INTRODUCTION AUX PUISSANCES – Activités - Corrigé

RAS 9N1
Puces :
▪

Activité 1.1 Le Papyrus Rhind

Le Papyrus Rhind aurait été écrit par le scribe Ahmès, qui vécu vers 1700 av. J.-C. Son nom vient d'un Écossais qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes. Actuellement conservé au British Museum de Londres, il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Voici un des problèmes que l’on trouve dans ce papyrus.
« Dans chacune des 7 cabanes, il y a 7 chats. Chaque chat surveille 7 souris. Chaque souris a 7 épis de blé. Chaque épi est composé de 7 grains. Combien de grains de blé y a-t-il en tout ? »

Corrigé :

Imaginer le problème suivant :
Dans chacune des 2 cabanes, il y a 2 chats. Chaque chat surveille 2 souris. Chaque souris a 2 épis de blé. Chaque épi est composé de 2 grains. Combien de grains de blé y a-t-il en tout ?

On pourrait alors représenter le problème par un diagramme comme celui-ci où chaque rangée représente le nombre de cabanes ou le nombre de chats ou le nombre de souris ou le nombre d’épis de blé ou le nombre de grains de blé.

<table>
<tr><td># cabanes</td><td colspan="16"></td><td colspan="16"></td></tr>
<tr><td># chats</td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td># souris</td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td># épis</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td># grains</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Comptons le nombre de cabanes, de chats, de souris, d’épis de blés et de grains de blé.
Il y a : 2 cabanes
2 x 2 = 4 chats
2 x 2 x 2 = 8 souris
2 x 2 x 2 x 2 = 16 épis de blé
2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32 grains de blé
On multiplie 2 cinq (5) fois par lui-même pour trouver le nombre de grains de blé.

La réponse à la question est donc : 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32 grains de blé

Répondons maintenant à ce problème :
Dans chacune des 3 cabanes, il y a 3 chats. Chaque chat surveille 3 souris. Chaque souris a 3 épis de blé. Chaque épi est composé de 3 grains. Combien de grains de blé y a-t-il en tout ?

Les trois premières rangées du diagramme seraient :

<table>
<tr><td># cabanes</td><td colspan="9"></td><td colspan="9"></td><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td># chats</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td># souris</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Comptons le nombre de cabanes, de chats et de souris.

Il y a : 3 cabanes

3 x 3 = 9 chats

3 x 3 x 3 = 27 souris

Comme à chaque fois, on multiplie par 3. On peut donc trouver le nombre d'épis de blé et de grains de blé.

3 x 3 x 3 x 3 = 81 épis de blé

3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 243 grains de blé

On multiplie 3 cinq (5) fois par lui-même pour trouver le nombre de grains de blé.

La réponse à la question est donc : 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 243 grains de blé

Donc s'il y a 7 cabanes avec 7 chats qui surveillent 7 souris lesquelles possèdent 7 épis de blé qui contiennent 7 grains de blé, on peut dire qu'en suivant le modèle suivi par les problèmes avec 2 chats ou 3 chats :

On multiplie 7 cinq (5) fois par lui-même.

Il y a donc 7 x 7 x 7 x 7 x 7 = 16 807 grains de blé

Activité 1.2 Distance Terre-Lune

Une feuille de papier mesure 0,1 mm d'épaisseur. La distance entre la Terre et la Lune est d'environ 384 400 km.
En pliant une feuille de papier en deux, on double son épaisseur. En la repliant en quatre, l'épaisseur quadruple et ainsi de suite. Combien de fois faut-il plier la feuille de papier pour obtenir la distance Terre-Lune ?

Corrigé :

1) Avant d'effectuer la correction de cette activité, il faudrait demander aux élèves de prendre une feuille de papier (8,5 x 11) et de voir combien de fois ils peuvent la plier. Ils devraient noter le nombre de plis et l'épaisseur de la feuille de papier après l'avoir pliée.

2) Pour pouvoir comparer la distance Terre-Lune à l'épaisseur de la feuille de papier pliée, il faut comparer les mêmes unités.
Sachant que 1 km = 1 000 m et 1 m = 1 000 mm ; alors 1 km = 1 000 000 mm.
La distance de la Terre à la Lune, en millimètres, est :

