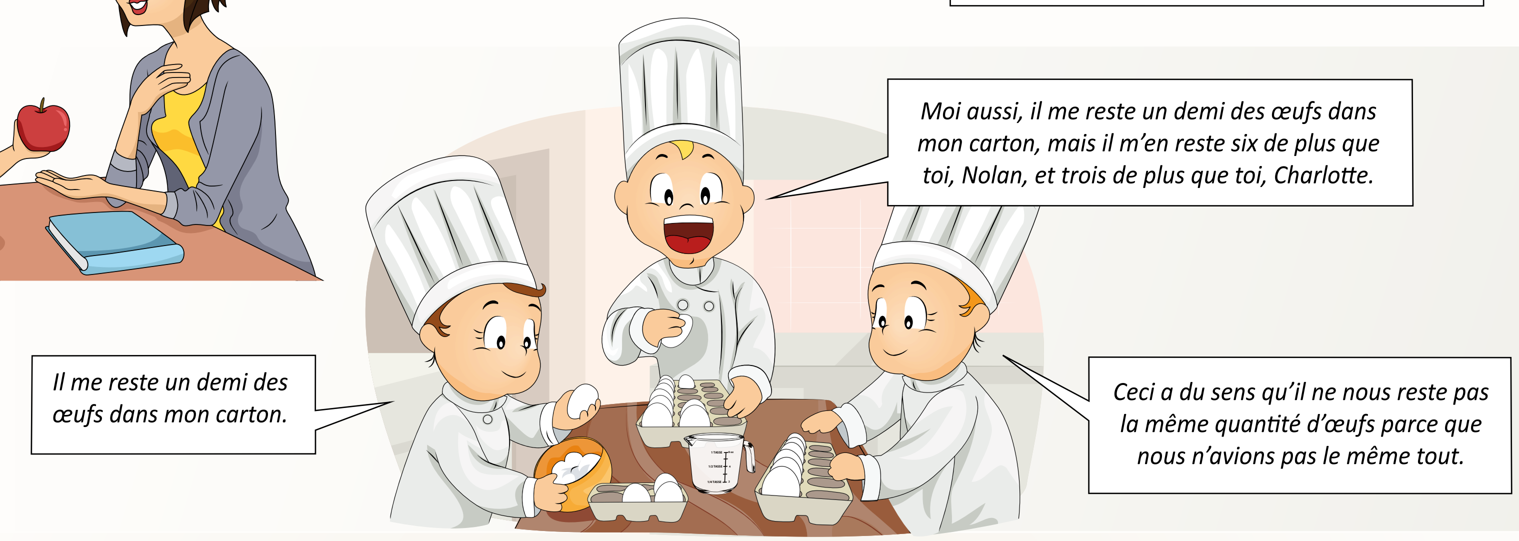
L'élève de la 4e année

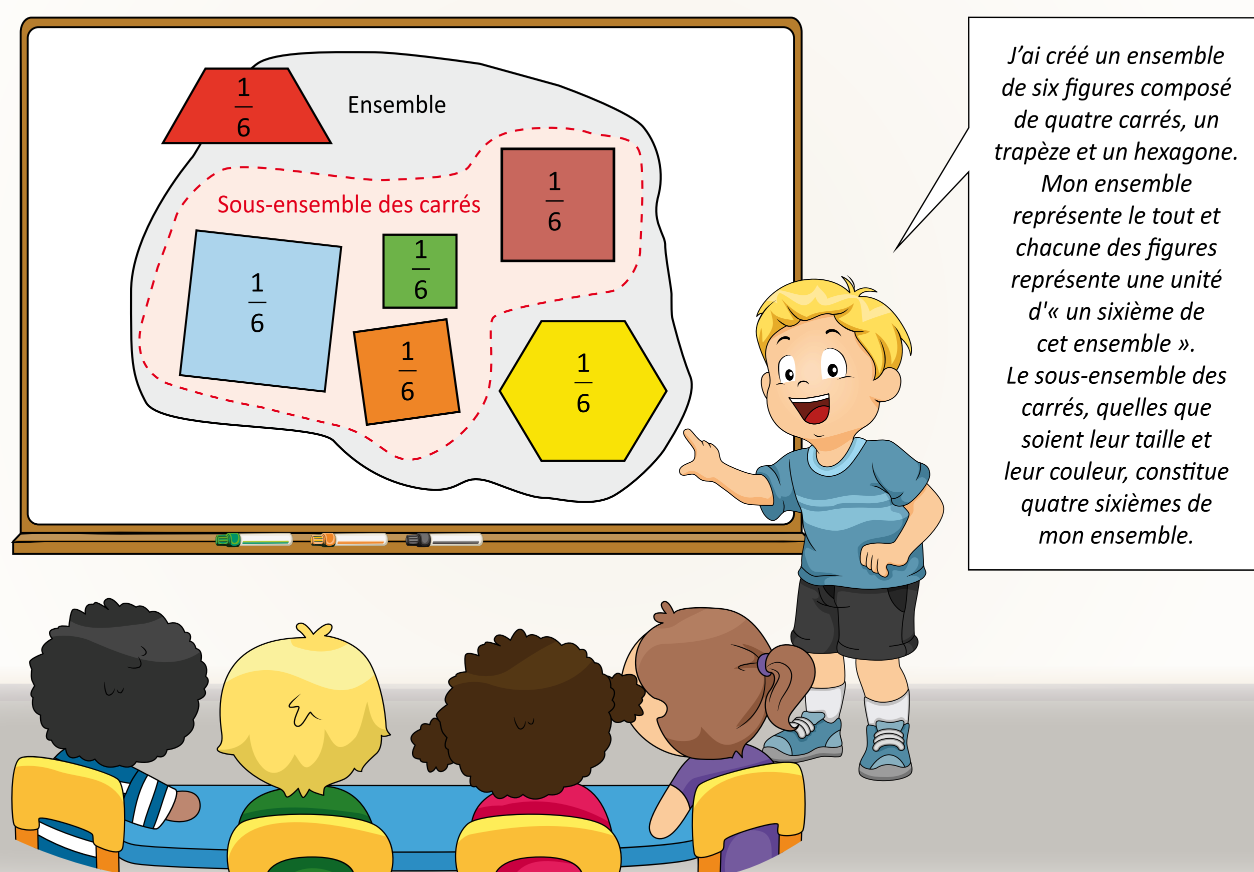
- continue à approfondir sa compréhension des fractions inférieures ou égales à 1 de façon **concrète** et **imagée**;
- comprend que l'unité fractionnaire détermine la grandeur de chacune des portions d'un même tout. Cette réalisation est un précurseur à la compréhension du concept des fractions équivalentes qui est abordé en 5e année;
- explique comment les dénominateurs peuvent être utilisés pour comparer et ordonner des fractions unitaires;
- nomme et ordonne des fractions de même numérateur en les plaçant sur une droite numérique horizontale ou verticale qui comporte des points de repère;
- identifie lequel des points de repère 0, 1/2 ou 1 est le plus proche d'une fraction;
- aborde le modèle de l'ensemble de **façon formelle** pour la première fois. Il peut représenter une fraction d'un ensemble de façon **concrète** et **imagée** ainsi que la nommer et la noter;
- fournit des exemples de situations dans lesquelles on utilise des fractions pour représenter les portions d'un ensemble;
- modélise et explique que, pour différents ensembles ou selon le tout, il est possible que deux fractions identiques ne représentent pas la même quantité;
- comprend que les parties d'un ensemble (sous-ensembles) peuvent être composées d'objets ou d'éléments qui sont différents les uns des autres;
- comprend qu'une fraction peut être composée et décomposée, p. ex. :
  - 2 quarts peuvent être décomposés en 1 quart et 1 quart;
  - 3 quarts peuvent être décomposés en 1 quart et 2 quarts ou en 1 quart, 1 quart et 1 quart;
  - 1 quart et 1 quart font 2 quarts;
  - 3 quarts moins 1 quart donne 2 quarts.
- établit le lien entre les nombres décimaux finis et les fractions jusqu'au centième.

