Unité H
Suites géométriques

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- font la distinction entre les suites arithmétiques et géométriques, de façon récursive et explicite;
- font des liens entre les suites géométriques et les fonctions exponentielles;
- dérivent et appliquent les formules du terme général et de la somme à une suite géométrique;
- utilisent la notation sigma;
- estiment les valeurs des expressions à l'intérieur de processus géométriques infinis.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- d'établir des liens entre les fonctions exponentielles et les suites géométriques;
- d'examiner une suite géométrique de façon récursive;
- de trouver une solution algébriquement quand les termes ou les sommes sont posés;
- de trouver la somme de suites géométriques et de séries géométriques infinies;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe H-1) :
- les exposants rationnels et fractionnaires
- les fractions complexes
- la notation fonctionnelle.

Matériel

- outil graphique

Durée

- 7 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d’apprentissage général

Générer et analyser des modèles exponentiels.

Résultat(s) d’apprentissage spécifique(s)

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter les termes généraux d'une croissance géométrique

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental**	Technologie
	✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre les suites arithmétiques et les suites géométriques**

  Dans le cours Mathématiques pré-calcul – Secondaire 2, les élèves ont vu les définitions des suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmétique

Définition récursive : Une suite de nombres telle que chaque terme qui suit le premier est calculé en ajoutant le même nombre (différence commune) au terme précédent.

Définition explicite : Une fonction linéaire dont le domaine appartient à l'ensemble des nombres naturels.

Suite géométrique

Définition récursive : Une suite de nombres telle que chaque terme qui suit le premier est calculé en multipliant le terme précédent par le même nombre (rapport commun).

Définition explicite : Une fonction exponentielle dont le domaine appartient à l'ensemble des nombres naturels.

Exemple

Indique si la suite est géométrique. Si oui, trouve « r », le rapport commun.

a) Division cellulaire : 1, 2, 4, 8, 16, ...

b) Vitesse de fermeture de l'obturateur d'un appareil photo (en secondes) : 4, 2, 1, ½, ¼, ...

c) Croissance d'une population d'insectes : 5, 10, 15, 20, ...

Solution

a) Oui, c'est une suite géométrique où $r = 2$.

b) Oui, c'est une suite géométrique où $r = 2$.

c) Non, ce n'est pas une suite géométrique.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul Mental

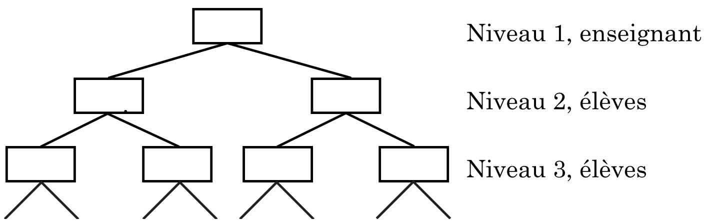
1. Trouve le rapport commun des suites géométriques suivantes :
   a) x^{5a}, x^{3a}, x^{a}, ...
   b) x^6y^3, x^5y^5, x^4y^7, ...

2. Soit une suite géométrique; si $t_1 = 3$ et $r = 2$, trouve t_3.

Problèmes

1. Si –9, x – 1, –1 est une suite géométrique, trouve les valeurs de x.

2. Voici un diagramme en arbre représentant une chaîne téléphonique pour un voyage scolaire.



   a) À quel niveau 64 élèves auront-ils été rejoints?
   b) Combien d'élèves ont été rejoints au 8^e niveau?
   c) À partir du 8e niveau, combien d'élèves, au total, ont été rejoints?
   d) Au ne niveau, combien d'élèves, au total, ont été rejoints?
   e) Si 300 élèves doivent être rejoints au total, à quel niveau auront-ils tous été rejoints?

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– *suite*

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
✔ **Estimation et Calcul Mental** | Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **générer les premiers trois termes d'une suite géométrique**

Exemple

Écris les trois premiers termes de la suite géométrique générée par la fonction exponentielle suivante :

$$t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Solution

n	1	2	3
t_n	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$\therefore\ 1, \frac{1}{9}$ et $\frac{1}{27}$ sont les 3 premiers termes

- **écrire une fonction exponentielle si la suite géométrique est connue**

Exemple

Soit la suite géométrique 3, 6, 12 . . . définis la fonction exponentielle correspondante.

