

Exercice n° 45 : Suites géométriques

H-1

- Pour chacune des suites données ci-dessous, indique si elle est géométrique, arithmétique ou ni l'une ni l'autre. S'il s'agit d'une suite géométrique, donne la valeur de r (le rapport commun) et s'il s'agit d'une suite arithmétique, donne la valeur de d (la différence commune).
 - 4, 6, 8, 10, ...
 - 3, 6, 12, 24, ...
 - 18, 15, 12, 9, ...
 - 80, 40, 20, 10, ...
 - 1, 4, 9, 16, 25, ...
 - 2, $\sqrt{8}$, 4, $\sqrt{32}$, ...
 - 1, -5, 25, -125, ...
- Soit la fonction exponentielle $f(x) = 3^x$. Trouve $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. De quel type de suite s'agit-il ?
- Donne les trois premiers termes des suites géométriques générées par chacune des fonctions exponentielles suivantes :
 - $f(x) = 2^x$
 - $g(x) = 4^{x-1}$
 - $h(x) = 2 \cdot 3^x$
 - $F(x) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- Donne les fonctions exponentielles qui génèrent chacune des suites géométriques suivantes :
 - 4, 8, 16, 32, ...
 - 6, 18, 54, 162, ...
 - 1, -2, 4, -8, 16, ...
 - 10, 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, ...
- Trouve le 8^e terme de la suite 3, 6, 12, 24, ...
 - Trouve le n^e terme de la suite qui précède.
- Un montant de 10 000 \$ est placé à un taux de 6 % et les intérêts sont capitalisés annuellement.
 - Quelle est la valeur de l'investissement au bout de 1, 2, 3 ans ?
 - Quelle est la valeur de l'investissement au bout de n années ?
 - Combien faudra-t-il d'années pour que la somme investie double ?
- Si a , b , c forment une suite géométrique, montre que $\log a$, $\log b$, and $\log c$ forment une suite arithmétique.
- Quelle est la valeur de $6^{\log_6 17}$?
- Si $0 < k < \pi$, et que $\log(\cos k) = \frac{\log 3 - \log 4}{2}$, trouve la valeur de k .

Suite

Exercice n° 45 : Suites géométriques

H-1

10. Si on lance en même temps deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 8 ?
11. Trouve la valeur de $\csc \theta$ si $\tan \theta > 0$, et que $\cos \theta = -\frac{15}{17}$.
12. Associe chacune des équations de la colonne de gauche avec l'une des figures géométriques de la colonne de droite.
- | | |
|--|---------------|
| a. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ | ellipse |
| b. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ | cercle |
| c. $2x(x + 3) = y$ | parabole |
| d. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ | demi-parabole |
| e. $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ | hyperbole |
| f. $y = \sqrt{x-2}$ | droite |
13. Un sac contient 5 balles blanches et 3 balles noires. On tire deux balles du sac.
- Si la première balle tirée n'est pas remplacée dans le sac avant que l'on tire la seconde balle, quelle est la probabilité d'obtenir une balle blanche et une balle noire ?
 - Si la première balle tirée est remplacée dans le sac avant que l'on tire la seconde balle, quelle est la probabilité d'obtenir une balle blanche et une balle noire ?
14. Un caractère génétique inhabituel peut apparaître chez 0,1 % de la population. La fiabilité du test conçu pour découvrir ce caractère génétique inhabituel est la suivante : si la personne possède ce caractère génétique, le test est positif dans 95 % des cas, mais le test peut aussi être positif dans 2 % des cas où la personne ne possède pas ce caractère génétique.
- Construis un schéma en arbre afin de représenter la population et la fiabilité du test pour ce caractère génétique.
 - Si une personne est choisie au hasard, quelle est la probabilité que son test soit positif ?
 - Si une personne est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait ce caractère génétique et que son test soit positif ?
 - Si une personne est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait le caractère génétique si son test est positif ?

Suite

Exercice n° 45 : Suites géométriques

H-1

15. Prouve l'identité suivante : $\frac{\sin^3 \theta + \csc^3 \theta}{\sin \theta + \csc \theta} = \sin^2 \theta + \cot^2 \theta$

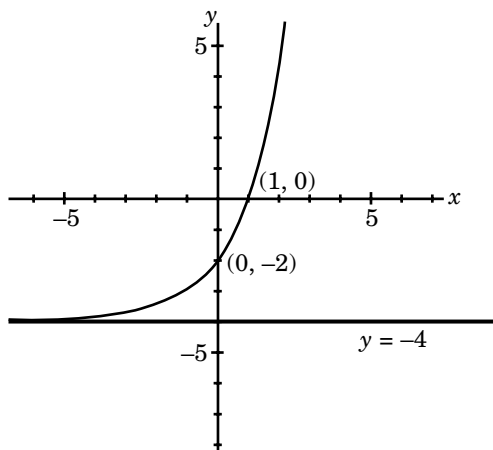
16. Résous l'équation suivante et vérifie ta réponse :

$$\log_7(2x + 2) - \log_7(x - 1) = \log_7(x + 1)$$

17. Trouve la valeur de θ si $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\frac{4 \cos \theta + 1}{2} - \frac{2 \cos \theta - 1}{2} = 1$$

18. Soit la fonction $f(x)$ représentée dans le graphique ci-dessous :



Trouve une équation qui représente la fonction $f(x)$.