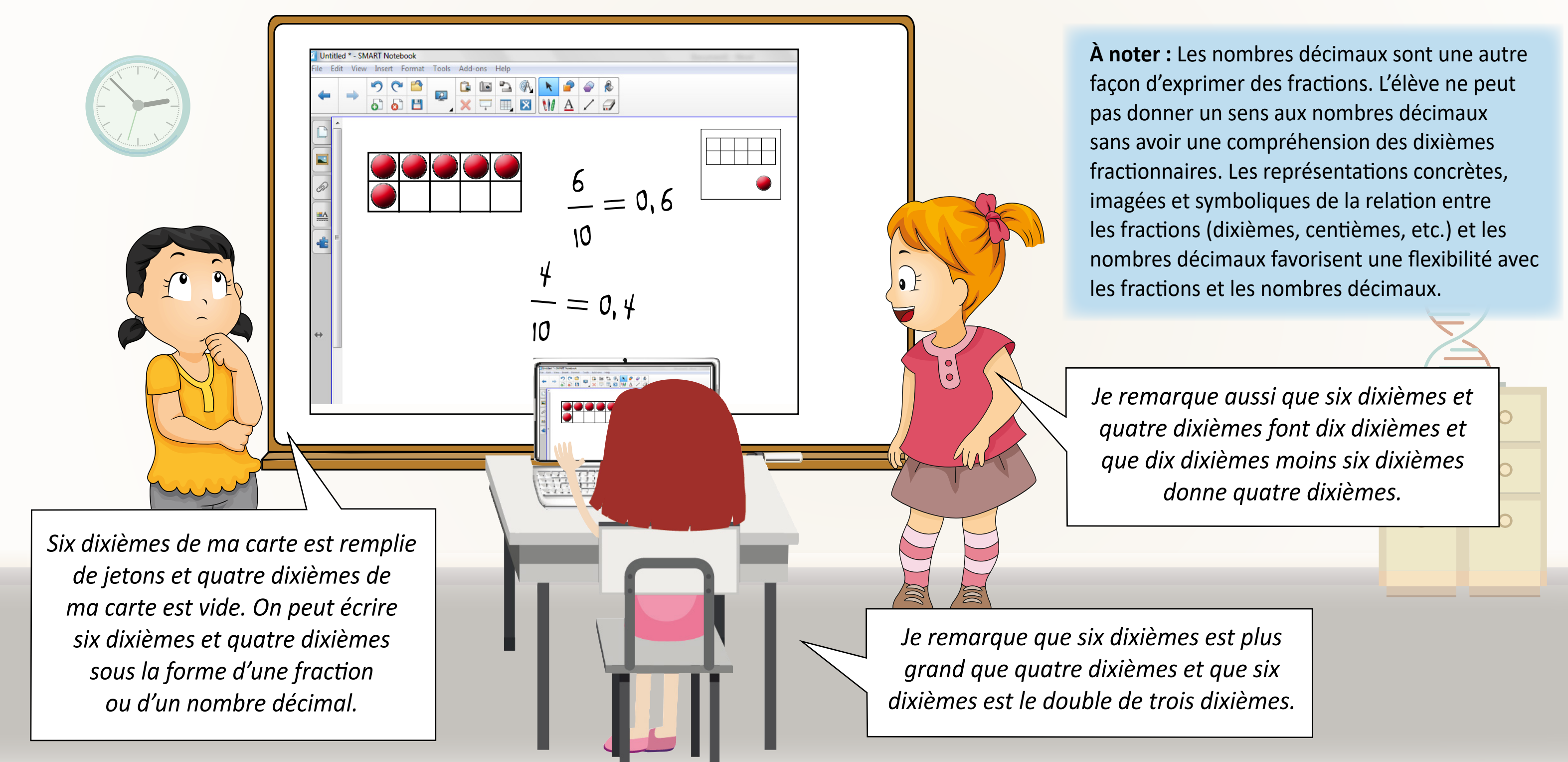




À noter : Les modèles d'ensemble sont difficiles à comprendre, car ils demandent à l'élève de considérer un ensemble d'objets comme un tout alors que chacune de ses composantes n'est pas identique et que les caractéristiques ne sont pas prises en considération.







À noter : Les nombres décimaux sont une autre façon d'exprimer des fractions. L'élève ne peut pas donner un sens aux nombres décimaux sans avoir une compréhension des dixièmes fractionnaires. Les représentations concrètes, imagées et symboliques de la relation entre les fractions (dixièmes, centièmes, etc.) et les nombres décimaux favorisent une flexibilité avec les fractions et les nombres décimaux.

