Unité B : Analyse de jeux et de nombres

Demi-cours VI
Guide de l'élève

1. Les incroyables tapis de Randi

Tapis 1

M. Randi, un grand magicien de renommée mondiale, possède un tapis de 13 dm x 13 dm. Il veut le changer en un tapis de 8 x 21.

M. Randi a apporté son tapis chez Omar, le marchand de tapis. « Omar, mon cher ami, je veux que tu coupes ce tapis en 4 morceaux et que tu les couses pour faire un tapis de 8 x 21. »

« Je suis désolé, monsieur Randi. Vous êtes un grand magicien, mais vous n'êtes pas très fort en arithmétique : 13 x 13 = 169 et 8 x 21 = 168. C'est impossible ».

« Mon cher Omar, le grand Randi ne se trompe jamais! Coupe le tapis en quatre morceaux, comme ceci (voir la figure 1) ».

Omar a suivi les directives. M. Randi a ensuite redisposé les pièces, puis Omar les a cousues ensemble. Le tapis avait maintenant des dimensions de 8 x 21. « Je ne peux pas y croire! L'aire a rétréci de 169 à 168! Qu'est-ce qui est arrivé au décimètre carré manquant? »

Coupe les morceaux à partir d'une photocopie de la figure 1 (ou reproduis le dessin à l'échelle) et vois si tu peux disposer les morceaux pour former un tapis de 8 x 21. Qu'est-il advenu du décimètre carré manquant?

Tapis 2

Quelques mois plus tard, M. Randi retourne voir le marchand avec un tapis de 12 dm x 12 dm. « Omar, mon vieil ami, mon réchauffeur électrique s'est renversé et a brûlé ce magnifique tapis. En le coupant et en recousant les morceaux, on pourra se débarrasser de ce trou. » (Voir la figure 2).

Omar était sceptique, mais a tout de même suivi les instructions de M. Randi. Une fois les morceaux cousus ensemble, le tapis mesurait encore 12 dm x 12 dm, mais le trou était disparu! « Mais dites-moi, monsieur Randi, comment êtes-vous arrivé à cela? D'où vient le décimètre carré qui a servi à remplir le trou? »

Coupe les morceaux à partir d'une photocopie de la figure 2 (ou reproduis le dessin à l'échelle) et vois si tu peux disposer les morceaux pour former un tapis de 12 x 12, sans trou. Qu'est-il advenu du trou d'un décimètre carré?

Les incroyables tapis de Randi : Extrait de « The Paradox Box », *Scientific American.* San Francisco, CA.

L'énigme du tapis 1 met en cause 4 longueurs : 5, 8, 13 et 21. Il s'agit de termes consécutifs de la série de Fibonacci (voir ci-dessous). Tu peux construire des variantes de ce paradoxe en utilisant diverses séries de quatre termes. Dans chaque cas, le carré et le rectangle auront une aire qui varie de 1. Peux-tu estimer si la nouvelle disposition des pièces qui permet de produire un carré à partir d'un rectangle résultera en une perte ou en un gain?

La série de Fibonacci est comme suit :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, ...

Chaque terme est la somme des deux termes précédents. Peux-tu trouver d'autres caractéristiques de cette intéressante série?

