Unité A : Analyse de problèmes

Demi-cours VI

DEMI-COURS VI

Unité A : **Analyse de problèmes**

Durée : **7 heures pour cette unité et pour l'unité Analyse de jeux et de nombres**

Résultat d'apprentissage général :

Établir et utiliser des stratégies mathématiques pour résoudre des problèmes dans différentes situations.

Cette unité a pour but de présenter aux élèves une gamme variée de problèmes intéressants qui nécessitent l'utilisation de différentes stratégies de solution. Ces problèmes servent de compléments aux travaux réalisés dans les autres unités et ils doivent être intégrés tout au long du cours.

Résultats d'apprentissage spécifiques

A-1 Expliquer et résoudre des problèmes en utilisant diverses approches principalement non algébriques

A-2 Décrire l'approche et les notions mathématiques utilisées pour trouver des solutions aux problèmes et aux activités

ANALYSE DE PROBLÈMES

Matériel d'appui

- *Explorations 12 - Les mathématiques au quotidien*
- Se reporter aux activités proposées à l'Annexe I
- Se reporter aux ressources additionnelles proposées à l'Annexe II

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

Résultat général

Établir et utiliser des stratégies mathématiques pour résoudre des problèmes dans différentes situations

Résultats spécifiques

A-1 Expliquer et résoudre des problèmes en utilisant diverses approches principalement non algébriques

A-2 Décrire l'approche et les notions mathématiques utilisées pour trouver des solutions aux problèmes et aux activités

✔ **Communications**	Régularités
✔ **Liens**	✔ **Résolution de problèmes**
✔ **Raisonnement**	Technologies de l'information
Sens du nombre	✔ **Visualisation**
✔ **Organisation et structure**	

Voici des exemples d'approches non algébriques : géométrie, réseaux, diagrammes, organigrammes, simulations, etc.

N'oubliez pas que, dans le cas des activités de cette unité, le voyage est plus important que la destination. Il est préférable de discuter des diverses approches utilisées pour la résolution de ces problèmes, surtout lorsque ces approches ont été définies par les élèves. Certaines approches sont-elles « meilleures » que d'autres? Pourquoi? Quelles en sont les raisons?

Les problèmes inclus dans l'Annexe I visent à fournir du matériel qui est intéressant en soi et qui complète les autres unités de ce programme. Ils ont pour objet de fournir des exemples et ne représentent pas la totalité des problèmes possibles. Certaines activités ont été choisies afin d'illustrer un large éventail d'applications professionnelles et domestiques largement non algébriques des mathématiques. D'autres ont été choisies parce qu'elles sont intrinsèquement intéressantes ou parce qu'elles mettent les élèves au défi de trouver et d'utiliser de nouvelles manières d'analyser et de penser de façon mathématique. Il n'est pas nécessaire que tous les élèves entreprennent les mêmes activités.

Les activités de l'Annexe I ne sont pas présentées dans une séquence particulière. Nous invitons les enseignants à compléter cet ensemble d'activités avec du matériel d'autres sources, comme Internet. Vous trouverez à l'Annexe II une liste préliminaire des ressources possibles.

Nous suggérons que ces problèmes et activités soient répartis tout au long du cours comme des activités de renforcement, comme compléments, ou comme un changement de rythme dans l'activité quotidienne de la classe. Certains se rapporteront directement à des unités en particulier, mais la plupart sont indépendants et **peuvent être** utilisés en tout temps. Vous pourriez introduire l'analyse des problèmes après quelques jours - une semaine, si possible - de travail sur ces activités. Répartissez le reste tout au long du cours.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Le progrès réalisé par les élèves devrait être évalué sur une certaine période. Par exemple, essayez de déterminer si l'élève utilise un nombre de plus en plus grand de stratégies de résolution de problèmes et si ses explications sont de plus en plus détaillées. Il serait approprié de tenir des notes sur les anecdotes liées au travail d'équipe pour les activités d'apprentissage. Les solutions et les raisonnements bien élaborés peuvent être ajoutés au portfolio de l'élève.

Les activités de résolution de problèmes complexes ne sont habituellement pas faciles à évaluer par des tests écrits.

