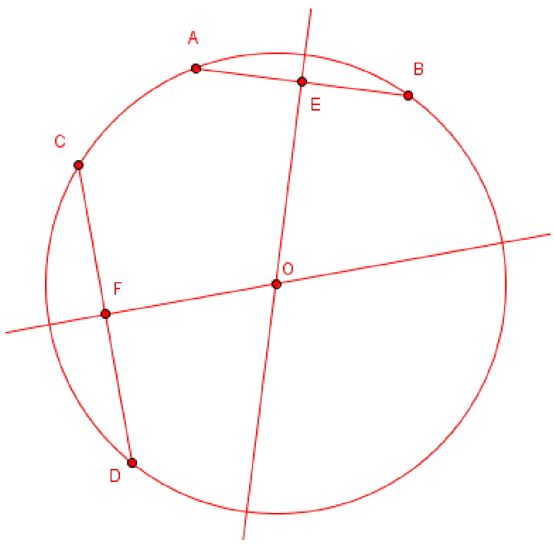
LE CERCLE – Applications et problèmes - CORRIGÉ

1. Pour chacun des exercices suivants, tracer un cercle à l'aide d'une boîte de conserve ou de tout autre objet ayant une base circulaire. Pour chacun de ces cercles, déterminer avec précision où se trouve le centre du cercle en utilisant à chaque fois une propriété différente du cercle, un rapporteur et une règle. Identifier la propriété impliquée, et montrer tout le travail en traçant les droites et/ou les segments nécessaires. Écrire toutes les étapes.

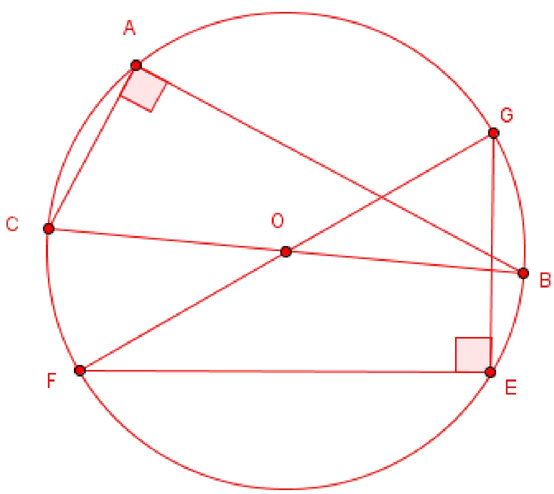
a. Cercle #1



Propriété utilisée :
#5 – La médiatrice

Étapes :
7. Tracer un cercle.
8. Placer deux points A et B sur le cercle.
9. Tracer la corde AB.
10. Trouver le point milieu E de AB.
11. Tracer la médiatrice de AB.
12. Placer deux points C et D sur le cercle.
13. Tracer la corde CD.
14. Trouver le point milieu F de D.
15. Tracer la médiatrice de CD.
16. Le centre O du cercle est formé par l'intersection des deux médiatrices.