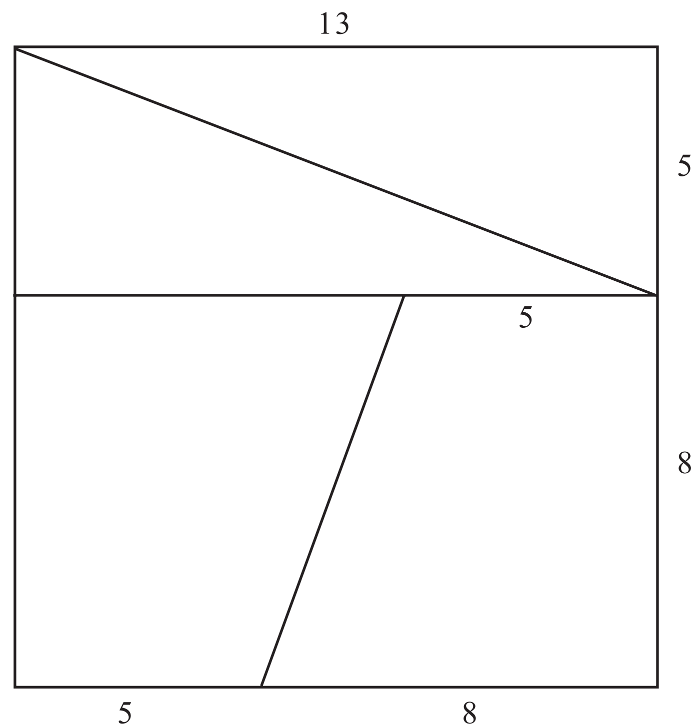


Figure 1

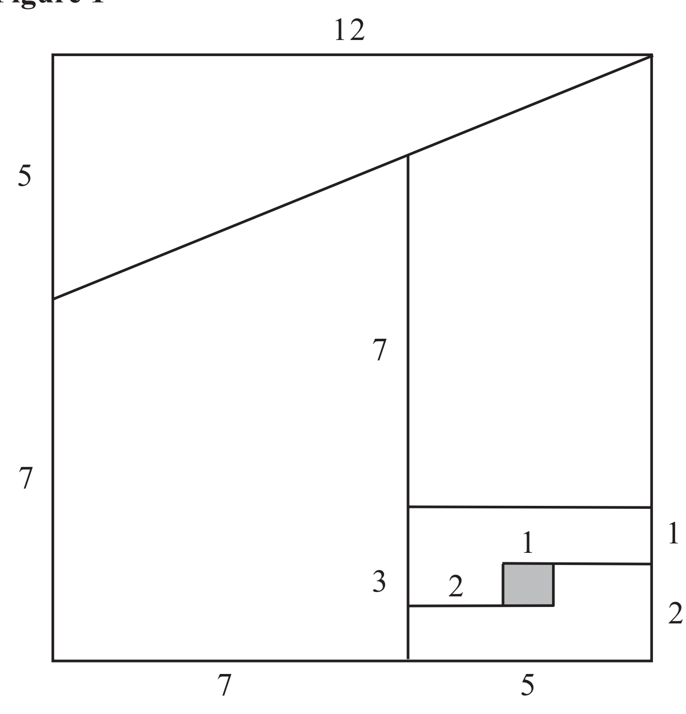


Figure 2

2. Jeux de nombres

Jeu 1

Choisis un numéro entre 2 et 9.
Multiplie-le par 41.
Multiplie le résultat par 271.

Refais cet exercice plusieurs fois avec des nombres d'un seul chiffre.

Que remarques-tu au sujet du résultat? Pourquoi ce truc fonctionne-t-il?

Jeu 2

Choisis un nombre de 3 chiffres, par exemple 123.
Répète les chiffres de sorte à obtenir un nombre de six chiffres : 123 123.
Divise ce nombre par 13, puis par 11, puis par 7.

Qu'obtiens-tu? Refais l'exercice avec quelques autres nombres de trois chiffres. Que se passe-t-il? Pourquoi obtiens-tu toujours ce résultat? Peux-tu tenter une explication?