NOTES

Ressources

Mathématiques du consommateur, 12e année - Sixième cours d'un demi-crédit destiné à l'enseignement à distance Winnipeg MB : Éducation, Formation professionnelle et Jeunesse Manitoba, 2002.
— Devoir d'introduction

Annexe I

Renseignements pour l'enseignant : Les canalisations

Habiletés requises

- analyse
- visualisation spatiale
- addition
- sens des nombres

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

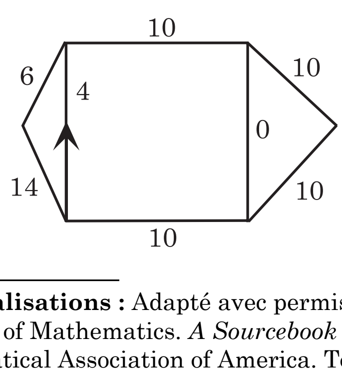
Suggestions d'enseignement

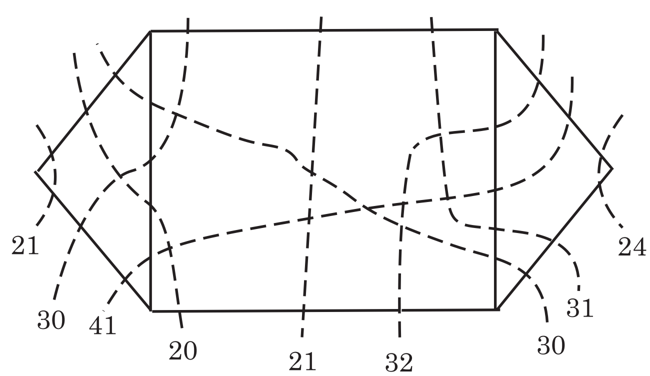
Cette activité peut être exécutée par des groupes de deux élèves. Elle requiert certaines habiletés analytiques puisque les élèves doivent pouvoir comprendre comment les éléments d'un réseau de canalisations peuvent être répartis. Les élèves devront faire quelques essais et quelques erreurs avant de trouver la solution.

Solutions

a) A à D a une plus grande capacité que D à B directement. Donc, il est raisonnable de rediriger une certaine quantité de liquide à D et de la diriger à B en passant par C. Aussi, pour profiter de la capacité de C à B, on en vient à la même conclusion. Le débit maximal de liquide est 13 de A à D, 5 de D à C, 8 de D à B, 4 de A à C et 9 de C à B, pour un total de 17 de A à B.

b) Les coupes sont illustrées ci-dessous à droite. Le coût associé à la coupe minimale est 20. Donc le débit maximal a une valeur de 20. Un débit maximal est illustré ci-dessous à gauche; il en existe d'autres.





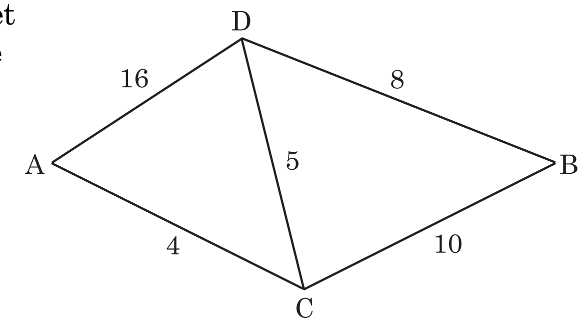
Les canalisations : Adapté avec permission, Mathematical Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics. *A Sourcebook of Applications of School Mathematics.* Copyright © 1980 de Mathematical Association of America. Tous droits réservés.

c) Si nous considérons chaque coupe comme une membrane ou un mur que doit traverser le liquide, le débit maximal que peut transporter le système n'est pas plus grand que la quantité de liquide qui traverse la contrainte la plus rigide (le mur). D'autre part, la quantité qui traverse un mur n'est pas plus grande que le débit maximal qui est transporté par le système.

Feuille à reproduire : Les canalisations

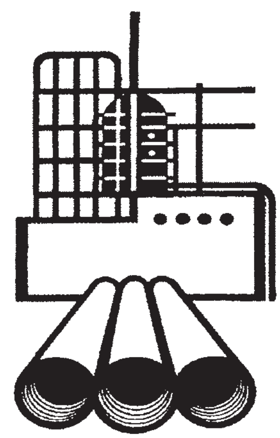
La méthode d'essais par tâtonnements permet de résoudre beaucoup de problèmes de réseaux, si le nombre de points (sommets) et de lignes (côtés) est peu élevé. Cependant, en pratique, de tels réseaux comprennent souvent plusieurs dizaines ou centaines de sommets et de côtés. Dans ces cas, il faut s'appuyer sur des méthodes plus rapides et surtout plus fiables que la méthode par tâtonnements.