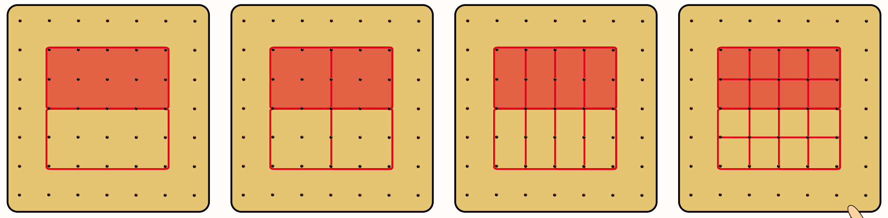
PROGRESSION DES APPRENTISSAGES - DÉVELOPPEMENT DU SENS DE LA FRACTION

5e année et 6e année

L'élève de la 5e et de la 6e années applique ses connaissances et son sens des fractions pour développer sa compréhension des fractions équivalentes (5e année) et des fractions supérieures à 1 (6e année). Comme en 3e et en 4e années, il développe cette compréhension par l'entremise de matériel de manipulation tel que des blocs mosaïques, des réglettes, des géoplans, des bandes de papier, etc., et d'une variété de modèles tels que des modèles d'aire ou surface, de longueur et d'ensemble.

L'élève de la 5e année

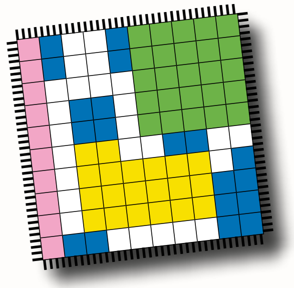
- aborde le concept de fractions équivalentes de façon formelle pour la première fois. Il peut représenter des fractions équivalentes de façon **concrète** et **imagée,** et expliquer pourquoi plusieurs fractions sont équivalentes;
- comprend que plusieurs fractions peuvent représenter la même portion d'un tout et il peut :
  - nommer une quantité fractionnaire de plus d'une façon;
  - déterminer si deux fractions sont équivalentes;
  - créer des ensembles de fractions équivalentes;
  - expliquer pourquoi il existe plusieurs fractions équivalentes à une fraction;
  - formuler et vérifier une règle pour créer un ensemble de fractions équivalentes et identifier des fractions équivalentes à une fraction;
  - comparer deux fractions ayant des dénominateurs différents en créant des fractions équivalentes.
- place des fractions ayant des dénominateurs communs ou des dénominateurs différents sur une droite numérique horizontale ou verticale, et explique les stratégies utilisées pour les ordonner;
- établit le lien entre les nombres décimaux finis et les fractions jusqu'au millième.



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{16}$

J'ai tracé quatre rectangles congruents sur du papier isométrique. J'ai divisé chacun des rectangles en unités fractionnaires différentes, soit des demis, des quarts, des huitièmes et des seizièmes. J'ai colorié une portion identique de chacun des rectangles pour représenter des quantités fractionnaires qui sont équivalentes.

Mon image démontre qu'un demi, deux quarts, quatre huitièmes et huit seizièmes sont des fractions équivalentes.



0,25 ou $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ de la couverture est verte.

0,1 ou $\frac{10}{100}$ ou $\frac{1}{10}$ de la couverture est rose.

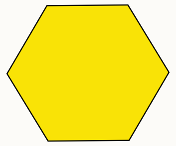
0,2 ou $\frac{20}{100}$ ou $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ de la couverture est jaune.

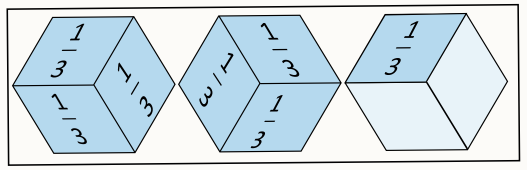
0,17 ou $\frac{17}{100}$ de la couverture est bleue.

À noter : Pour développer sa compréhension du concept de fractions équivalentes et être en mesure de comparer des fractions de même dénominateur ou de dénominateurs différents, l'élève de la 5e année doit comprendre que le nombre de portions d'un tout détermine la grandeur de chacune des portions. Par exemple, il réalise que les portions d'un hexagone séparé en 6 parties égales sont plus petites que les portions d'un hexagone séparé en 4 parties égales et que les quarts sont plus grands que les sixièmes.