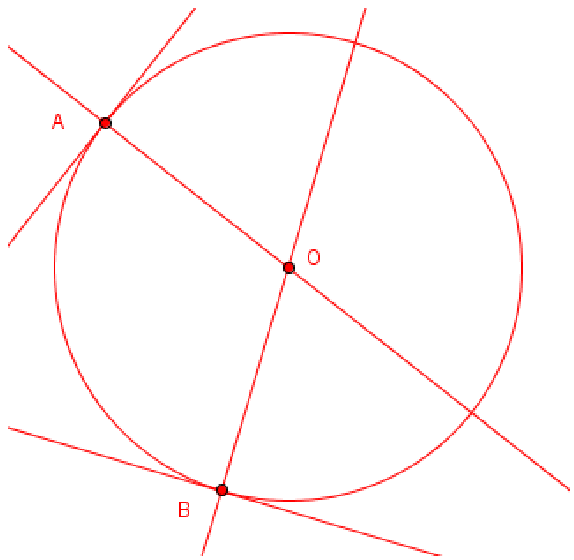
b. Cercle #2



<u>Propriété utilisée :</u>
#2 – Le demi-cercle

<u>Étapes :</u>
1. Tracer un cercle.
2. Placer un point A sur le cercle.
3. Avec un rapporteur tracer un angle droit de sommet A et dont les côtés rejoignent le cercle.
4. Nommer B et C les points d'intersection de l'angle avec le cercle.
5. Tracer le segment BC
6. Placer un point E sur le cercle.
7. Avec un rapporteur tracer un angle droit de sommet E et dont les côtés rejoignent le cercle.
8. Nommer F et G les points d'intersection de l'angle avec le cercle.
9. Tracer le segment FG
10. Le centre O du cercle est formé par l'intersection des segments BC et FG.

c. Cercle #3



Propriété utilisée :
#4 – La tangente

Étapes :
1. Placer deux points A et B sur le cercle.
2. À partir du point A, tracer une tangente au cercle.
3. À partir de A, tracer une perpendiculaire à cette tangente.
4. À partir du point B, tracer une tangente au cercle.
5. À partir de B, tracer une perpendiculaire à cette tangente.
6. L'intersection des deux perpendiculaires forme le centre du cercle.

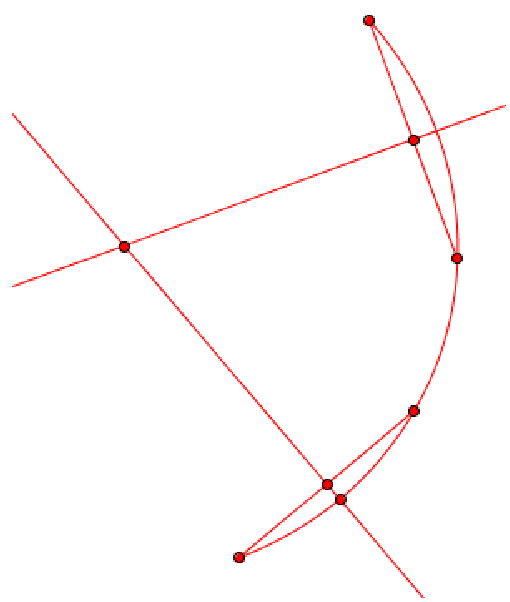
d. Parmi les trois propriétés utilisées, laquelle permettrait de déterminer le centre avec le plus de précision? Laquelle serait la moins précise? Pourquoi?

- La méthode la moins précise est celle de la tangente parce qu'il est difficile de tracer exactement une droite qui ne coupe le cercle qu'en un seul point.
- La méthode la plus précise serait celle de la médiatrice puisqu'il faut mesurer des segments et des angles.