Posons deux points, A et B, liés par un réseau de tuyaux. La capacité des tuyaux est connue et nous voulons déterminer la quantité maximale de liquide qui peut être transportée entre le point A et le point B. En règle générale, une partie du problème consiste à déterminer dans quel sens le liquide sera pompé dans un lien intermédiaire, par exemple CD, et quelle quantité de liquide il faut pomper dans ce lien.



a) Déterminez le débit pour chacun des cinq tuyaux, pour obtenir un débit total aussi élevé que possible.

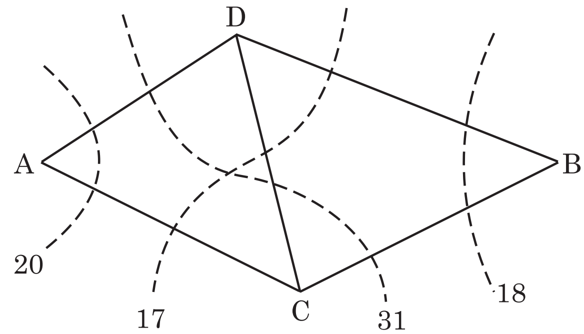
Ford et Fulkerson ont trouvé une technique, qui s'appuie sur des résultats (un théorème mathématique) et qui permet de trouver le débit maximal, d'une façon autre que par la méthode par tâtonnements. Selon le résultat obtenu, *le débit maximal est équivalent à la coupe minimale.* Une coupe est une ligne, telles que les lignes discontinues dans le diagramme à la page suivante, qui sépare le point A et le point B, de sorte que si tous les tuyaux traversés par la ligne étaient coupés ou supprimés, aucun liquide ne pourrait circuler entre A et B dans le réseau. Ainsi, la ligne à l'extrême gauche traverse les droites AD et AC; au total, leur capacité de transport maximal est 16 + 4 = 20.



Une ligne qui traverse AD, DC et CB est marquée 31 (= 16 + 5 + 10). Chacune des sommes représente le coût associé à la coupe en termes de capacité perdue. Dans ce réseau, le coût minimal de n'importe quelle coupe est 17. Par conséquent, selon le théorème de Ford-Fulkerson, le débit maximal dans le système est aussi 17. À partir de cette donnée, nous pourrons calculer rapidement les débits dans chacun des tuyaux.

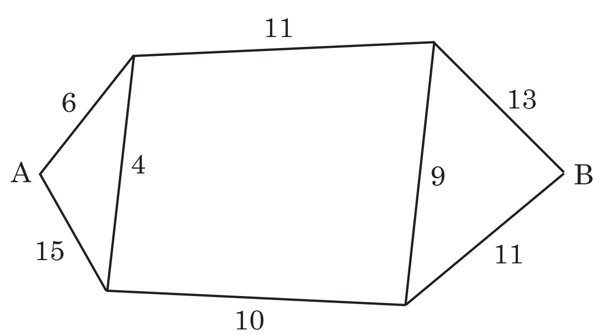
Les canalisations : Adapté avec permission de Mathematical Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics. *A Sourcebook of Applications of School Mathematics.* Copyright © 1980 de Mathematical Association of America. Tous droits réservés.

Voici la solution pour le réseau de tuyaux illustré ci-dessous :



La capacité est plus élevée dans la section A à D que dans la section D à B. (Calcule la capacité du débit ***de*** D jusqu'à B, en ligne directe.) Par conséquent, il serait justifié de faire dévier une certaine quantité de liquide à partir du point D, pour le diriger vers le point B via le point C. Au point C, le débit du liquide est de 5, de sorte que le débit maximal entre A et B via D est de 13, puisque ceci est le total des tuyaux à partir de D. Le tuyau AC, dont la capacité est de 4, peut être utilisé conjointement avec CB - même avec DC (5), puisque le débit maximal est de 9 dans le tuyau CB. Ainsi, la capacité maximale de notre réseau est 17(13 + 4) : 13 dans AD, 5 dans DC, 8 dans DB et 9 dans CB.

b) À l'aide du théorème de Ford-Fulkerson (débit maximal - coupe minimale), déterminez la capacité maximale entre A et B dans le réseau illustré ci-dessous. Déterminez aussi la capacité de chacun des huit tuyaux.



c) Pouvez-vous expliquer pourquoi le théorème de Ford-Fulkerson fonctionne?