Jeu 3

1^2	=	1
11^2	=	121
111^2	=	12 321
$1\ 111^2$	=	1 234 321
$11\ 111^2$	=	123 454 321

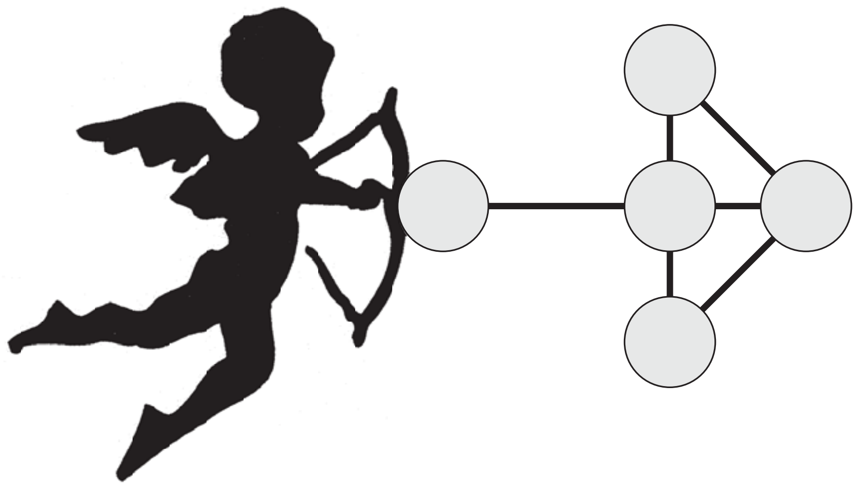
Continue le même modèle :

$111\ 111^2$	=	________________
$1\ 111\ 111^2$	=	________________
$11\ 111\ 111^2$	=	________________
$111\ 111\ 111^2$	=	________________
$1\ 111\ 111\ 111^2$	=	________________

Est-ce que le modèle se répète? Qu'arrive-t-il au modèle quand tu atteins $1\ 111\ 111\ 111^2$ (dix 1)? Pourquoi?

3. La flèche de Cupidon

Tu te promènes le long du Tibre, à Rome, le jour de la Saint-Valentin. Tu observes les passants et tu te réjouis de sentir la brise sur ta joue, quand soudain une douleur aiguë au thorax, du côté droit, te fige sur place. Quand tu portes la main à ton cœur avant de t'écrouler au sol, un petit homme, avec des ailes et un arc, atterrit près de toi.



« J'essaie une nouvelle flèche que mon oncle Divisio, le dieu de l'arithmétique, m'a donnée. » En allant vers toi, il retire de ta poitrine la flèche dotée de cinq disques. « Elle est très différente des autres que j'ai », continue-t-il, en passant sa main amoureusement sur les disques. « Tu peux choisir une amoureuse, si tu peux résoudre l'énigme ».

« Choisis des chiffres entre 1 et 9, te dit-il, et place un chiffre dans chacun des disques, en suivant la règle suivante : chaque paire de chiffres liée par une ligne doit composer un nombre de 2 chiffres divisible par 7 ou par 13. Par exemple, on pourrait lier 7 et 8 par une ligne parce que 78 est divisible par 13. L'ordre dans lequel tu relies les chiffres importe peu, mais tu ne peux pas utiliser un chiffre plus d'une fois. »

« Pour chaque solution que tu trouves, ajoute l'homme ailé avant de s'envoler, tu gagnes le cœur de quelqu'un. Si tu arrives à relier les disques du dessus et du bas à celui de la base, tu seras toujours chanceux au jeu de l'amour. Cinq cœurs au moins t'attendent. Peux-tu en gagner d'autres? »

La flèche de Cupidon : Extrait de Pickover, C.A. « Brain Bogglers : Cupid's Arrow » , *Discover*. Copyright © 1998.

4. Le jeu des mérelles

Le jeu des mérelles est un jeu de société ancien et universel. On a retrouvé des pièces de ce jeu dans l'abbaye de Westminster, l'église anglaise du XIVe siècle, et on peut trouver des planches de jeu gravées sur le pont d'un bateau Viking. On a aussi découvert que ce jeu était joué en Chine, au temps de Confucius. Des planches de jeu ont été découvertes dans la première ville de Troie, au Sri Lanka, ainsi que dans un site archéologique datant de l'âge de bronze, en Irlande. C'est un jeu qui est resté populaire de nos jours en Grèce, en Angleterre et en Scandinavie.