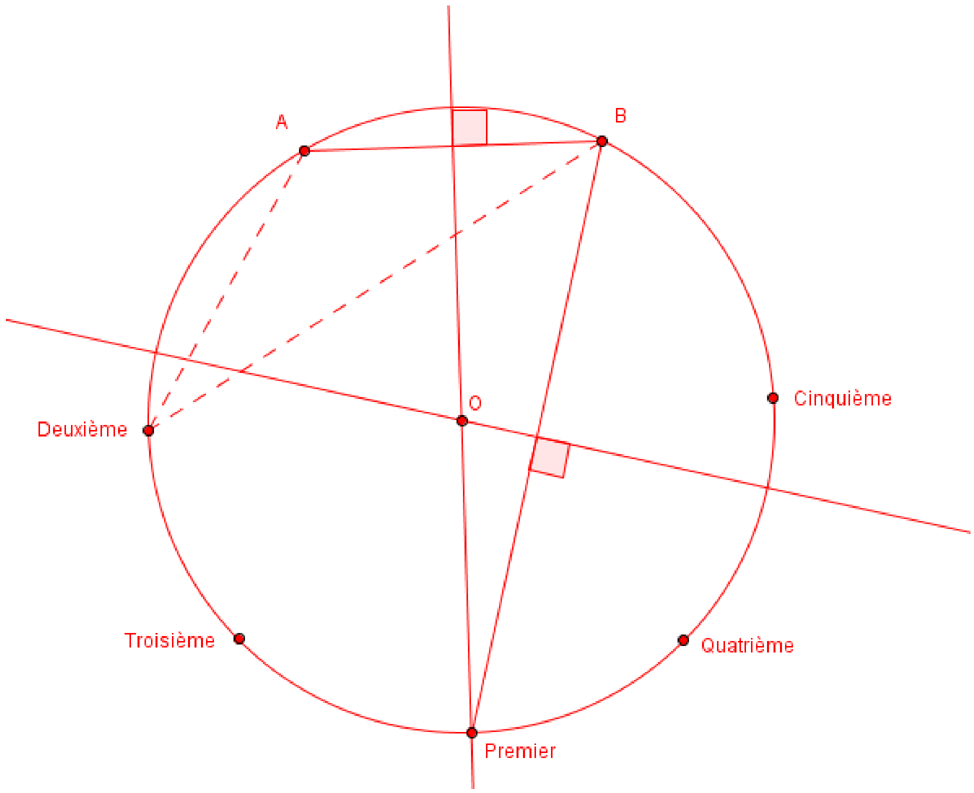
2. Utiliser la propriété qui donne le plus de précision pour répondre à la question suivante. Déterminer, au dixième près, la longueur du rayon du cercle auquel appartient l'arc de cercle suivant. Écrire les étapes.

Tracer deux cordes. Tracer les médiatrices de ces cordes.
Le rayon est formé par :
- d'une part, le point d'intersection des deux médiatrices;
- d'autre part, le point d'intersection d'une médiatrice avec l'arc de cercle.

Le rayon mesure 3,1 cm



3. Nicole fait partie de l'équipe de biathlon. Afin de s'entrainer au tir à la carabine, elle doit effectuer cinq tirs sur une cible AB, tous selon des endroits différents. Elle effectue son premier tir d'un point P où elle a tracé un **X**. En traçant quatre autres **X** sur le diagramme suivant, identifie avec précision quatre autres endroits, à partir desquels Nicole tire sur la cible avec exactement la même facilité que lors de son premier tir.



Pour que Nicole tire sur la cible avec exactement la même facilité que lors du premier tir, il faut qu'elle ait le même angle de visée. Sachant que des angles inscrits sous-tendus par le même arc (et donc la même corde) sont congrus, il s'agit de faire en sorte que la cible soit la corde d'un cercle et que **X** soit le sommet d'un angle inscrit.

Il reste à construire le cercle ayant comme corde la cible, et de placer ensuite quatre points sur le cercle.

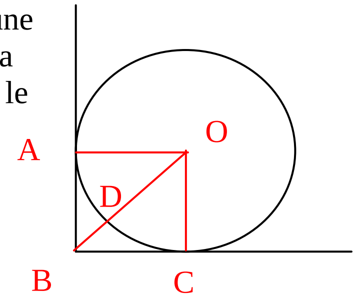
On peut utiliser les propriétés de la médiatrice (comme dans la question1. cercle #1) pour déterminer le centre du cercle. Voici les étapes :

1. Tracer la médiatrice de la corde (cible) AB.
2. Une deuxième corde est nécessaire; tracer le segment BP ou P représente le lieu ou Nicole effectue son premier tir.
3. Tracer la médiatrice de la corde BP.
4. Le centre du cercle, O, est le point d'intersection des deux médiatrices.
5. Tracer le cercle de centre O et de rayon OP. Le cercle devrait passer par A et B.
6. Placer quatre points sur le cercle. Tracer les angles ayant comme sommets ces quatre points.

Il est possible de vérifier que les angles sont identiques en les mesurant avec un rapporteur.