Renseignements pour l'enseignant : Une représentation graphique

Habiletés requises

- interprétation de graphiques linéaires
- conception de graphiques linéaires

Quand peut-on utiliser cette activité?

Cette activité est reliée à l'unité des variations et des formules. Elle peut être utilisée pour ajouter un élément visuel à l'étude des relations entre les variables dépendantes et indépendantes. Cette activité permet aux élèves de perfectionner leur sens graphique et elle contient des éléments d'analyse de données, de géométrie analytique, d'estimation et de fonctions.

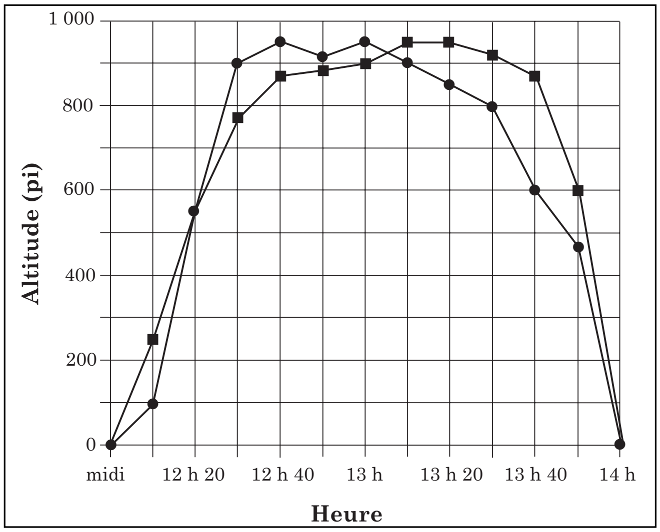
Suggestions d'enseignement

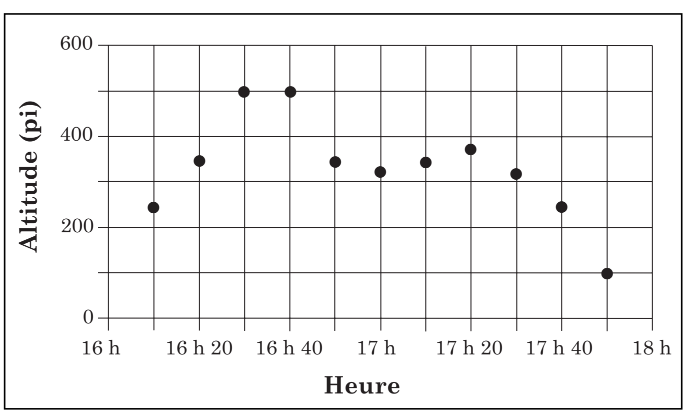
Cette activité débute par des représentations graphiques de données recueillies et progresse ensuite vers des fonctions qui requièrent que les élèves fassent des prédictions sur l'apparence du graphique de certaines fonctions. Les enseignants voudront peut-être que les élèves travaillent en groupes de deux. Ils voudront peut-être discuter des réponses à certaines questions.