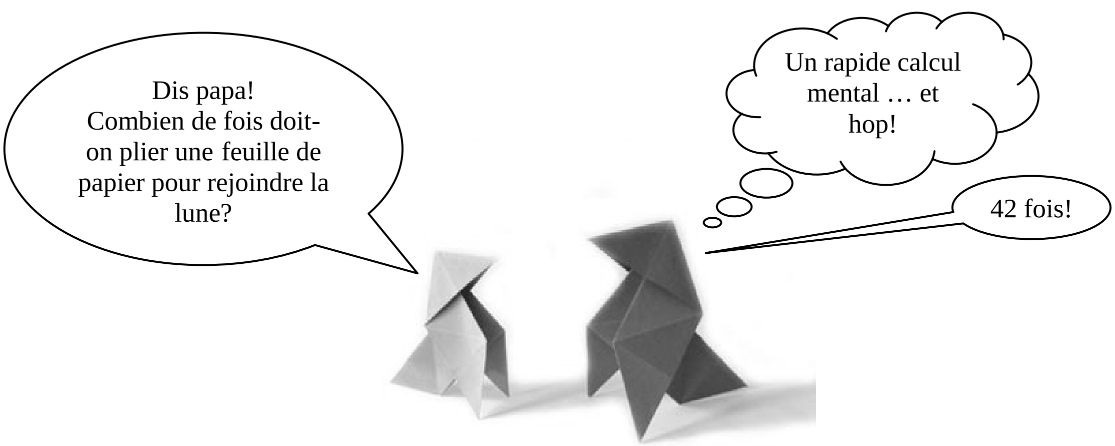
$$384\,000 \text{ km} = 384\,000 \text{ km} \times \frac{1\,000\,000 \text{ mm}}{1 \text{ km}} = 384\,000\,000\,000 \text{ mm}$$

3) Combien de fois il faut plier la feuille pour obtenir au moins 384 milliards de millimètres.

À zéro pli, la feuille n'est pas pliée (1 épaisseur);
Avec 1 pli, la feuille est pliée en 2 (2 épaisseurs);
Avec 2 plis, la feuille est pliée en 4 (4 épaisseurs);
Avec 3 plis, la feuille est pliée en 8 (8 épaisseurs);
Avec 4 plis, la feuille est pliée en 16 (16 épaisseurs);
Et ainsi de suite …

1 pli → 0,1 x 2 = 0,2 mm
2 plis → 0,1 x 2 x 2 = 0,4 mm
3 plis → 0,1 x 2 x 2 x 2 = 0,8 mm
4 plis → 0,1 x 2 x 2 x 2 x 2 = 1,6mm

La multiplication du 2 est répétée autant de fois qu'il le faut pour obtenir ou dépasser la distance Terre-Lune. Le tableau sur la page suivante montre le nombre de plis qu'il faut faire.



Nombre de plis	Épaisseur de la feuille (mm)
0	0,10
1	0,20
2	0,40
3	0,80
4	1,60
5	3,20
6	6,40
7	12,80
8	25,60
9	51,20
10	102,40
11	204,80
12	409,60
13	819,20
14	1 638,40

Nombre de plis	Épaisseur de la feuille (mm)
15	3 276,80
16	6 553,60
17	13 107,20
18	26 214,40
19	52 428,80
20	104 857,60
21	209 715,20
22	419 430,40
23	838 860,80
24	1 677 721,60
25	3 355 443,20
26	6 710 886,40
27	13 421 772,80
28	26 843 545,60
29	53 687 091,20

Nombre de plis	Épaisseur de la feuille (mm)
30	107 374 182,40
31	214 748 364,80
32	429 496 729,60
33	858 993 459,20
34	1 717 986 918,40
35	3 435 973 836,80
36	6 871 947 673,60
37	13 743 895 347,20
38	27 487 790 694,40
39	54 975 581 388,80
40	109 951 162 777,60
41	219 902 325 555,20
42	439 804 651 110,40

Il faudrait plier la feuille 42 fois pour obtenir la distance Terre-Lune

Activité 1.3 Les grains de riz

Au pays de Tyranausie, un Empereur propose le marché suivant à un de ses prisonniers : « Fais un vœu ; si je parviens à le réaliser, tu seras décapité ; si je n'y arrive pas, tu seras libéré ». Le prisonnier demande alors à l'Empereur de faire venir un échiquier, puis lui dit : « Sire, vous avez devant vous un échiquier ; mettez un grain de riz sur la 1^{re}case, 2 grains de riz sur la 2^{e}case, 4 sur la 3^{e}, 8 sur la 4^{e} et ainsi de suite jusqu'à la dernière case. Je pendrai uniquement le contenu de la dernière case. »

Pour faciliter les calculs, arrondir toutes les réponses à l'unité.

Corrigé :

* Le site http://fr.wikipedia.org/wiki/Oryza fournit de bonnes informations sur le riz.

Répondre aux questions suivantes :

1. Remplir l'échiquier en écrivant sur chacune des cases des deux premières rangées le nombre de grains de riz que l'empereur doit y déposer.