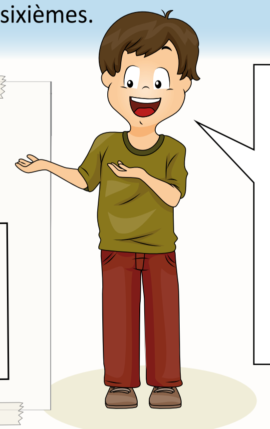
L'élève de la 6e année

- établit le lien entre les fractions impropres et les nombres fractionnaires en démontrant à l'aide de modèles qu'une fraction impropre représente un nombre supérieur à 1;
- exprime des fractions impropres sous forme de nombres fractionnaires et vice versa;
- explique les stratégies utilisées pour ordonner les fractions d'un ensemble comprenant des nombres fractionnaires et des fractions impropres;
- aborde la notion de rapport pour la première fois. Il peut :
  - modéliser un rapport de façon **concrète** et **imagée** et les noter de plusieurs façons **symboliques** telles que 3 : 5; $\frac{3}{5}$ ou un rapport de 3 à 5;
  - identifier et décrire l'utilisation de rapports dans la vie quotidienne;
  - expliquer les rapports partie-à-tout ou partie-à-partie dans un ensemble.

Si  est le tout, la représentation de sept tiers ou deux et un tiers est :



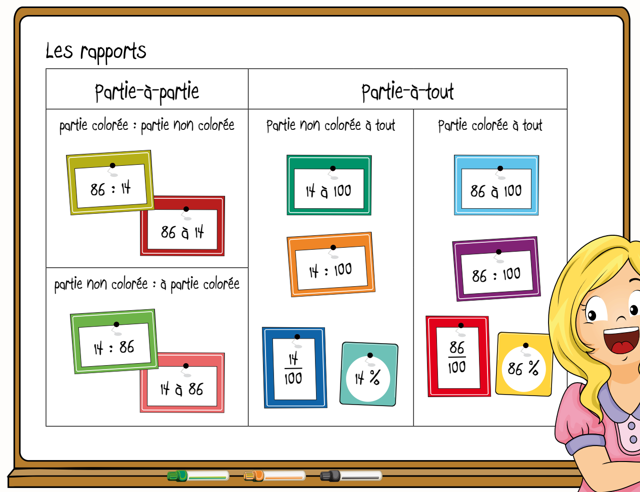
$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$



L'hexagone représente mon tout et chacun des losanges représente le tiers de l'hexagone. Si j'ai sept losanges, j'ai sept unités de un tiers ou deux touts et un tiers de l'autre tout, c'est-à-dire que j'ai sept tiers ou deux et un tiers.

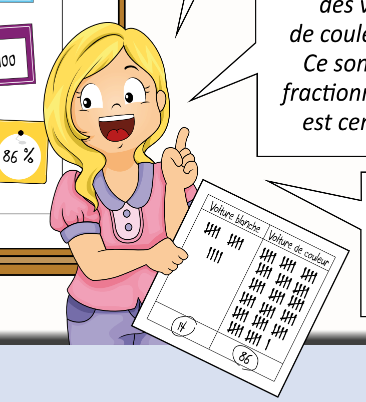
Le rapport partie-à-partie des billes rouges aux billes vertes est de trois à cinq. Celui des billes vertes aux billes rouges est de cinq à trois. Ces rapports ne peuvent pas être notés sous forme fractionnaire.

Le rapport partie-à-tout des billes rouges à l'ensemble des billes est de trois à huit ou trois huitièmes. Celui des billes vertes à l'ensemble des billes est de cinq à huit ou cinq huitièmes. Ces rapports peuvent être notés sous forme fractionnaire.



Kara dit que les voitures blanches sont les plus populaires. J'ai fait une enquête pour déterminer si c'est bien le cas. Lors de mon enquête, j'ai noté la fréquence de la couleur de cent voitures qui se trouvaient dans le stationnement de notre centre commercial.

Selon mes données, le rapport des voitures blanches à l'ensemble des voitures est de quatorze à cent et le rapport des voitures de couleur à l'ensemble des voitures est de quatre-vingt-six à cent. Ce sont des rapports partie-à-tout que je peux noter sous forme fractionnaire. Comme le deuxième terme de chacun de ces rapports est cent, je peux aussi les noter sous la forme d'un pourcentage.



Selon mes données, les voitures blanches sont moins populaires que les voitures de couleur et il est très peu probable qu'on retrouve plus de voitures blanches que de voitures de couleur dans un autre secteur du stationnement.

- comprend que toutes les fractions sont des rapports à deux termes (partie-à-tout) dont le premier terme est représenté par le numérateur et le deuxième terme est représenté par le dénominateur, mais que tous les rapports (partie-à-partie) ne sont pas des fractions;
- modélise un pourcentage de façon **concrète** ou **imagée** et l'exprime de façon **symbolique** sous forme de fraction et de nombre décimal;
- comprend qu'un pourcentage est aussi un rapport à deux termes, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est toujours égal à 100.