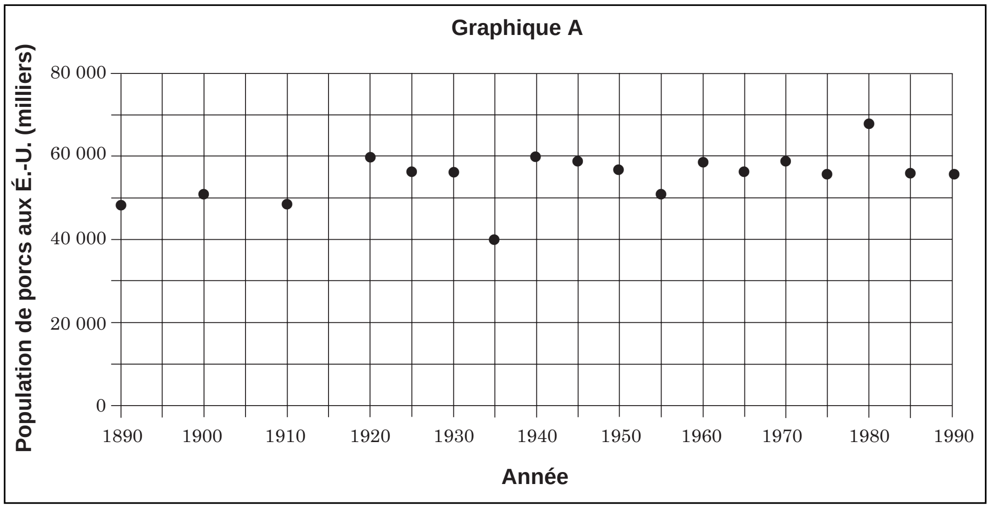
Solutions

1. 0 pi, 250 pi, 900 pi
2. 12:40
3. 950 pi
4. 125 pi
5. 13 h 20
6. 925 pi
7. 12 h 40 à 13 h 40

Une représentation graphique : Adapté avec permission de Edkins, S.K. "Let's Get Graphic!" *NCTM Student Math Notes* (May 1996). Copyright © 1996 de National Council of Teachers of Mathematics. Tous droits réservés.

8. 

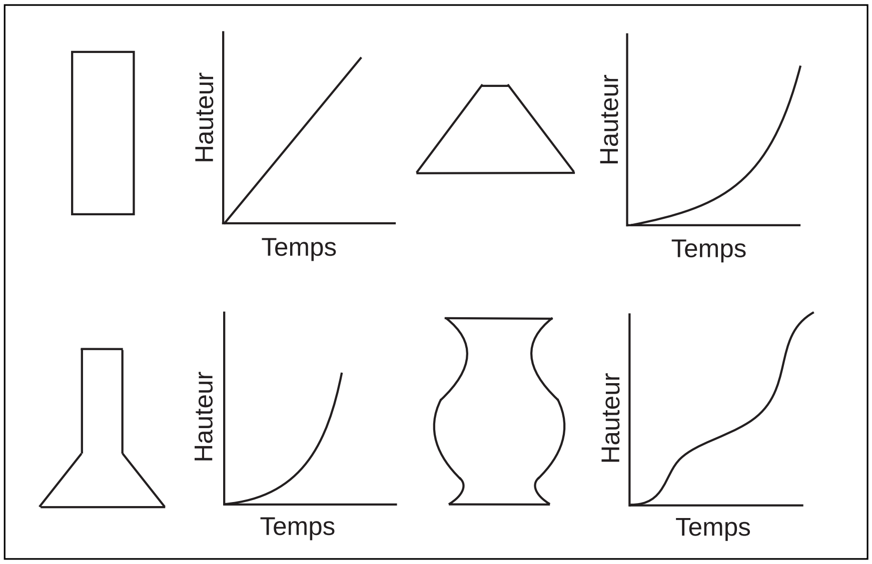
9. 0 pi, 100 pi, 950 pi
10. 12 h 30, 13 h 10
11. Oui. 12 h 20
12. 12 h, 14 h, vers 13 h 05
13. Environ la même hauteur
14. 12 h à 12 h 20, 13 h 05 à 14 h
15. 45 min.
16. 13 h 40, 250 pi
17. 12 h 10 à 12 h 20
18. Celle de Richard. Il était plus haut juste avant d'atterrir et est descendu de 600 pieds en 10 minutes.
19. Environ 500 pi
20. Entre 16 h 30 et 16 h 40
21. Au moins deux fois, vers 16 h 16 et vers 17 h 31.
22. 

23. Les réponses peuvent varier. On pourrait laisser l'altimètre fonctionner en tout temps pour qu'il enregistre toutes les données.
24. Les réponses peuvent varier. La collecte des données au cours des premières années n'a peut-être pas été effectuée efficacement.
25. 

26. Les réponses peuvent varier. Par exemple, le graphique est étiré; l'échelle des *y* est donc plus large.
27. Les réponses peuvent varier. Par exemple, une baisse a eu lieu en 1935 et une hausse a eu lieu en 1980. Pour les autres années, la population se situe entre 50 000 et 60 000.
28. Les réponses peuvent varier. Par exemple, une baisse a eu lieu en 1935 et la population se situe vers 50 000 pour les autres années. Une moins grande variation est visible parce que l'axe des *y* est comprimé.
29. Graphique A. Les explications peuvent varier. Par exemple, la variation est plus facilement visible.
30. Heure, altitude
31. (a) 4, (b) 1, (c) 3, (d) 2
32. Les réponses peuvent varier. Par exemple, vers 6 h, la famille sort la nourriture du petit déjeuner du réfrigérateur et prend son petit déjeuner. La nourriture non utilisée est ensuite replacée dans le réfrigérateur. Ensuite, quelqu'un prend une collation. Peu de temps après, quelqu'un d'autre prend une collation. La famille revient de faire des emplettes et place la nourriture dans le réfrigérateur, et la nourriture y demeure jusqu'à l'heure du midi.