Les mérelles à six jetons

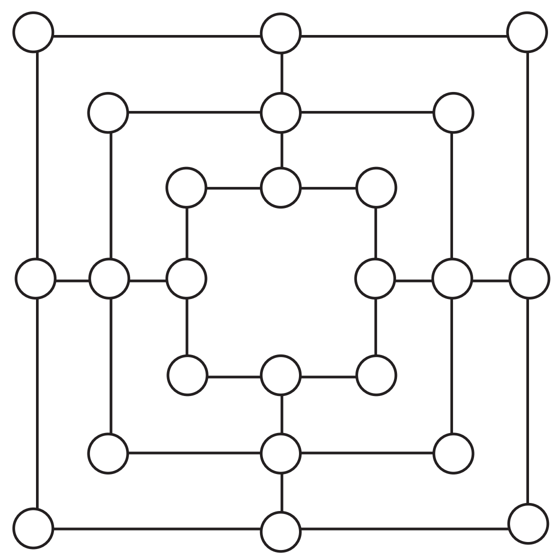
Joueurs : Deux

Pièces : La planche de jeu

Douze jetons de deux couleurs différentes, six de chacune

Objectif : S'emparer des jetons de l'adversaire, de sorte qu'il ne lui en reste plus que deux sur la planche de jeu.

Règles :



- Les joueurs placent en alternance tous leurs jetons sur la planche.
- Chaque joueur tente de former une ligne, appelée une mérelle, le long du côté d'un carré.
- Le joueur qui réussit à aligner une mérelle s'empare de l'un des jetons de son adversaire et le retire de la planche de jeu.
- Lorsque tous les jetons ont été placés, les joueurs déplacent chacun leur tour un jeton le long d'une ligne, jusqu'à un point vide adjacent.
- Chaque fois qu'une mérelle est formée, un jeton adversaire est enlevé.
- Un joueur gagne quand l'autre joueur n'a plus que deux jetons sur la planche.

Le jeu des mérelles : Extrait de Gorman J. « Strategy Games : Treasures from Ancient Times », *Mathematics Teaching in the Middle School* 3(2) : 110 à 116. Copyright © 1997.

Les mérelles à neuf jetons

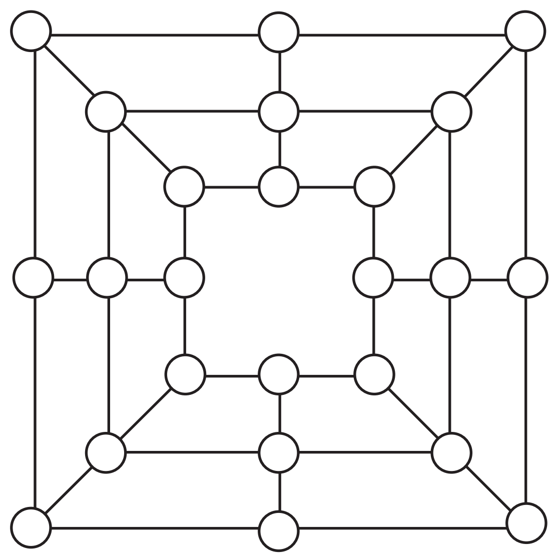
Joueurs : Deux

Pièces : Planche de jeu

Dix-huit jetons de deux couleurs différentes, neuf de chacune

Objectif : S'emparer des jetons de l'adversaire, de sorte qu'il ne lui en reste plus que deux sur la planche, ou bloquer l'avance de l'adversaire pour l'immobiliser.

Règles :



- Les règles ressemblent à celles des mérelles à six jetons.
- Les joueurs placent leurs jetons chacun leur tour sur la planche.
- Quand une mérelle est formée, le joueur s'empare d'un jeton de l'adversaire, mais il ne peut prendre un jeton qui forme une mérelle.
- Quand tous les jetons ont été placés, les joueurs déplacent leurs jetons tour à tour le long d'une ligne, vers un point vide adjacent.
- Chaque fois qu'une mérelle est formée, un jeton de l'adversaire est enlevé.
- Un joueur gagne quand l'autre joueur n'a plus que deux jetons sur la planche ou quand il est bloqué.

