Annexe D-1

Exercice d'algèbre

- **simplifier des exposants rationnels et fractionnaires**

  Les élèves devraient être en mesure de simplifier des expressions qui comprennent des exposants rationnels et fractionnaires dont les dénominateurs sont inférieurs ou égaux à 5.

  Exemple

  Évalue :

  a) 2^{-2}

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

  c) $8^{\frac{2}{3}}$

  d) $27^{\frac{-4}{3}}$

  e) $32^{\frac{3}{5}}$

  Solutions

  a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

  b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

  c) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

  d) $27^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

  e) $32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

- **utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions**

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x},\ h(x) = \sqrt{3x},$ trouve les réponses suivantes :

a) $f(4)$

b) $g(-2)$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

d) $h(3)$

e) $g(h(27))$

f) $g(f(0))$

Solutions

a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$

b) $g(-2) = \dfrac{1}{-2}$

c) $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$

e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \dfrac{1}{9}$

f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \dfrac{1}{2}$

Vue d'ensemble du concept

Annexe D-2

Concept

Logarithmes naturels

Caractéristiques

- les logarithmes de base « e » sont appelés des *logarithmes naturels* (ou *népériens*)
- ils sont similaires aux logarithmes décimaux
- $e^{\ln u} = u$ et $\ln e^{u} = u$, alors $\ln e = 1$

Exemples

Simplifie :

$$e^{6+5\ \ln t}$$
$$= e^{6} \cdot e^{5\ \ln t}$$
$$= e^{6} \cdot t^{5}$$
$$= e^{6}t^{5}$$

À quoi ça ressemble?

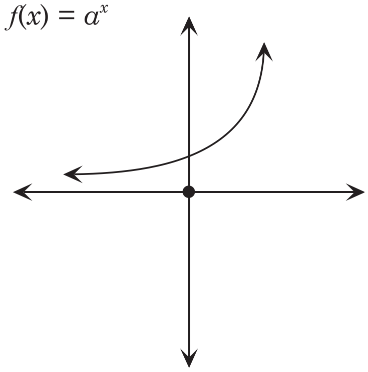
- Ça ressemble à un logarithme décimal dont il faut résoudre l'équation logarithmique.

À quoi ça ne ressemble pas?

- Un logarithme naturel ne ressemble pas à une transformation parce que les règles de résolution sont différentes.

Peux-tu l'illustrer?

$f(x) = a^{x}$



- Le graphique illustré ci-dessus découle de la fonction de base $f(x) = a^{x}$. Cela représente la fonction exponentielle.

Définition

Un logarithme naturel est un logarithme élémentaire de base « e ».
$e^{\ln u} = u$ et $\ln e^{u} = u$ (alors $\ln e = 1$). Tu peux utiliser cette règle de base pour résoudre l'équation.

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley, nº 27.

Mise en correspondance

Annexe D-3

Application des logarithmes

Intérêts composés

On les calcule annuellement (1 fois par année), trimestriellement (4 fois par année), mensuellement)12 fois par année) ou hebdomadairement (52 fois par année).

Formule: $VF = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt}$

VF = valeur finale
k = nombre de paiements ou de calculs par année
C = placement
i = taux (d'intérêt en %)
t = temps

Désintégration radioactive

On calcule la quantité résiduelle d'une substance en désintégration après une période de temps donnée.

Formule: $y = Ae^{kx}$ ou $y = y_0e^{-kt}$

y = masse de matière au moment « t »
y_0 = masse originale quand $t = 0$
t = temps; k est une constante
e = la constante naturelle (2,71828)

Exemples

Un compte d'épargne rapporte un taux d'intérêt de 6 %, composé trimestriellement.

a) Si le compte contient 5 000 $ actuellement, combien d'argent contiendra-t-il dans 5 ans?

$$\begin{aligned} VF &= C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt} \\ &= 5000\ \$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{(4)(5)} \\ &= 6734{,}28\ \$ \end{aligned}$$

b) Combien de temps faudra-t-il pour que le montant original double ?

$$\begin{aligned} 10\ 000\ \$ &= 5000\ \$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4t} \\ 2 &= (1{,}015)^{4t} \\ \log 2 &= t(4\log(1{,}015)) \\ \frac{\log 2}{4\log(1{,}015)} &= t \\ 11{,}64 \text{ années} &= t \end{aligned}$$

a) En utilisant la formule des intérêts composés, remplace les valeurs données, soit P = 5 000 $, i = 0,06 et n = 4, t = 5. Effectue les calculs pour trouver le montant que contiendra le compte après 5 ans.

b) Remplace les valeurs connues dans l'équation. Simplifie l'équation. Prends le logarithmes des deux membres pour trouver la valeur de « t ». En appliquant la règle du logarithme aux exposants, place le 4 de « t » devant le logarithme. Isole t dans l'équation. Effectue les calculs et utilise les unités appropriées (ici, les années).