33. a) Les graphiques peuvent varier.
    b) Les réponses peuvent varier. Par exemple, personne n'achètera une voiture moyenne qui consomme beaucoup d'essence. Après environ 20 miles au gallon, les ventes augmenteront jusqu'à ce que l'offre et la demande soient uniformes. Ces résultats seront-ils différents selon le prix de l'essence?

34. Les graphiques peuvent varier.



Feuille à reproduire : Une représentation graphique

Durant la Fête du Canada, à St-Jean Chrysostome, on offre des promenades en montgolfière. À midi, un ballon piloté par Richard et un autre piloté par Sylvie se sont envolés à partir du terrain de l'école secondaire du quartier, qui se trouve au niveau de la mer. Ils ont atterri deux heures plus tard au parc municipal, à un mile seulement du point de départ, qui se trouve aussi au niveau de la mer. Les aéronautes ont enregistré leur altitude à toutes les dix minutes durant le vol, à l'aide d'un altimètre installé à bord de la montgolfière.

Heure	Ballon de Richard Altitude (pi)	Ballon de Sylvie Altitude (pi)
Midi	0	0
12 h 10	250	100
12 h 20	550	550
12 h 30	750	900
12 h 40	750	900
12 h 50	880	935
13 h	900	950
13 h 10	950	900
13 h 20	950	850
13 h 30	925	800
13 h 40	850	600
13 h 50	600	470
14 h	0	0

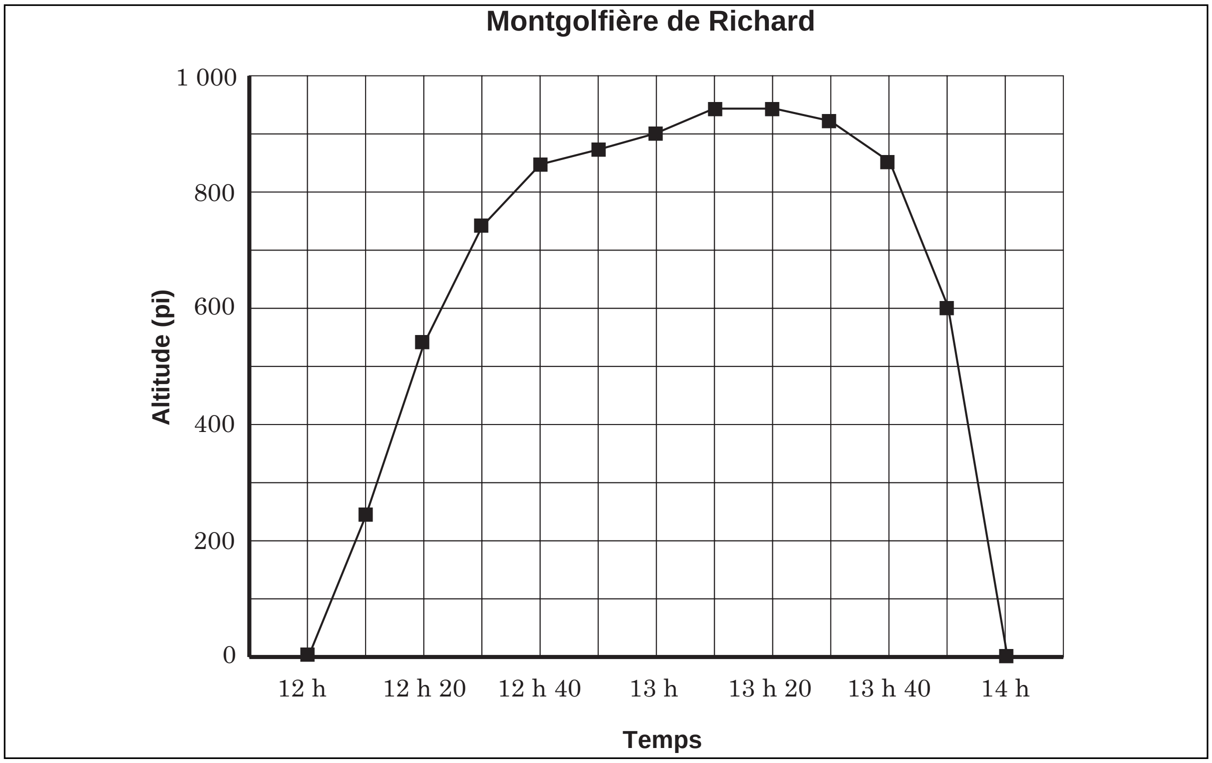
À la page suivante, nous présentons un graphique illustrant les altitudes au-dessus de la terre, enregistrées par Richard. Les petits carrés correspondent à l'altitude atteinte par le ballon à des moments précis.