   Voir tableau

2. Observer la régularité obtenue lors des deux premières rangées. Pour une case donnée, quelle valeur est répétée, pourquoi est-elle répétée et combien de fois est-elle répétée?

   La valeur 2 est répétée parce qu'on double à chaque fois. Un de moins que le numéro de la case.

3. Faire la même observation pour la case suivant celle observée dans la question 2.

   Même réponse que question 2.

4. Si on devait répéter la multiplication jusqu'à la 64^{e} case, compléter le tableau suivant :

Case #	12	13	14	25	32	48	64
Valeur répétée	2	2	2	2	2	2	2
Nombre de fois que la valeur est répétée	11	12	13	24	31	47	63

5. À l'aide d'une calculatrice, déterminer la valeur exacte du nombre de grains de riz que l'empereur doit déposer sur la 32^{e} case.

   2 147 483 648 grains de riz

6. Sachant que la masse d'un grain de riz est de 0,018 g, déterminer la masse, en tonnes, de tous les grains de riz déposés sur la 32^{e} case. (1 tonne = 1 000 000 g)

   2 147 483 648 x 0,018 g = 38 654 706 g ce qui équivaut à environ 39 tonnes

7. Quelle sera la masse des grains de riz, en tonnes, que l'Empereur devra déposer sur la 33^{e} case ?

   Puisque le nombre de grains de riz double, la masse double aussi, donc 2 x 39 tonnes, soit 78 tonnes.

8. Quelle sera la masse des grains de riz, en tonnes, que l'Empereur devra déposer sur la 34^{e} case ? 35^{e} case ?

   34^{e} case : 39 x 2 x 2 = 156 tonnes
   35^{e} case : 39 x 2 x 2 x 2 = 312 tonnes

9. Quelle sera la masse des grains de riz, en tonnes, que l'Empereur devra déposer sur la 64^{e} case ?

   À partir de la 33^{e} case, la masse double à chaque fois. Donc 39 sera multiplié par 2 autant de fois qu'il y a de cases pour arriver jusqu'à la 64^{e} case, soit 32 fois.

   $$39\text{ g} \times \underbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}_{\text{32 fois}} \times \frac{1\text{ tonne}}{1000\,000\text{ g}} \times \frac{1\text{ million tonnes}}{1000\,000\text{ tonnes}} = 167\,504\text{ millions tonnes de riz.}$$

10. Sachant que la production mondiale actuelle de riz est de 595 millions de tonnes, combien d'années faudrait-il à l'Empereur pour exhausser le vœu du prisonnier ? Sera-t-il libéré ou décapité?

    167 504 / 595 = 282 années. Le prisonnier sera libéré.

11. Échiquier

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1 = 1	1x2 = 2	1x2x2 = 4	1x2x2x2 = 8	1x2x2x2x2 = 16	1x2x2x2x2x2 = 32	1x2x2x2x2x2x2 = 64	1x2x2x2x2x2x2x2 = 128
2	1x2x2x2x2x2x2x2x2 = 256	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 512	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 1 024	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 2 048	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 5 096	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 10 192	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 20 384	1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 40 768
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Activité 2.1 Les bits

Une image numérique est constituée de pixels. La couleur de l'image dépend du nombre de bits utilisés pour chaque pixel. Un bit est codé soit par 0, soit par 1. Il y a donc 2 possibilités. Ceci donne une image en noir et blanc sans aucune nuance de gris. Une image à deux bits (00, 01, 10 ou 11) aurait donc 4 couleurs. Une image à trois bits (000, 001, 010, 100, 011, 110, 101, 111) aurait alors 8 couleurs. Plus le nombre de bits augmente, plus le nombre de couleurs augmente. De combien de fois augmente le nombre de couleurs lorsqu'on augmente de « 1 » le nombre de bits ? Déterminer le nombre de couleurs dans une image à 4 bits. Combien y aurait-il de couleurs dans une image à 8 bits ?

Les écrans d'ordinateurs d'aujourd'hui ont la capacité de montrer au delà de 16 millions de couleurs. De combien de bits serait constituée une telle image ? Les télévisions Haute Définition pourraient produire des images qui contiendraient plus que 4 billions (4 000 milliards) de couleurs. Combien de bits cela ferait ?

Corrigé :

Établir un tableau dans lequel on comptera les bits et le nombre de couleurs associées.

Nombre de bits	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de couleurs	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

La régularité trouvée avec les trois premières bits nous permet de déterminer qu'il faut multiplier le nombre de couleurs par 2 à chaque fois.