Annexe D-4

Mise en correspondance

Logarithmes

Logarithmes décimaux

Exposants

- une équation qui contient une inconnue en exposant est appelée une équation exponentielle, soit $y = 2^{x+1}$

Lois des exposants

1. $\frac{1}{x} = x^{-1}$
2. $(x^m)^n = x^{mn}$
3. $x^m x^n = x^{m+n}$
4. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
5. $\left(\frac{x}{m}\right)^n = \frac{x^n}{m^n}$

Exemple

Trouve la valeur de x :

$$5^{3(x-2)} = 125$$

- exprime les deux côtés dans le même système de base

$$5^{3(x-2)} = 5^3$$

- met les exposants en équation

$$3(x-2) = 3$$
$$3x - 6 = 3$$
$$3x = 9$$
$$x = 9$$

Logs

- une équation qui contient une inconnue sous la forme d'un logarithme
- la réciproque de l'équation exponentielle,soit $\log_2 x = 4$

Propriétés des logarithmes

1. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$
2. $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
3. $\log_b N^y = y \log_b N$
4. $\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$

Exemple

Trouve la valeur de x puis vérifie :

$$\log_5(2x - 3) = 2$$

- reformule l'équation sous forme exponentielle

$$5^2 = 2x - 3$$

- trouve la valeur de x

$$25 = 2x - 3$$
$$28 = 2x$$
$$14 = x$$

- vérifie : $\log_5(2x-3) = 2$

$$\log_5(2(14)-3) = 2$$
$$\log_5(25) = 2$$

- nous savons que c'est correct

Logarithmes naturels

Logarithmes

- les logarithmes naturels de base « e », soit $\ln_e x = \ln x$
- $y = \ln x$ seulement si $e^y = x$ pour $x > 0$

Règles des logarithmes naturels

$\ln e^u = u$ pour $u \in \Re$

Quand on trace le graphique, les logarithmes naturels sont la réciproque de $y = e^x$.

Exemple de base

Simplifie

$\ln e^{x^2+3x}$

$= x^2 + 3x$

Nous savons que $\ln e^u = u$ alors

$\ln e^{x^2+3x} = x^2 + 3x$.

Exposants

- la valeur de « e » est 2,71828
- "e" est la valeur obtenue quand la pente de la tangente au graphique d'une fonction exponentielle est 1

Règles des exposants naturels

$e^{\ln u} = u$ pour $u > 0$

$\ln e = 1$

Exemple de base

Simplifie

$e^{4\ln(3s+5)}$

$= e^{\ln(3s+5)^4}$

$= (3s+5)^4$

1. Applique la règle des logarithmes aux exposants pour prendre le 4 à l'avant et mettre en exposant.
2. Nous savons que $e^{\ln u} = u$ alors $e^{\ln(3s+5)^4} = (3s+5)^4$.

Mise en correspondance

Annexe D-5

Lois des exposants

exposant

base

a^m

terme

DIVISION PAR DES BASES COMMUNES . . .

$$\frac{A^M}{A^N} = A^{M-N}$$

l'exposant du dénominateur est soustrait de l'exposant du numérateur

S'IL Y A UN EXPOSANT NÉGATIF. . .

$$A^{-M} = \frac{1}{A^M}$$

un exposant négatif peut être exprimé sous forme de terme positif, par inversion

QUAND UNE BASE A DEUX EXPOSANTS. . .

$$(A^M)^N = A^{MN}$$

l'exposant qui apparaît à l'intérieur des parenthèses est multiplié par l'exposant qui se trouve à l'extérieur des parenthèses

QUAND LA BASE COMPORTE PLUS D'UN TERME. . .

$$(AB)^M = A^M B^M$$

l'exposant est distribué dans tous les termes

MULTIPLICATION DE BASES COMMUNES. . .

$$A^M \cdot A^N = A^{M+N}$$

les exposants sont additionnés

Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-6

Concept
Résolution d'équations logarithmiques élémentaires

Problème

$$\log_{10}x + \log_{10}(x + 3) = 1$$

Étape 1 Écris sous la forme d'une somme ou d'une différence et transforme-la en un seul logarithme.	exemple	$\log_{10}(x)(x + 3) = 1$
Étape 2 Transforme-la en une forme exponentielle.	exemple	$10 = (x)(x + 3)$
Étape 3 Trouve la valeur des inconnues à l'aide de techniques algébriques de base.	exemple	$0 = x^2 + 3x - 0$ $0 = (x + 5)(x - 2)$ $x = -5, x = 2$
Étape 4 Vérifie les racines de l'équation originale.	exemple	$\log_{10}(-5)(-5 - 3) = 1$ $1 = 1$ $\log_{10}(2)(2 - 3) = 1$ c'est impossible parce qu'on ne peut trouver le logarithme d'un nombre négatif

Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-7

Concept
Résolution d'équations exponentielles dont les bases sont différentes

Problème
Quand les bases d'une équation exponentielle ne sont pas les mêmes, et s'il n'est pas facile d'exprimer chaque membre dans le même système de base, suis les étapes suivantes :

Étape 1
Prends les logarithmes de chaque membre de l'équation

Étape 2
Utilise les propriétés des logarithmes pour écrire sous forme d'un seul logarithme.