19. Vrai ou faux ? (Montre ta preuve!)

$$\log_5 \frac{a}{b^2} = \log_5 a - 2 \log_5 b$$

20. a. Combien peut-on former de bracelets si on place 6 perles de couleurs différentes sur un lacet, alors que l'on possède 10 perles de couleurs différentes ?
- b. Combien peut-on former de bracelets s'il faut utiliser une perle rouge et une perle verte ?

Suite

Exercice n° 46 : Séries géométriques

H-2

1. Pour chacune des expressions suivantes, écris la série sous forme développée et trouve sa somme.

a. $\sum_{k=1}^5 2k$

b. $\sum_{k=1}^4 k^2$

c. $\sum_{k=1}^6 (2k-4)$

d. $\sum_{k=1}^4 2^k$

e. $\sum_{k=2}^5 \frac{8}{2^k}$

2. Formule $\sum_{k=2}^5 12(2)^{k-3}$ et $\sum_{k=1}^4 3(2^k)$ sous forme développée. Que vois-tu ?

3. Écris les séries suivantes en utilisant la notation sigma.

a. $3 + 9 + 27 + 81$

b. $6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$

c. $3 + 6 + 12 + 24 + 48$

d. $-1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36$

4. Examine les séries de la question 1 ci-dessus. Lesquelles sont des séries arithmétiques ? Lesquelles sont des séries géométriques ?

5. Soit la suite 3, 6, 12, 24, ...

a. Trouve le 8^e terme.

b. Trouve la somme de 8 termes.

6. Soit la suite géométrique où $t_1 = 1000$ et $r = 1,05$.

a. Donne les trois premiers termes de la suite.

b. Trouve la somme des 20 premiers termes ; exprime ta réponse à deux décimales près.

7. Trouve la somme des 10 premiers termes de chacune des séries suivantes. Si la réponse n'est pas un nombre entier, exprime-la à deux décimales près.

a. $1 + 2 + 4 + \dots$

b. $128 + 64 + 32 + \dots$

c. $8 + 12 + 18 + 27 + \dots$

d. $24 + 8 + \frac{8}{3} + \dots$

e. $x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

8. Calcule $\sum_{k=3}^{17} 8(1,2)^k$

9. Calcule $\sum_{k=1}^6 \frac{15}{2^k}$

10. Calcule la probabilité :

a. d'obtenir une carte inférieure à 6 en tirant une seule carte d'un jeu de cartes ;

b. d'obtenir une somme de 5 en lançant deux dés une seule fois ;

c. d'obtenir quatre fois "face" en lançant une pièce 4 fois.

Suite

Exercice n° 46 : Séries géométriques

H-2

11. Dans un cours de mathématiques antérieur, tu as appris que la somme d'une série arithmétique est : $S = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$. Utilise cette formule pour trouver
- a. $\sum_{k=1}^{20} (3k + 1)$ b. $\sum_{k=4}^{40} (2k - 6)$
12. Lesquels de ces événements classerais-tu comme indépendants ?
- Lancer un dé et tirer une carte d'un jeu de cartes.
 - Un travailleur est bien formé. Un travailleur satisfait au quota de production.
 - Lancer une pièce deux fois.
 - Tirer deux balles d'un sac contenant 7 balles rouges et 3 balles bleues, si la première balle n'est pas remplacée dans le sac avant que l'on tire la seconde.
13. Trouve la valeur de x : $3(5^{2x-1}) = 75$
14. Trace le graphique de $f(x) = -\log(x - 3)$. Indique le domaine, l'image, les coordonnées à l'origine et les asymptotes de la fonction.
15. Prouve l'identité suivante : $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \sin^2 x + \cos^2 x$
16. Résous l'équation suivante et vérifie ta réponse : $3^{\log_2 4} = x$
17. Un cercle a son centre dans le 1^{er} quadrant et coupe l'axe des x au point $(1, 0)$ et au point $(7, 0)$. Si le centre du cercle se trouve 4 unités au-dessus de l'axe des x , trouve l'équation du cercle.
18. a. Trouve les trois premiers termes de $\left(\frac{1}{2x^2} - 4x^3\right)^8$.
- b. Trouve le premier terme qui n'a pas x dans son dénominateur.
19. À partir d'un jeu de 52 cartes, combien peut-on former de mains de 5 cartes dans lesquelles on aurait une seule paire et trois faces de valeur différente ?
20. Résous l'équation suivante et vérifie ta réponse : $\log(2x + 1) - \log(x + 3) = 0$

