

Exercice d'algèbre

• multiplication de polynômes

Les élèves devraient être à même de multiplier deux binômes sans effectuer d'étapes intermédiaires.

Exemple

Multiplie et regroupe les termes semblables :

a) $(x + 2)(x - 1)$

b) $(x + 3)(x - 3)$

c) $(x + 4)(x + 4)$

d) $(x - 9)^2$

Solutions

a) $x^2 + x - 2$

b) $x^2 - 9$

c) $x^2 + 8x + 16$

d) $x^2 - 18x + 81$

• décomposer en facteurs des trinômes qui sont des carrés parfaits

Exemple

Décompose entièrement en facteurs les expressions suivantes :

a) $x^2 - 2x + 1$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

Solution

a) $(x - 1)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x - \sqrt{2})^2$

• compléter le carré

Exemple

Pour quelles valeurs de k le trinôme sera-t-il un carré parfait?

a) $x^2 - 10x + k$

b) $x^2 + 12x + k$

c) $x^2 + 3x + k$

Solution

a) 25

b) 36

c) $\frac{9}{4}$

Développement du concept selon Frayer Annexe E-2

| Caractéristiques | | |
|---|--|---|
| <p align="center">Caractéristiques essentielles Toujours</p> <ul style="list-style-type: none"> • il s'agit d'une sélection de nombres pour laquelle l'ordre est <i>important</i> • les objets sont classés dans un <i>certain ordre</i> ou dans une rangée | <p align="center">Caractéristiques non essentielles Parfois</p> <ul style="list-style-type: none"> • permutations avec des restrictions • permutations avec des répétitions et des restrictions • permutations circulaires • notation factorielle | <p align="center">Caractéristiques non pertinentes Jamais</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'ordre n'intervient pas • ce n'est pas une combinaison |
| <p>Sujet - Concept</p> <h2 style="margin: 0;">Permutations</h2> | | |
| <p align="center">Exemples</p> <p>On doit placer huit garçons dans une rangée. Deux garçons particulièrement difficiles n'ont pas la permission de s'asseoir ensemble, ou ils peuvent s'asseoir à l'une des extrémités de la rangée. De combien de façons peut-on les placer?</p> <p>1. $\underline{6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5} = 6 \cdot 5 \cdot 6! = 21\ 600$</p> <p style="margin-left: 20px;">Deux autres garçons S'assoient ensemble que les garçons difficiles (les autres garçons)</p> <p>2. Grouper les garçons ensemble : $6! \cdot 5 \cdot 2 = 7200$</p> <p>Ils peuvent s'asseoir à cinq autres places (pas un à côté de l'autre), et il faut multiplier par deux parce qu'ils peuvent échanger leur place.</p> <p>3. $21\ 600 - 7200 = 14\ 400$</p> | <p align="center">Exemple non pertinent</p> <p>Un groupe de 15 chasseurs de trésors arrivent dans une clairière dans la forêt, où ils voient cinq sorties. On décide que sept iront à gauche, quatre sortiront par le centre et les autres iront par la droite. De combien de façons cela peut-il être réalisé?</p> <p align="center">${}_{15}C_7 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 = 45\ 045$</p> | |
| <p align="center">Faire un dessin ou un diagramme en arbre</p> <p>${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$: « n » objets pris « r » à la fois</p> <p>« $n!$ » est un entier positif appelé « factorielle n »</p> | | |
| <p>$\frac{{}_n P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ Permutations circulaires</p> | | |
| <p>$\frac{n!}{j!k!! \dots}$ Permutations comprenant des répétitions</p> | | |
| <p>Définition</p> <p>Arrangement d'un ensemble d'objets dans un ordre particulier. Pour n objets, le nombre de permutations est ($n!$). Si « r » objets doivent être choisis parmi un ensemble de « n » objets au total, le nombre de permutations est calculé selon la formule $\frac{n!}{(n-r)!} = {}_n P_r$</p> | | |

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Développement du concept selon Frayer