1. À quelle hauteur se trouvait la montgolfière de Richard à midi? _______________

   Après dix minutes de vol? _______________

   Après une heure de vol? _______________

Une représentation graphique : Adapté par permission, de Edkins, S.K. "Let's Get Graphic!" *NCTM Student Math Notes* (May 1996). Copyright © 1996 de National Council of Teachers of Mathematics. Tous droits réservés.



2. À quelle heure le ballon de Richard a-t-il atteint 850 pieds d'altitude? __________

3. Selon le graphique, quelle est l'altitude maximale atteinte par la montgolfière de Richard? __________

4. On peut constater, à partir du tableau et du graphique, que la montgolfière de Richard était au sol à midi et qu'elle avait atteint 250 pieds d'altitude à 12 h 10. Même si aucune lecture de l'altimètre n'a été effectuée à 12 h 05, estimez l'altitude que la montgolfière de Richard avait atteint à ce moment :

   ____

   Marquez le résultat sur le graphique au moyen d'un petit carré.

5. Les petits carrés sur le graphique représentent les moments où Richard a vérifié et enregistré les lectures de l'altimètre. Puisque nous n'avons que ces valeurs, nous avons relié les carrés pour avoir une idée de l'altitude atteinte par le ballon de Richard entre les lectures d'altimètre.

6. Estimez l'altitude du ballon de Richard à 13 h 30 : __________

7. Durant quelle(s) période(s) la montgolfière de Richard a-t-elle dépassé une altitude de 850 pieds? __________

8. À l'aide de triangles, tracez les lectures des altitudes pour le ballon de Sylvie sur le même graphique. Reliez ensuite les triangles pour avoir une idée de l'altitude atteinte par le ballon de Sylvie entre les lectures d'altimètre. Tenez pour acquis que les graphiques obtenus représentent le tracé réel des ballons.

9. À quelle altitude se trouvait le ballon de Sylvie à midi? ____________________

   Après dix minutes de vol? ____________________

   Après une heure de vol? ____________________

10. À quel(s) moment(s) le ballon de Sylvie a-t-il atteint 900 pieds d'altitude? _____

11. Pendant la montée des montgolfières, elles ont atteint la même altitude à une reprise. Quand? ____________________

12. À quel(s) autre(s) moment(s) les montgolfières se sont-elles trouvées à la même altitude? ____________________

La résolution de questions comme la dernière vous permet de développer une méthode qui pourra être utile dans d'autres problèmes. La méthode devrait comprendre une observation attentive des extrémités du graphique.

13. À partir des graphiques, déterminez quelle montgolfière est montée le plus haut.

    ____

14. Durant quelle(s) période(s) la montgolfière de Richard se trouvait-elle plus haute que celle de Sylvie?

    ____

15. Pendant combien de minutes la montgolfière de Sylvie a-t-elle été plus haute que celle de Richard? ____________________

16. À quel moment la différence entre les altitudes des deux montgolfières a-t-elle été la plus grande? ____________________