Quelle serait ta stratégie pour ces deux jeux? Serait-elle la même pour les deux? Quelles pourraient être les règles et de quoi aurait l'air la planche de jeu si trois jetons étaient utilisés pour chaque joueur?

5. Le jeu de la vie et de la mort

Cette activité s'inspire d'un jeu inventé par le mathématicien anglais, John Conway.

Matériel requis :

- des jetons de bingo (ou des objets semblables) de deux couleurs différentes;
- du papier quadrillé (une seule copie est fournie).

Concept

Une cellule (jeton de bingo) vit à titre de membre d'une colonie. Les cellules pourront vivre ou mourir, selon les conditions environnantes. La colonie se reproduira si des conditions propices sont mises en place.

Définition

Toute cellule, C, est entourée d'espaces appelés le voisinage. Dans l'illustration, toutes les cellules numérotées composent le voisinage de C.

1	2	3
4	C	5
6	7	8

Les règles de la vie

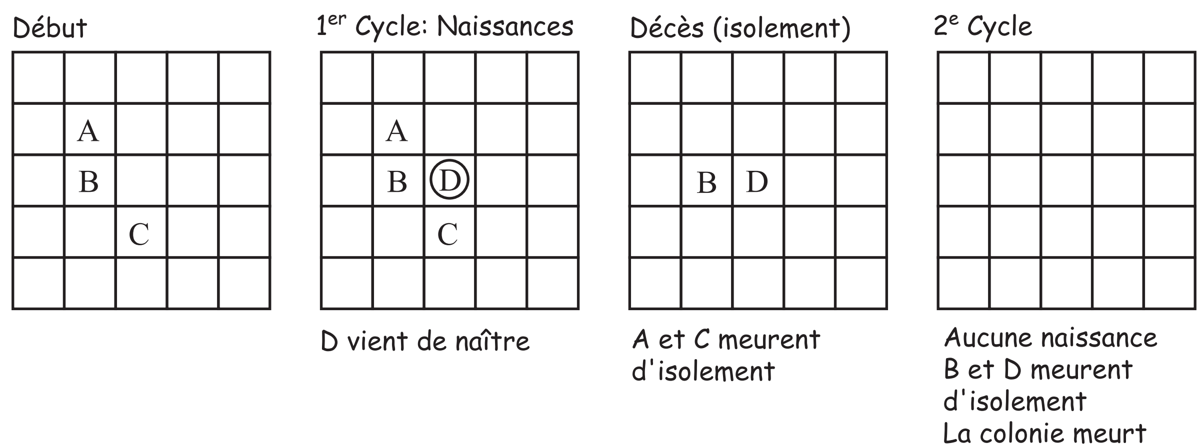
1. La survie. Toute cellule qui a 2 ou 3 cellules dans son voisinage pourra survivre.
2. Le décès. Toute cellule qui n'a qu'une seule ou aucune cellule dans son voisinage mourra. Toute cellule qui a quatre cellules ou plus dans son voisinage meurt d'étouffement.
3. La naissance. Une nouvelle cellule naîtra dans tout espace vide du voisinage qui contient exactement 3 cellules dans son voisinage.
4. Les naissances et les décès surviennent simultanément dans un même cycle.