Étape 3
Transforme les exposants en coefficient des logarithmes.
Conseil : Utilise les propriétés des logarithmes

Étape 4
Développe.

Étape 5
Rassemble les variables inconnues d'un côté de l'équation.

Étape 6
Décompose en facteurs les variables inconnues.

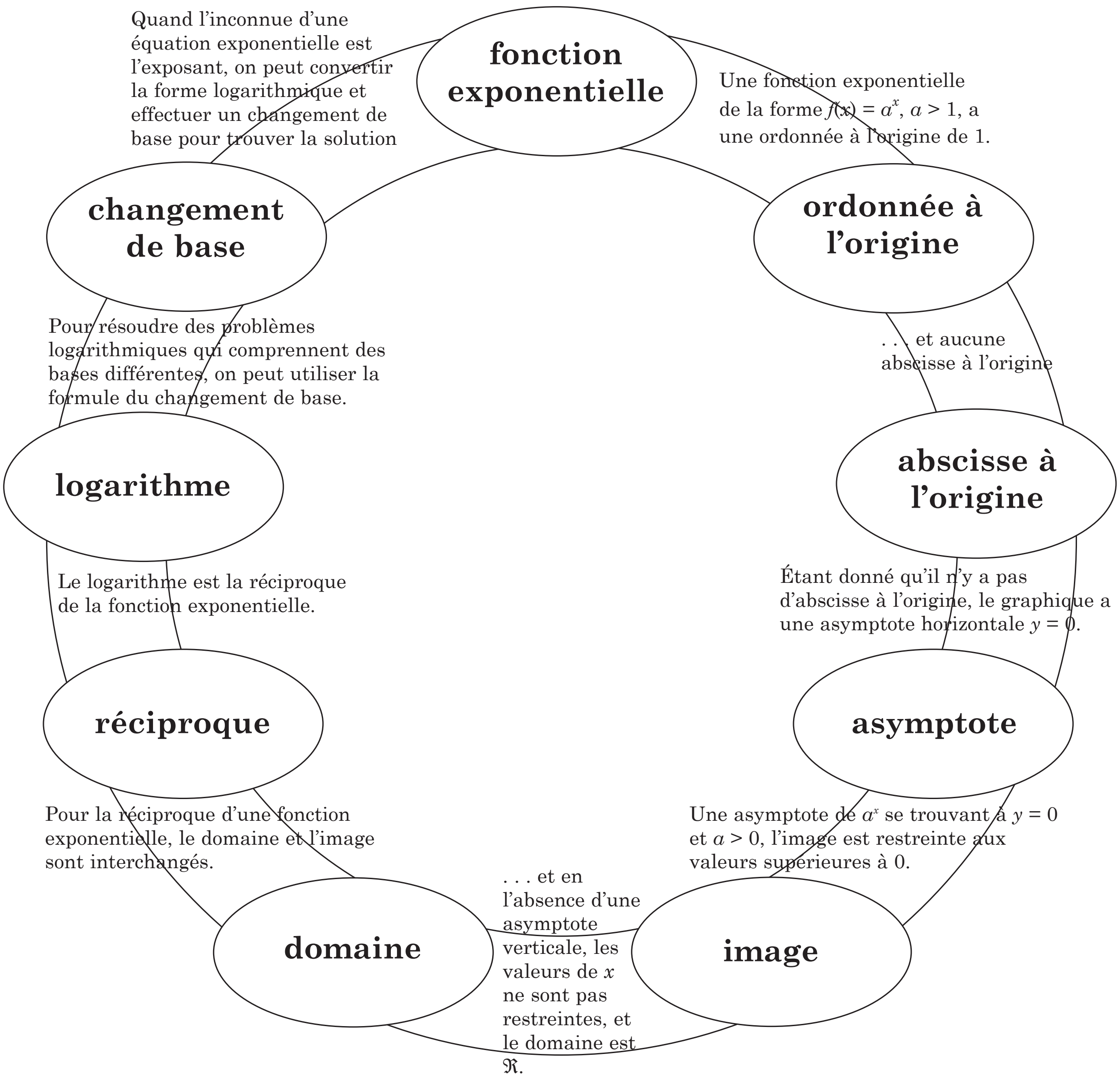
Étape 7
Effectue les calculs.

Exemple

$$
\begin{aligned}
3^{3x+6} &= 5^{x-5} \\
\log 3^{3x+6} &= \log 5^{x-5} \\
(3x+6)\log 3 &= (x-5)\log 5 \\
3x\log 3 + 6\log 3 &= x\log 5 - 5\log 5 \\
3x\log 3 - x\log 5 &= 5\log 5 - 6\log 3 \\
x(3\log 3 - \log 5) &= -5\log 5 - 6\log 3 \\
x &= \frac{-5\log 5 - 6\log 3}{3\log 3 - \log 5} \\
x &= -8{,}7
\end{aligned}
$$

Annexe D-8

Cycle du mot



Cycle du mot – Adapté (Word Cycle) : Extrait de *Reading — A Novel Approach*, texte de Janice Szabos, illustrations par Vanessa Filkins, © 1984 par Frank Schaffer Publications. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.