Annexe E-3

| Caractéristiques | | |
|---|---|---|
| <p style="text-align: center;">Caractéristiques essentielles Toujours</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'ordre est toujours important • selon la formule ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ | <p style="text-align: center;">Caractéristiques non essentielles Parfois</p> <ul style="list-style-type: none"> • peuvent être disposées en rangée ou en cercle • les principes de l'addition ou de la multiplication peuvent s'appliquer | <p style="text-align: center;">Caractéristiques non pertinentes Jamais</p> <ul style="list-style-type: none"> • on ne peut remplacer des combinaisons par des permutations |
| <p style="text-align: center;">Sujet - Concept</p> <h1 style="text-align: center; margin: 0;">Permutations</h1> | | |
| <p style="text-align: center;">Exemples</p> <p>Combien de « mots » de quatre lettres peut-on former avec les lettres du mot DIMANCHE?</p> <p>Solution $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ ways</p> <p>Processus Pour former des mots de quatre lettres, tu dois insérer des espaces vides. Le mot <i>dimanche</i> comprenant huit lettres, tu peux placer huit lettres dans le premier espace. Il reste sept lettres pour le deuxième espace, six pour l'espace suivant et cinq pour le dernier. Il s'agit d'une permutation parce que l'ordre est important.</p> | <p style="text-align: center;">Exemple non pertinent</p> <p>Quand tu joues à la Loto 6-49, tu peux choisir 6 nombres de 1 à 49. De combien de façons peux-tu faire ce choix?</p> <p>Solution ${}_{49}C_6 = 13\,938\,816$ façons</p> <p>Processus Utilise la calculatrice pour trouver la réponse. Cet exemple n'est pas pertinent parce qu'il illustre une combinaison; l'ordre n'intervenant pas dans le choix des six chiffres, ce n'est pas une permutation.</p> | |
| <p style="text-align: center;">Trace un dessin ou un diagramme en arbre</p> <p>À partir de l'aéroport international de Vancouver, quatre corridors aériens mènent à Calgary, deux corridors mènent de Calgary à Brandon, et un corridor mène de Brandon à Saskatoon. Combien de corridors aériens différents conduisent de Vancouver à Saskatoon?</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph LR Vancouver --> C1 Vancouver --> C2 Vancouver --> C3 Vancouver --> C4 C1 --> B1 C1 --> B2 C2 --> B3 C2 --> B4 C3 --> B5 C3 --> B6 C4 --> B7 C4 --> B8 B1 --> S1 B2 --> S2 B3 --> S3 B4 --> S4 B5 --> S5 B6 --> S6 B7 --> S7 B8 --> S8 </pre> </div> <p>Dénombrer les routes qui mènent à Saskatoon pour trouver la réponse.</p> | | |
| <p>Définition</p> <p>Une permutation est un arrangement ordonné d'objets distincts, en rangée ou en cercle.</p> | | |

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-4

| | |
|--|--|
| <p>À quoi ça ressemble?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Les combinaisons sont comme le théorème du binôme, qui utilise des combinaisons. ➤ Le théorème du binôme utilise l'équation $(r + 1)^e$ terme = ${}_n C_r a^{n-r} b^r$ pour obtenir le n^e terme du développement d'un binôme. | <p>À quoi ça ne ressemble pas?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Les combinaisons ne sont pas des permutations. ➤ Dans les permutations, l'ordre est important et les problèmes ont plus de résultats possibles. |
| <h3 style="margin: 0;">Combinaisons</h3> | |
| <p>Caractéristiques</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Le nombre de combinaisons est donné par l'équation ${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ➤ n représente le nombre d'objets parmi lesquels on fait un choix ➤ r représente le nombre d'objets choisis | |
| <p>Exemple</p> <p>Un club de placement compte quatre membres féminins et six membres masculins. Un comité de recherche composé de trois personnes doit être formé. De combien de façons peux-tu y arriver si :</p> <ol style="list-style-type: none"> a) le comité doit compter deux femmes et un homme; b) il doit y avoir au moins une femme dans le comité; c) les trois membres doivent être du même sexe. <p>Solutions et Processus</p> <p>a) $({}_4 C_2 \cdot {}_6 C_1) = 36$ façons</p> <ul style="list-style-type: none"> — Utilise la formule ${}_n C_r$. — ${}_4 C_2$ représente la sélection de deux femmes parmi un total de cinq, et ${}_6 C_1$ représente la sélection d'un homme parmi un total de six. — Les deux événements doivent se produire en même temps, ce qui t'oblige à les multiplier ensemble selon le principe du dénombrement factoriel. <p>b) $({}_4 C_1 \cdot {}_6 C_2) + ({}_4 C_2 \cdot {}_6 C_1) + ({}_4 C_3 \cdot {}_6 C_0) = 100$ façons</p> <ul style="list-style-type: none"> — Il y a trois scénarios possibles : 1 femme, 2 hommes 2 femmes, 1 homme 3 femmes, 0 homme — Dans chaque scénario, applique la formule ${}_n C_r$ comme tu l'as fait dans la partie (a), puis additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent. <p>c) $({}_4 C_3 \cdot {}_6 C_0) + ({}_6 C_3 \cdot {}_4 C_0) = 24$ façons</p> <ul style="list-style-type: none"> — Il y a deux scénarios possibles : 2 femmes, 0 homme 0 femme, 3 hommes — Applique la formule ${}_n C_r$ pour chaque scénario et additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent. | |
| <p>Définition</p> <p>Une combinaison est une sélection parmi un certain nombre d'objets, dans laquelle <i>l'ordre n'intervient pas</i>.</p> | <p>Questions pratiques</p> <p>Exercice 33, N^{os} 1–11 Exercice 34, N^{os} 1–5</p> |