Processus

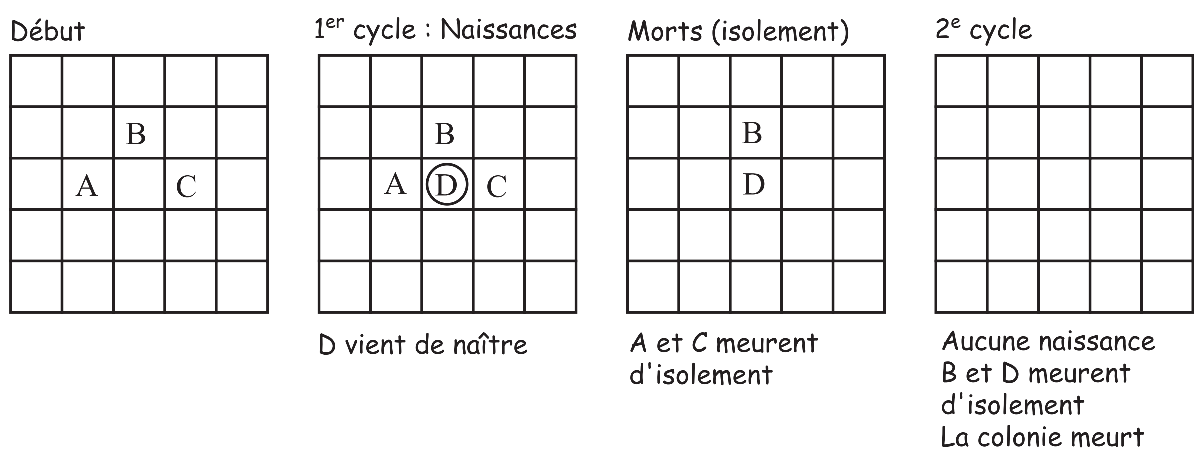
1. Établis ta communauté à l'aide d'un jeton de bingo d'une couleur (disons rouge).
2. Marque les naissances à l'aide d'un jeton d'une autre couleur (disons jaune).
3. Retire les jetons mourants (ils ne peuvent être que rouges).
4. Remplace les jetons jaunes par des jetons rouges.
5. Le cycle est terminé; le processus recommence de nouveau.

Exemples :

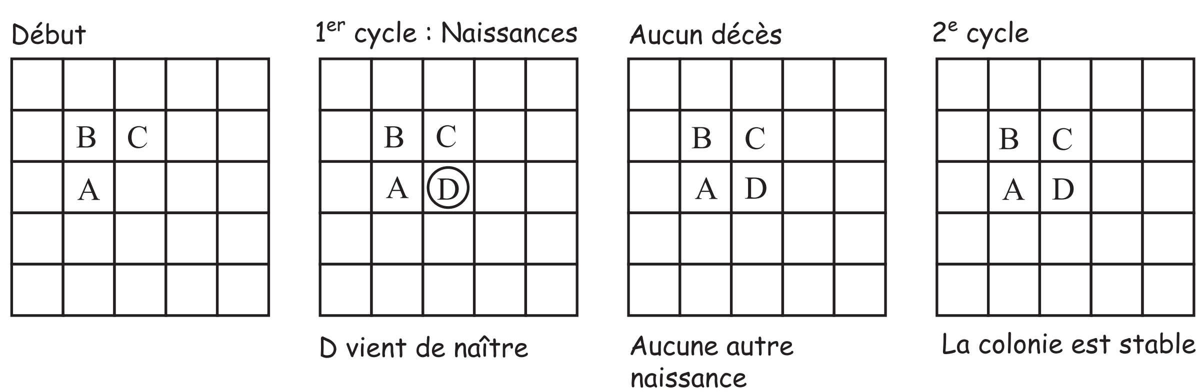
1.



2.



3.



Essaie les combinaisons suivantes :

1.

	A			
		B		
			C	

2.

	A	B	C	

3.

A	B	C	D	

4.

A				
B	C			
		D		

5.

A		C		E
	B		D	

6.

A				
B				
C	D			

7.

B	A			
C				
D	E			

8.

A		E		
B	D			
C	F			

9.

	A	B	C	
	D	E		
	F			

10.

	B		D	
A		C		E

11.

	B		D	
A		C		

12.

	A	B	C	
		D		
	F	E		

13. Crée une colonie de quatre cellules au moins qui :

    a) connaîtra l'extinction;

    b) deviendra stable;

    c) connaîtra une croissance du nombre de cellules.