4. L’assiette

Une assiette ronde de diamètre égal à 20 cm est déposée sur une étagère comme le montre le diagramme ci-joint. Déterminer la distance, au dixième près, entre le coin de l’étagère et le bord le plus proche de l’assiette.



O est le centre de l’assiette.
AO et BO sont des rayons perpendiculaires.
Donc le triangle OBC est rectangle.

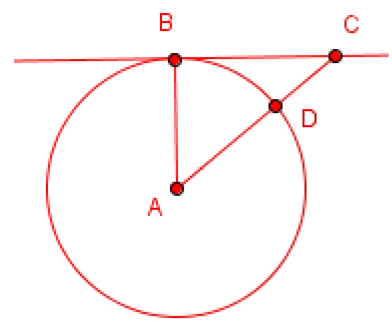
OC = OD = ½ 20 = 10
OC = BC
$OB^2 = BC^2 + OC^2 = 2 \cdot OC^2$
$OB^2 = 2 \cdot 10^2 = 200 \rightarrow OB = 14{,}14$
BD = 14,14 – 10 = 4,1 cm

5. Papa, c'est loin l'horizon ?

Le fils de Gilles est sur une plage de l’océan pacifique, juste au bord de l'eau. La mer est calme et ses yeux sont à 1,65 m du sol. Le rayon de la Terre est environ 6 380 km.

a) A quelle distance se trouve l'horizon au dixième de kilomètre près?

AB = 6 380 000 m
AC = 6 380 000 + 1,65 = 6 380001,65
BC est tangent au cercle; on cherche la longueur de BC
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$6\,380\,001{,}65^2 = 6\,380\,000^2 + BC^2$
$BC^2 = 6\,380\,001{,}65^2 – 6\,380\,000^2 = 21\,054\,003$
$BC = \sqrt{21\,054\,003} = 4\,588{,}5$ m = 4,6 km



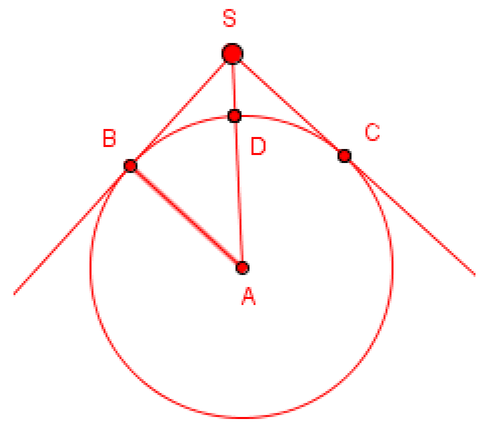
b) Les yeux de Gilles sont à 1,80 m du sol, à quelle distance se trouve maintenant l’horizon à une place décimale près?

Même figure que précédemment, mais cette fois-ci DC = 1,80
Donc AC = 6 380 001,80 m
En utilisant la même formule, on trouve que $BC^2 = 6\,380\,001{,}80^2 – 6\,380\,000^2$
$BC^2 = 22\,968\,003$
$BC = \sqrt{22\,968\,003} = 4\,792{,}5$ m = 4,8 km

c) Le fils de Gilles monte au troisième étage d’un hôtel qui se trouve juste au bord de l’eau. Si ses yeux se trouvent maintenant à 11,65 m du sol, à quelle distance se trouve l’horizon au dixième de kilomètre près?

Même problème que précédemment avec AC = 6 380 011,65
On trouve que BC = 12,2 km

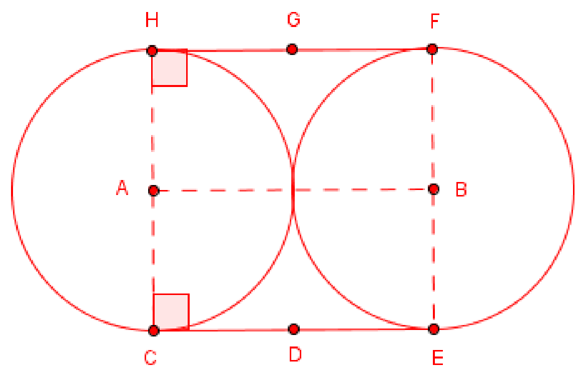
6. Le satellite



Un satellite est en orbite autour de la Terre. Son rayon d'action couvre la Terre du point A au point B comme le montre la figure suivante. Si la distance qui le sépare du point A est de 3 200 km et que le rayon de la Terre est de 6 380 km. Déterminer, au kilomètre près, la hauteur du satellite (distance entre le satellite et un point sur la Terre directement situé en dessous).