Donc : 4 bits → 8 x 2 = 16 couleurs
5 bits → 16 x 2 = 32 couleurs
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
8 bits → 128 x 2 = 256 couleurs

Complétons un tableau en continuant de multiplier par 2 le nombre de couleurs pour obtenir 16 millions et 4 billions de couleurs.

Nombre de bits	Nombre de couleurs
11	2 048
12	4096
13	8 192
14	16 768
15	32 768
16	65 536
17	131 072
18	262 144
19	524 288
20	1 048 576
21	2 097 152
22	4 194 304
23	8 388 608
24	**16 777 216**

Nombre de bits	Nombre de couleurs
25	33 554 432
26	67 108 864
27	134 217 287
28	268 435 456
29	536 870 912
30	1 073 741 824
31	2 147 483 648
32	**4 294 967 296**

Une image à 32 bits permettrait de voir plus que 4 billions de couleurs.

Une image à 24 bits permettrait de voir plus que 16 millions de couleurs

Activité 2.2 La rumeur

Mademoiselle Jeanne habite à Winnipeg. Cette nuit, elle a rêvé qu'elle prenait son petit-déjeuner avec T. Croose, son acteur préféré. En arrivant au bureau à 9 h., elle raconte le fait à ses trois amies, mais elle oublie de leur dire qu'il s'agissait simplement d'un rêve. Naturellement, les trois amies se hâtent de faire les intéressantes et chacune d'entre elles annonce ce qu'elle vient d'apprendre à trois nouvelles personnes. Évidemment, chacune de ces nouvelles personnes raconte cette histoire à trois autres personnes et ainsi de suite.
Sachant qu'environ 650 000 personnes habitent à Winnipeg et que l'information est répétée à de nouveaux groupes de trois personnes toutes les 10 minutes, à quelle heure la ville entière de Winnipeg croira savoir que T. Croose a pris son petit déjeuner avec Mademoiselle Jeanne ?

Corrigé :

Voici un diagramme qui montre comment augmente le nombre de personnes mises au courant de l'histoire de M^{elle} Jeanne et du temps qu'il faut pour que cette histoire se répande :

M^{elle} Jeanne	0	
Les 3 amies	10	
Groupe #1	20	
Groupe #2	30	

Complétons un tableau qui indique le nombre de personnes au courant et l'heure à laquelle elles on été informées :

	Nombre de nouvelles personnes informées	**Nombre total de personnes informées**	**Heure**
À 9h10, les trois amies sont au courant du fait.	3	3	9h10
À 9h20, 3 x 3 = 9 personnes sont au courant	9	12	9h20
À 9h30, 9 x 3 = 3 x 3 x 3 = 27 personnes	27	39	9h30

On s'aperçoit qu'il s'agit d'une multiplication répétée de 3 parce que le nombre de nouvelles personnes informées est multiplié par 3 à chaque fois.

Mais à quelle heure est-ce que le nombre total de personnes informées dépassera 650 000? Il ne faut pas oublier d'additionner les personnes déjà au courant avec le nombre de personnes nouvellement au courant pour trouver la population totale qui est au courant.

Complétons le tableau :

	Nombre de nouvelles personnes informées	Nombre total de personnes informées	Heure
À 9h10, les trois amies sont au courant du fait.	3	3	9h 10
À 9h20, 3 x 3 = 9 personnes sont au courant	9	12	9h 20
À 9h30, 9 x 3 = 3 x 3x 3 = 27 personnes	27	39	9h 30
27 x 3 = 3 x 3 x 3 x 3 = 81 personnes	81	120	9h 40
3 est multiplié 5 fois par lui-même	243	363	9h 50
3 est multiplié 6 fois par lui-même	729	1 092	10h 00
3 est multiplié 7 fois par lui-même	2 187	3 279	10h 10
3 est multiplié 8 fois par lui-même	6 561	9 840	10h 20
3 est multiplié 9 fois par lui-même	19 683	19 523	10h 30
3 est multiplié 10 fois par lui-même	59 049	88 572	10h 40
3 est multiplié 11 fois par lui-même	177 147	265 719	10h 50
3 est multiplié 12 fois par lui-même	531 441	797 160	11h 00

12 fois 10 minutes = 120 minutes, ce qui équivaut à 2 heures.

Deux après que Jeanne soit arrivée au bureau, soit à 11 heures, 531 441 nouvelles personnes sont mises au courant : en additionnant les 265 719 personnes déjà au courant, on dépasse la population de Winnipeg.

En conclusion, il faut très peu de temps pour répandre une rumeur.