Suite

Exercice n° 47 : Séries géométriques infinies

H-3

1. Soit la série $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$
 - a. Trouve le 6^e terme.
 - b. Trouve la somme des 6 termes.
 - c. Trouve, à quatre décimales près, la somme de dix termes.
 - d. Trouve la somme à l'infini.
2. Trouve la somme de chacune des séries géométriques infinies suivantes :

a. $8 + \frac{8}{3} + \frac{8}{9} + \dots$

b. $6 - 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \dots$

c. $6 + 4 + \frac{8}{3} + \dots$

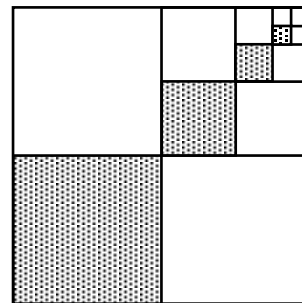
d. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

3. Calcule :

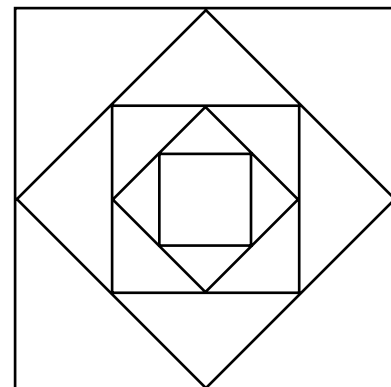
a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{2^k}$

b. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{3^k}$

4. Un carré de 4 par 4 est divisé en quatre carrés congruents. Le carré inférieur gauche est ombragé. Le carré inférieur droit est divisé en quatre carrés congruents, et le carré inférieur gauche est ombragé. Ce processus est répété à l'infini. Quelle est la surface ombragée totale ?



5. Un carré mesure 4 par 4. Les points milieux de ses côtés sont joints par une droite afin de former un nouveau carré. Ce processus est répété à l'infini. Quelle est la somme des périmètres de tous les carrés ?

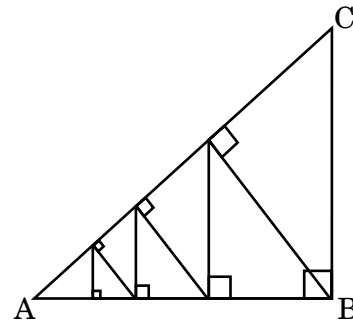


Suite

Exercice n° 47 : Séries géométriques infinies

H-3

6. $\triangle ABC$ est un triangle rectangle où $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, et $BC = 10$. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire à AC. Lorsqu'elle atteint la droite AC, elle tourne et revient à AB en prenant une route perpendiculaire à AB. Elle fait ainsi l'aller-retour entre AB et AC jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?

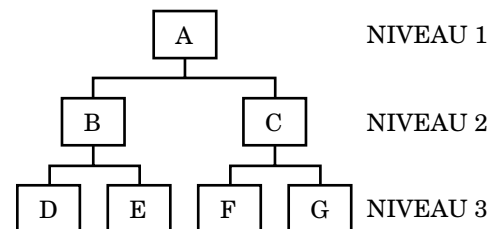


7. Une balle est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute.
- À quelle distance s'élève-t-elle après qu'elle a frappé le sol pour la troisième fois ?
 - Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?
8. Calcule :

a. $\sum_{k=1}^6 2(3^k)$

b. $\sum_{k=2}^{10} 15(1,6)^k$

9. Un organisme met en place une chaîne téléphonique. Chaque employé doit téléphoner à exactement deux autres employés. Combien de niveaux (voir le schéma) faudra-t-il avant de joindre la totalité des 1000 employés ?



10. Si a, b, c , forment une suite arithmétique, prouve que $2^a, 2^b, 2^c$ forment une suite géométrique.
11. Si on tire une seule carte d'un jeu de cartes, quelle est la probabilité d'obtenir un coeur ou une dame ?
12. À l'occasion d'une réception de mariage, cinq hommes placent leur manteau au vestiaire, mais perdent leur billet. Si les manteaux sont remis au hasard, quelle est la probabilité que chacun reçoive son propre manteau ?
13. Trace le graphique de $f(x) = 3(2^{x-2}) - 1$. Indique les coordonnées à l'origine, le domaine et l'image de la fonction.

Suite

Exercice n° 47 : Séries géométriques infinies

H-3

14. Exprime ce qui suit sous forme logarithmique : $81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$
15. Prouve que $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta + \sin^6 \theta + \dots = \tan^2 \theta$
16. Un test comporte 20 questions à choix multiple avec chacune cinq choix de réponse. Si un élève tente de deviner au hasard chaque réponse, quelle est la probabilité qu'il ait 18 bonnes réponses sur 20 ?
17. Résous l'équation suivante et vérifie ta réponse. Exprime ta réponse à une décimale près.
- $$(2^{2x})^3 = 4^{x+3}$$
18. Trouve la valeur de θ si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ - \tan 4\theta = 0$.
19. Complète le carré et trace le graphique de : $x^2 - 9y^2 + 6x = 0$.
20. Résous : $\log_7(x + 1) + \log_7(x - 5) = 1$.