On cherche la distance DS. On connait BS, AB et AD. En utilisant le théorème de Pythagore (Tangente perpendiculaire au rayon), on a :
$AS^2 = BS^2 + AB^2$
$AS^2 = 3\,200^2 + 6\,380^2 = 50\,944\,400$
AS = 7 137,5 km
Donc la hauteur du satellite est 7 137,5 – 6 380 = 757,5 km

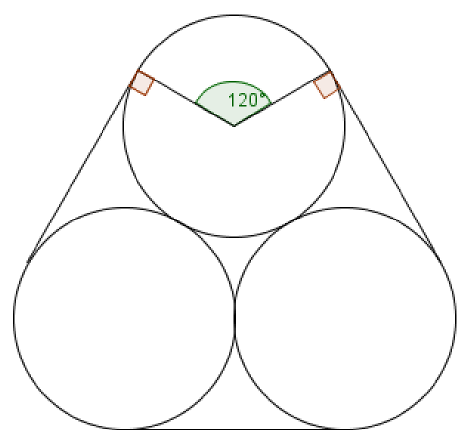
7. Histoires de tuyaux



a. Julie travaille dans une entreprise qui fabrique des gros tuyaux en plastique. Quelle longueur minimale de corde, au dixième de mètre près, est nécessaire pour attacher deux tuyaux ensemble tel que le montre la figure, si chacun des billots a un diamètre de 1,6 m?

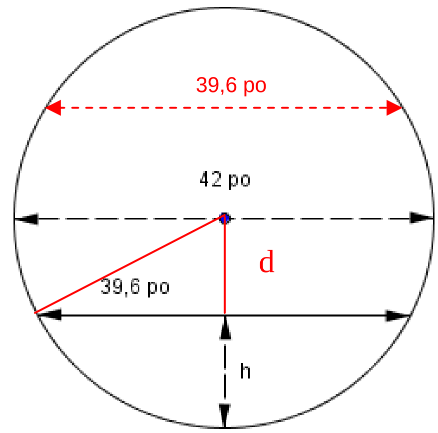
Rayon = ½ 1,6 = 0,8
HF= CE = AB = 2 fois le rayon = diamètre = 1,6
La longueur de la corde est égale à deux demi-circonférences plus HF + CE.
Deux demi-circonférences égalent une circonférence = $2 \cdot \pi \cdot 0{,}8$ = 5,0 m
Longueur = 5,0 + 1,6 + 1,6 = 8,2 m

b. Diane, une collègue de Julie, pense qu'il est préférable d'attacher les tuyaux ensemble par groupe de trois comme le montre la figure. Les tuyaux ont toujours un diamètre de 1,6 m. Déterminer la longueur minimale de corde qu'il faudrait pour attacher les tuyaux.



Déterminer la longueur de 3 arcs de cercle de 120° équivaut à calculer la circonférence d'un seul cercle.
C = $2 \cdot \pi \cdot 0{,}8$ = 5,0 m
Les 3 distances à déterminer correspondent à 3 diamètres
Longueur = 5,0 + 3(1,6) = 9,8 m

8. Un collecteur d'eaux usées a un diamètre de 42 po. Un jour de pluie, l'eau monte dans le tuyau et s'écoule sur une largeur de 39,6 po. Quelles sont, au dixième de pouce près, les deux hauteurs (h) possibles de l'eau dans le collecteur?