Activité 2.3 L'appât du gain

Monsieur B. Bête est un homme très riche, mais qui n'aime pas beaucoup réfléchir. Monsieur R. E. Nard est un homme très rusé, mais qui n'a pas beaucoup d'argent. Un jour, R. E. Nard fait la proposition suivante à B. Bête:
« Demain, je vous donnerai 1 000 $ et vous, pour me remercier, vous me donnerez 1 cent. Le lendemain, je vous apporterai à nouveau 1 000 $ et vous me donnerez cette fois-ci 2 cents. Le troisième jour, je vous apporterai encore 1 000 $ et vous devrez me donner 4 cents. Nous continuerons ces échanges pendant 30 jours. Ainsi :
- je vous apporte chaque jour la somme de 1 000 $,
- vous me donnez chaque jour le double de la somme que vous m'avez donnée la veille.»
B. Bête réfléchit un instant et se dit qu'après trois jours, il aura déjà reçu 3 000 $, alors qu'il n'aura payé que 7 cents.
Pensant que sa fortune grossira très vite, B. Bête accepte la proposition de R. E. Nard. A-t-il eu raison d'accepter ?

Corrigé :

1. Compléter le tableau suivant pour les huit premières journées :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8
Somme reçue par R. E. Nard ($)	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,32	0,64	1,28
Somme reçue par B. Bête ($)	1 000	1 000	1 00	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
Somme totale reçue par R. E. Nard ($)	0,01	0,03	0,07	0,15	0,31	0,63	1,27	2,55
Somme totale reçue par B. Bête ($)	1 000	2 000	3 00	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000

2. À la fin du 8^{e} jour, B. Bête réévalue ce qu'il a reçu et ce qu'il a donné. Jusqu'à maintenant, est-ce qu'il a pris une bonne décision d'accepter la proposition de R. E. Nard ? Expliquer.

   Puisque B.Bête ne réfléchit pas beaucoup, il peut toujours penser qu'il a pris une bonne décision : à la fin du 8^{e} jour il aura reçu 8 000 $ alors qu'il n'aura donné que 2,55 $. Par contre il devrait se rendre compte que par rapport à son calcul des 3 premiers jours, ce qu'il doit donné a augmenté de 36 fois alors que ce qu'il a reçu n'a même pas augmenté de 3 fois.

3. Compléter le tableau suivant pour les journées restantes.

Jour	10	14	18	22	26	30
Somme reçue par R. E. Nard ($)	5,12	81,92	1 310,70	20 971,52	335 544,32	5 368 709,12
Somme reçue par B. Bête ($)	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
Somme totale reçue par R. E. Nard ($)	10,23	163,83	2621,43	41 943,03	671 088,63	10 737 418,23
Somme totale reçue par B. Bête ($)	10 000	14 000	18 000	22 000	26 000	30 000

4. Quelle valeur est toujours répétée dans le calcul de la somme d'argent reçue par R. E. Nard? Pourquoi est-elle répétée ?

   La valeur 2 est répétée parce que la somme de 1 cent du départ est doublée chaque jour.

5. Combien de fois la valeur déterminée dans la question 4. est-elle répétée le sixième jour ? Combien de fois cette valeur est-elle répétée le 7^{e} jour; le 12^{e} jour; le 30^{e} jour ?

   6^{e} jour, 2 est répété 5 fois (on ne double pas la somme d'argent le 1er jour).
   Le 12^{e} jour, 2 est répété 11 fois et le 30^{e} jour, 2 est répété 29 fois.

6. Au bout de 30 jours, combien d'argent B. Bête a-t-il reçu et combien a-t-il donné? Qui est gagnant dans cette proposition ?

   B. Bête a reçu au total 30 000 $ alors qu'il a donné en tout 10 737 418 $ ou un peu plus que 10 millions. Il est évident que B. Bête n'est pas gagnant et R.E. Nard est un malin.

7. Quel jour est-ce que les deux personnages, R. E. Nard et B. Bête, auraient-ils à peu près reçu et donné la même somme d'argent ?

   Ils ne reçoivent pas exactement la même somme. Le 18^{e} jour, R. E. Nard reçoit 1 310 $ et B. Bête reçoit 1 000 $. La différence est moins grande ce jour là que le 17^{e} jour.

8. Que se passerait-il si B. Bête devait donner 1 cent le premier jour, 3 cents le deuxième jour, 9 cents le troisième jour et ainsi de suite jusqu'au trentième jour? En quoi est-ce que la résolution du problème changerait ?

   Ici B. Bête doit tripler la somme d'argent. Il perdrait encore plus qu'en doublant la somme d'argent. La méthode de résolution resterait la même; la seule différence serait une multiplication répétée de la valeur 3.