Solution

$t_1 = 4,\ r = 2$

$\therefore\ t_n = 4(2)^{n-1}$

- **examiner une suite géométrique de façon récursive**

Une définition récursive d'une suite est une fonction définie par morceaux dans laquelle chaque terme qui suit les premiers est défini par rapport au terme précédent. Ainsi, les trois premiers termes de la suite 5, 10, 20 sont définis ainsi :

$$\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_n = 2t_{n-1} \end{cases}$$

Cela signifie que $\begin{cases} \text{le premier terme est 5} \\ \text{tout autre terme est le double du terme précédent} \end{cases}$

La suite géométrique 2, –6, 12 peut être représentée de façon récursive comme suit :

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 = -3t_{n-1} \end{cases}$$

Cela signifie que

$\begin{cases} \text{le premier terme est 2} \\ \text{tout autre terme est –3 fois le terme précédent} \end{cases}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscriptions au journal

1. Crée une suite géométrique. Quelle règle as-tu appliquée pour définir ta suite? Quelle est la valeur de r dans ta suite?
2. Crée une suite qui n'est ni géométrique ni arithmétique. Quelle règle as-tu appliquée pour définir ta suite?
3. Soit la fonction exponentielle $S(n) = 10^n$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$ S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique? Explique pourquoi.

Problème

Soit une suite géométrique où $t_2 = 24$ et $t_3 = 12$; quelle est la valeur de t_8?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– suite

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dériver le terme général d'une suite géométrique**

t_1	t_1r	t_1r^2	t_1r^3	. . .	t_1r^{n-1}
premier terme	deuxième terme	troisième terme	quatrième terme		n^e terme

En règle générale, si t_1, t_2, t_3, . . . est une suite géométrique, la fonction exponentielle définitoire est exprimée par la formule suivante :

$t_n = t_1r^{n-1}$,

où le rapport commun est $r = \dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{t_3}{t_2} = \ldots$

$t_n = n^e$ terme

n = position dans la suite

r = raison géométrique

t_1 = premier terme

- **calculer un terme d'une suite sans la développer**

Exemple 1

Écris le dixième terme de la suite 3, –6, 12, . . .

Solution

$$\begin{aligned} t_n &= t_1r^{n-1} \\ t_{10} &= 3(-2)^{10-1} \\ &= 3(-2)^9 \\ &= -1536 \end{aligned}$$

Exemple 2

Insère 4 moyens géométriques entre 81 et $\dfrac{1}{729}$

Solution

Les moyens géométriques sont tous les termes compris entre le premier et le n^e terme d'une suite géométrique.

$t_1 = 81$

$n = 6$

$t_6 = \dfrac{1}{729}$

$r = ?$

$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$\dfrac{1}{729} = 81 \cdot r^5$

$\dfrac{1}{59049} = r^5$

$r = \dfrac{1}{9}$

(Étant donné que le 6^e terme, t_6, est positif, r doit être positif.)

$81, 9, 1, \dfrac{1}{91}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{729}$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Si le moyen géométrique de a et de b est $\sqrt{ab}$, trouve le moyen géométrique de $49x^2$ et $169x^6$.
2. Quelle est la valeur de r dans la suite suivante :

   a) $\ln x, \ln x^2, \ln x^4, \ldots$

   b) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{25},\ 5,\ 5\sqrt[3]{5}$

Inscriptions au journal

1. Peux-tu utiliser le rapport commun géométrique pour écrire une définition récursive d'une suite géométrique? Explique pourquoi.
2. Explique l'effet sur le terme général d'une suite géométrique du doublement de la valeur de r.
3. Explique l'effet sur le terme général d'une suite géométrique du doublement de la valeur de t_1.

Problèmes

1. Dans une suite géométrique, le quatrième terme est $\frac{1}{4}$ et le onzième terme est 32. Calcule la somme des premiers onze termes.
2. Si 3 est la moyenne arithmétique de « p » et « q »; calcule le ou les moyen(s) géométrique(s) de 2^p et de 2^q.
3. Explique pourquoi ce qui suit est une suite géométrique :

   $\log x, \log x^2, \log x^4$, où $x > 0$
4. Soit la suite géométrique $\operatorname{cosec}\theta - 1$, x, $\operatorname{cosec}\theta + 1$; démontre qu'une expression possible du moyen géométrique, x, est $\cot\theta$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-1 dériver et appliquer des expressions pour représenter des termes généraux de croissance géométrique
– *suite*

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **calculer un terme d'une suite sans la développer (suite)**

Exemple 3

Soit la suite géométrique où $t_1 = 1728$ et $r = \frac{1}{2}$; quel terme a une valeur de 27?