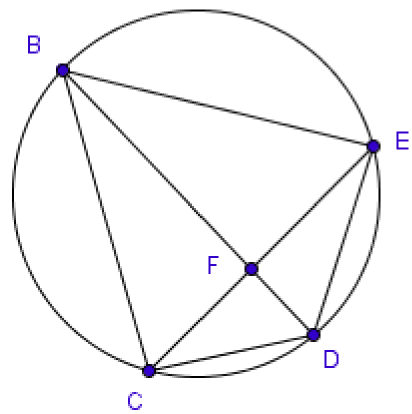


Rayon = 21
En traçant la médiatrice de la corde on obtient un triangle rectangle.
½ corde = 19,8
Si « d » est la distance de la corde jusqu'au centre du cercle, alors en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :
$21^2 = 19{,}8^2 + d^2 \rightarrow d^2 = 441 - 392{,}04$
d = 7,0

L'eau dans le collecteur peut être soit plus basse que le centre soit plus haute que le centre.
La hauteur de l'eau dans le collecteur est :
- 21 – 7 = 14 po
- 21 + 7 = 28 po ou 42 – 14 = 28 po

9. Démontrer, en écrivant une explication pour chaque étape, que les angles du triangle BEF ont les mêmes mesures que les angles du triangle CDF.

Peut-on dire la même chose concernant les angles des triangles BCF et EDF? Pourquoi?



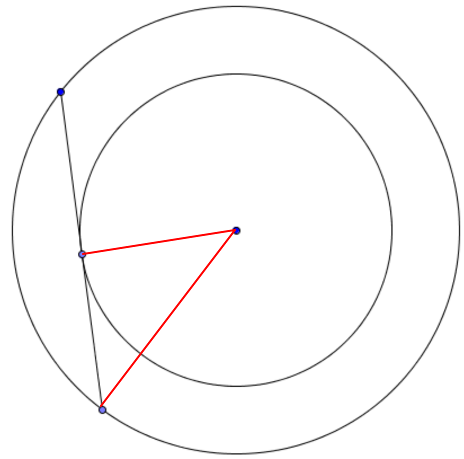
1. $\angle$ DBE = $\angle$ DCE *angles inscrits égaux*
2. $\angle$ BEC = $\angle$ BDC *angles inscrits égaux*
3. $\angle$ BFE = 180° – $\angle$ DBE – $\angle$ BEC *somme des angles d'un triangle*
4. $\angle$ DFC = 180° – $\angle$ DCE – $\angle$ DCE *somme des angles d'un triangle*
5. $\angle$ BFE = $\angle$ DFC substitution

<u>Conclusion</u>
Les angles du triangle BEF ont les mêmes mesures que les angles du triangle CDF

Pour les mêmes raisons que précédemment, les angles des triangles BCF et EDF ont les mêmes mesures.

Question découverte à travailler avec les élèves

10. Soit deux cercles concentriques (cercles qui ont le même centre). Si une corde du plus grand cercle est tangente au plus petit cercle et mesure 10 cm, quelle est l'aire de la surface comprise entre les deux cercles (valeur exacte)?
(Bien qu'il ne soit pas possible de déterminer les valeurs des rayons du grand et du petit cercle, on peut toujours trouver la réponse)



1. Tracer une médiatrice à la corde.
2. La moitié de la corde mesure 5.
3. Étiqueter « r » le rayon du petit cercle et « R », le rayon du grand cercle.
4. Tracer les rayons de telle manière qu'ils forment avec le point de tangence du petit cercle un triangle rectangle.
5. Avec le théorème de Pythagore, on peut écrire : $R^2 = 5^2 + r^2$ ou encore que $25 = R^2 – r^2$
6. Multiplier chaque côté de l'équation par π : $25\pi = \pi(R^2 – r^2)$ ou encore $25\pi = \pi R^2 – \pi r^2$
7. $\pi R^2 – \pi r^2$ correspond à l'aire comprise entre les deux cercles, donc 25π.