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-5

| | |
|--|--|
| <p>À quoi ça ressemble?</p> <p>➤ Semblables à des permutations</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>➤ Ils semblent différents, mais on a tout simplement avancé chaque lettre d'un espace (chacune des quatre lettres occupe la même position par rapport aux autres).</p> | <p>À quoi ça ne ressemble pas?</p> <p>➤ Elles sont différentes des permutations parce que, dans les permutations circulaires, l'ordre est important (l'arrangement des objets autour du cercle influe sur le nombre possible d'arrangements).</p> |
| <h3>Permutations circulaires</h3> | |
| <p>Caractéristiques</p> <p>➤ une permutation circulaire de n éléments peut être calculée à l'aide de la formule : $\frac{n!}{n} = (n-1)!$</p> <p>(p.ex., 10 personnes peuvent être assises de $(10-1)! = 362\,880$ façons autour d'une table).</p> | <p>Illustration</p> <div style="text-align: center;"> </div> |
| <p>Exemple 1</p> <p>De combien de façons les douze chevaliers du roi Arthur peuvent-ils être placés autour de la table ronde?</p> <p>Solution</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>$(12-1)!$ ou $11!$ façons = 39 916 800 façons</p> <p>Processus</p> <ol style="list-style-type: none"> Commence par insérer un espace autour de la « table » — la position fixe — où tu peux placer un seul objet. Remplis tous les autres espaces en appliquant la formule de la permutation régulière. | <p>Exemple 2</p> <p>De combien de façons quatre perles de couleurs différentes peuvent-elles être arrangées pour créer un bracelet.</p> <p>Solution</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>$(4-1)! = 6$ façons $6 \div 2 = 3$ bracelets</p> <p>Processus</p> <ol style="list-style-type: none"> Dispose les perles en cercle et, au moyen de permutations circulaires, calcule le nombre de bracelets possibles. Divise par deux parce que le bracelet serait le même si les perles étaient placées dans l'ordre inverse. |
| <p>Définition</p> <p>Les permutations circulaires sont effectués sur des objets placés en cercle (non linéaires).</p> | <p>Questions pratiques</p> <p>Exercice 31, n^{os} 1(a), 2 Exercice 32, n^o 4</p> |

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n^o 27.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-6

| Théorème du binôme | |
|--|---|
| <p>Caractéristiques</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ utilise la formule : ${}_n C_r a^{n-r} b^r$ ➤ utilise les combinaisons ➤ n est un nombre entier positif ➤ x et y sont deux nombres quelconques ➤ r doit être égal au n^{e} terme -1 | <p>Illustration</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> $\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & & & 1 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & 10 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 10 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & \text{etc} & \end{array}$ </div> <p>Le triangle de Pascal suit un modèle similaire au modèle du théorème du binôme.</p> |
| <p>Exemple 1</p> <p>Trouve le terme qui contient x^{20} dans $(2x - x^4)^{14}$.</p> <p>Solution</p> <p>$r = 0, n = 14, a = 2x, b = -x^4$</p> <p>Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le premier terme.</p> <p>1^{er} terme $(0 + 1) = {}_{14}C_0(2x)^{14}(-x^4)^0$</p> $= 1(16384x^{14})1$ $= 16384x^{14}$ <p>$r = 1, n = 14, a = 2x, b = -x^4$</p> <p>Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le deuxième terme.</p> <p>2^e terme $(1 + 1) = {}_{14}C_1(2x)^{13}(-x^4)^1$</p> $= 14(8192x^{13})(-x^4)$ $= -114688x^{17}$ <p>Compare les exposants de x dans les deux premiers termes. Tu constateras qu'ils augmentent de 3. Par conséquent, le troisième terme contiendra l'expression x^{20}.</p> <p>$r = 2, n = 14, a = 2x, b = -x^4$</p> <p>Insère les nombres dans l'équation et simplifie pour obtenir le troisième terme.</p> <p>3^e terme $(2 + 1) = {}_{14}C_2(2x)^{12}(-x^4)^2$</p> $= 91(4096x^{12})(x^8)$ $= 372\,736x^{20}$ | <p>Exemple 2</p> <p>Trouve le dixième terme dans le développement de $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^{12}$.</p> <p>Solution</p> <p>$r = 9, n = 12, a = x, b = -\frac{1}{2}y$</p> <p>Insère les nombres dans l'équation.</p> $(9 + 1) = {}_{12}C_9 x^3 \left(-\frac{1}{2}y\right)^9$ <p>Simplifie l'équation.</p> $(9 + 1) = 220x^3 \left(-\frac{1}{512}y^9\right)$ <p>Multiplie les termes ensemble pour obtenir le dixième terme.</p> $(9 + 1) = \frac{-220x^3y^9}{512}$ |
| <p>Définition</p> <p>Le théorème du binôme permet de trouver le n^{e} terme du développement d'un binôme quelconque quelle que soit sa puissance.</p> | <p>Questions pratiques</p> <p>Exercice 34, n^{os} 6–12</p> <p>Exercice 35, n^{os} 1–7</p> |

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec la permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n^o 27.