Solution

$$t_n = t_1 \cdot t^{n-1}$$
$$27 = 1728 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{27}{1728} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$6 = n - 1$$
$$n = 7$$

$\therefore$ 27 est le septième terme (t_7)

Exemple 4

Si le quatrième terme d'une suite géométrique est 2 et le neuvième terme 64, écris la fonction exponentielle définitoire.

Solution

Construis deux équations simultanées à partir des données suivantes :

$$\frac{t_1 r^8}{t_1 r^3} = \frac{64}{2}$$
$$r^5 = 32$$
$$r = 2$$

$$t_1 r^3 = 2$$
$$t_1 (2)^3 = 2$$
$$t_1 \cdot 8 = 2$$
$$t_1 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$

$$t_n = \frac{1}{4}(2)^{n-1}$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Si le premier terme d'une suite géométrique est $\frac{1}{3}$ et si le rapport commun est –3, trouve les 3 termes suivants.

Problèmes

1. Suppose qu'un capital de C dollars est investi à un taux d'intérêt annuel de *i*, composé annuellement. Le montant VF après *n* années est exprimé par $VF = C(1 + i)^n$.
   a) Trouve combien il faudra d'années avant que le montant double si 2 000 $ sont investis à un taux de 7,5 % composé annuellement.
   b) Si le taux d'intérêt annuel est 7,25 %, composé 2 fois par année, quel serait l'effet sur la période de doublement?
   c) Quelle serait la période de doublement du montant si le taux d'intérêt annuel est 7 %, composé quotidiennement?
2. Le premier triangle d'une séquence de triangles a ses sommets à (0, 16), (4, 0), et (–4, 0). Les coordonnées de chaque triangle subséquent équivalent à la moitié des coordonnées du triangle précédent. Trouve la somme des aires des cinq premiers triangles.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 résoudre des problèmes qui mettent en cause des séries géométriques finies

Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **faire la distinction entre une suite géométrique et une série géométrique**

  Une ***suite géométrique*** est l'image d'une fonction exponentielle dont le domaine est l'ensemble des nombres naturels. Ainsi, 1, 2, 4, . . . est une suite géométrique.

  Une ***série géométrique*** est la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi, 1 + 2 + 4 + . . . est une série géométrique. La somme est représentée par S_n.

- **trouver la somme d'une série géométrique**

  La lettre grecque Σ(sigma) est utilisée pour représenter la somme.

  La somme des premiers n termes de la suite $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ est définie comme suit :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

Le symbole $\sum_{i=1}^{n} t_i$ est appelé la ***notation sigma***. La série $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n$ est la ***forme développée*** de la notation sigma.

Exemple 1

Écris l'expression suivante sous sa forme développée $\sum_{k=1}^{5} 2^k$.

Solution

$$\sum_{k=1}^{5} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

Exemple 2

Écris l'expression en notation sigma : 3 + 6 + 9 + 12 + 15.

Solution

$$\sum_{k=1}^{5} 3k$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Trouve la valeur de $\sum_{i=0}^{3} 2^i$.

Problème

Exprime 8 + 27 + 64 + 125 en notation sigma.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-2 résoudre des problèmes qui mettent en cause des séries géométriques finies
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **développer la formule de la somme d'une série géométrique finie**

Théorème

La somme de n premiers termes d'une série géométrique est :

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}\text{, si } r \neq 1$$

Preuve :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

$$S_n = t_1 + t_1r + t_1r^2 + \ldots + t_1r^{n-2} + t_1r^{n-1} \quad \text{peut être écrit comme}$$

$$\underline{rS_n = t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + \ldots + t_1r^{n-1} + t_1r^n} \quad \text{multiplie par } r$$

$$S_n - rS_n = t_1 - t_1r^n \quad \text{qui donne}$$

$$S_n(1-r) = t_1(1-r^n) \quad \text{soustraire pour obtenir}$$

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{si } r \neq 1$$

Exemple

Trouve S_6 de 81 – 27 + 9 . . .

Solution

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \qquad t_1 = 81,\ r = -\frac{1}{3},\ n = 6$$

$$S_6 = \frac{81\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{81\left(-\frac{1}{729}\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{182}{3}$$

Communications | ✔ **Liens** | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $m > 1$, la suite $\log m^4$, $\log m^7$, $\log m^{10}$ est :

a) une suite géométrique dont le rapport commun est 3 log m;

b) une suite géométrique dont le rapport commun est log (3m);

c) une suite arithmétique dont la différence commune est 3 log m;

d) une suite arithmétique dont la différence commune est log (3m).

Problème

a) Quelle est la somme des entiers de 1 à 5 000 inclusivement?

b) Quelle est la somme de tous les multiples de 7 entre 1 et 5 000?

c) Quelle est la somme de tous les entiers entre 1 et 5 000 qui ne sont pas des multiples de 7?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 appliquer des processus géométriques infinis pour résoudre des problèmes

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver la somme d'une série géométrique infinie**

Si $|r| < 1$, la série géométrique infinie

$t_1 + t_1r + t_1r^2 + \ ...\ + t_1r^n + \ldots$ converge vers la somme $S = \dfrac{t_1}{1-r}$

Si $|r| \geq 1$ et $t_1 \neq 0$, alors la série est divergente

Exemple 1

Trouve la somme de la série infinie $2 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{25} + \ldots.$

Solution

$t_1 = 2,\ r = \dfrac{1}{5}$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{t_1}{1-r}\\
&= \frac{2}{1-\frac{1}{5}}\\
&= 2 \cdot \frac{5}{4}\\
&= \frac{5}{2}\\
&= 2{,}5
\end{aligned}
$$

Exemple 2

Si la somme à l'infini d'une suite géométrique convergente est 16 et si le rapport commun est $\dfrac{1}{2}$, trouve la valeur du premier terme de la suite.

Solution

$S = 16,\ r = \dfrac{1}{2}$

$$S = \frac{t_1}{1-r}$$

$$16 = \frac{t_1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$8 = t_1$$

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Dans $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{3^k}$, trouve

a) t_1 b) r c) somme

Inscriptions au journal

1. Explique pourquoi la valeur absolue de r doit être inférieure à 1 pour que la somme d'une série géométrique infinie soit convergente.
2. Quelle est la différence entre le graphique d'une série infinie convergente et le graphique d'une série infinie non convergente?
3. Pourquoi r^n s'approche-t-il de 0 quand n augmente si $|r| < 1$?

Problèmes

1. La somme des termes d'une suite géométrique infinie est 4 et la somme des cubes des termes est 192. Trouve les trois premiers termes.
2. La période de doublement de la valeur d'un investissement peut être estimée à l'aide de la règle de 72, qui énonce que $n = \frac{72}{i}$.
   a) Compare la période de doublement d'une somme obtenue avec la règle de 72 et la période de doublement exacte si on considère les taux d'intérêt suivants :
      - 4 % par année, composé annuellement
      - 8 % par année, composé annuellement
      - 24 % par année, composé annuellement

   b) Quelle conclusion générale peux-tu tirer sur la précision des calculs effectués avec la règle de 72?
3. Une somme est placée à un taux de 12 % composé 2 fois par année. Si le placement a une valeur de 8 200 $ après 6 années, quelle somme d'argent a été investie?
4. Évalue $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$
5. Un ballon extraordinaire fabriqué dans une centrale nucléaire à Pinawa rebondit à 90 % de la hauteur de lancement. Si le ballon est lancé à 200 cm de hauteur, trouve la distance totale parcourue par le ballon avant qu'il revienne au repos.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

H-3 appliquer des processus géométriques infinis pour résoudre des problèmes - suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **trouver la somme d'une série géométrique infinie (suite)**

Exemple 3

Un ballon est lancé d'une hauteur de 2 mètres. Chaque fois qu'il touche le sol, il rebondit à une hauteur qui correspond aux trois quarts de la distance parcourue en tombant.

a) À quelle hauteur rebondit-il après avoir touché le sol la troisième fois?

b) À quelle hauteur rebondit-il avant de rester au repos?

Solution

a) Premier bond = $2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$; deuxième bond $=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}$;

troisième bond = $\frac{9}{8}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{32}$.

b) La série de la distance totale vers le bas est :

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{9}+\ldots=\frac{t_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}}=8.$$

La distance totale vers le haut = distance vers le bas – hauteur du lancer original = 8 – 2 = 6.

La distance parcourue est 8 + 6 = 14 mètres.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ Raisonnement
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

1. On extrait 25 000 barils de pétrole d'un puits durant le premier mois de production. Si la production chute ensuite de 5 % par mois, estime la production totale avant que le puits ne soit complètement à sec.