    Quelle était la distance verticale entre les deux ballons? ____________________

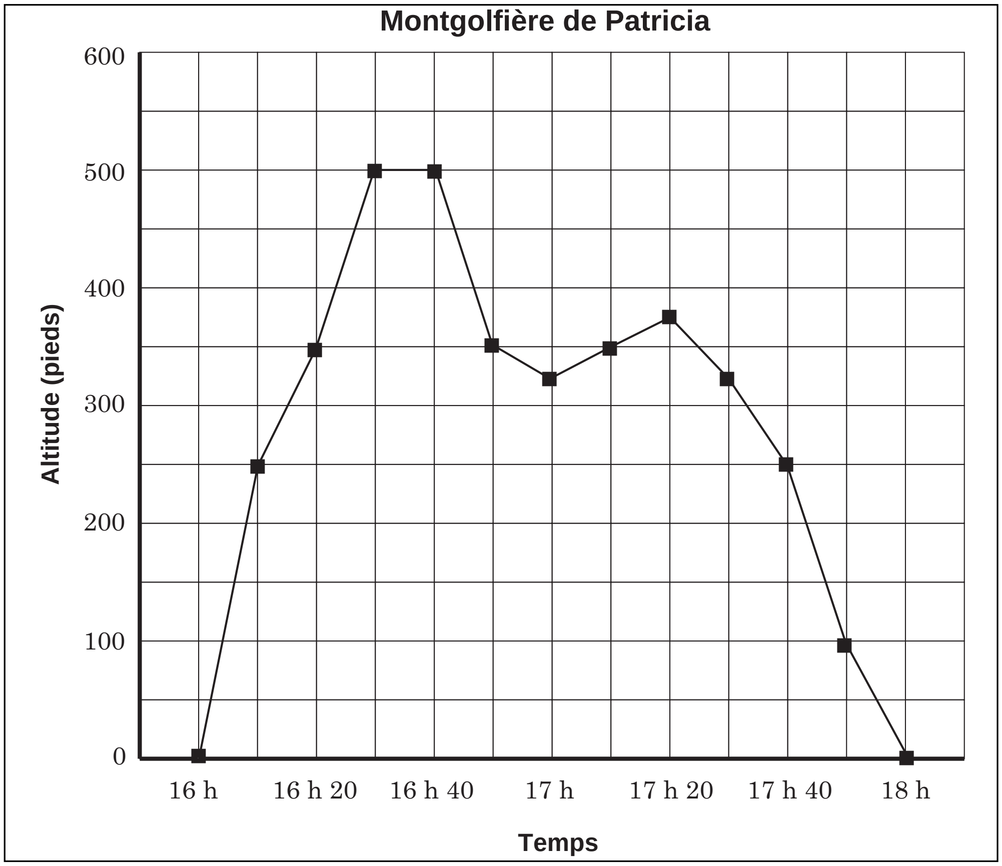
17. En examinant la ligne qui relie les triangles, déterminez les périodes durant lesquelles le ballon de Sylvie est monté le plus rapidement. ____________________

18. Quel ballon est descendu le plus rapidement? ____________________
    Expliquez.

    ____

    ____

Parfois, il faut se méfier de la ligne qui relie les points d'un graphique. Observez le tracé ci-dessous, qui correspond au vol de la montgolfière de Patricia, effectué plus tard le même jour. Le graphique a été tracé par l'équipe de contrôle au sol, à partir des comptes rendus que Patricia donnait au moyen d'un téléphone cellulaire, à toutes les dix minutes.



19. Si on se fie au graphique, quelle est l'altitude maximale atteinte par la montgolfière?

____

20. Patricia prétend qu'elle a atteint une hauteur maximale de 600 pieds. Selon vous, où faudrait-il inscrire cette valeur sur le graphique? Modifiez-le en conséquence. À quelle heure ce sommet a-t-il été atteint selon vous?

____

21. Selon le graphique, quel est le nombre minimal de fois où la montgolfière de Patricia s'est trouvée à 300 pieds d'altitude exactement? Quels sont ces moments?

____

22. En réalité, la montgolfière de Patricia a atteint 300 pieds d'altitude à 3 reprises exactement. Modifiez le graphique pour indiquer comment cela a pu se passer. À quels moments cela a-t-il pu se passer?

____

23. Suggérez des façons de diminuer les possibilités d'oublier des valeurs importantes liées au vol. ______________________________

____

La *pagaille* dans les échelles

24. Vous voyez ci-contre un tableau illustrant la population de porcs aux États-Unis entre 1890 et 1990. Pourquoi les intervalles entre les années sont-ils différents? ________________

____

25. Reportez les données sur le graphique A (page suivante), puis sur le graphique B.

26. Pourquoi les graphiques sont-il si différents?

____

____

27. Si on vous montrait seulement le graphique A, quelle conclusion pourriez-vous en tirer?

____

____

28. Si on vous montrait seulement le graphique B, quelle conclusion pourriez-vous en tirer?

____

____

29. Expliquez quel graphique représente le mieux la tendance dans la population de porcs.

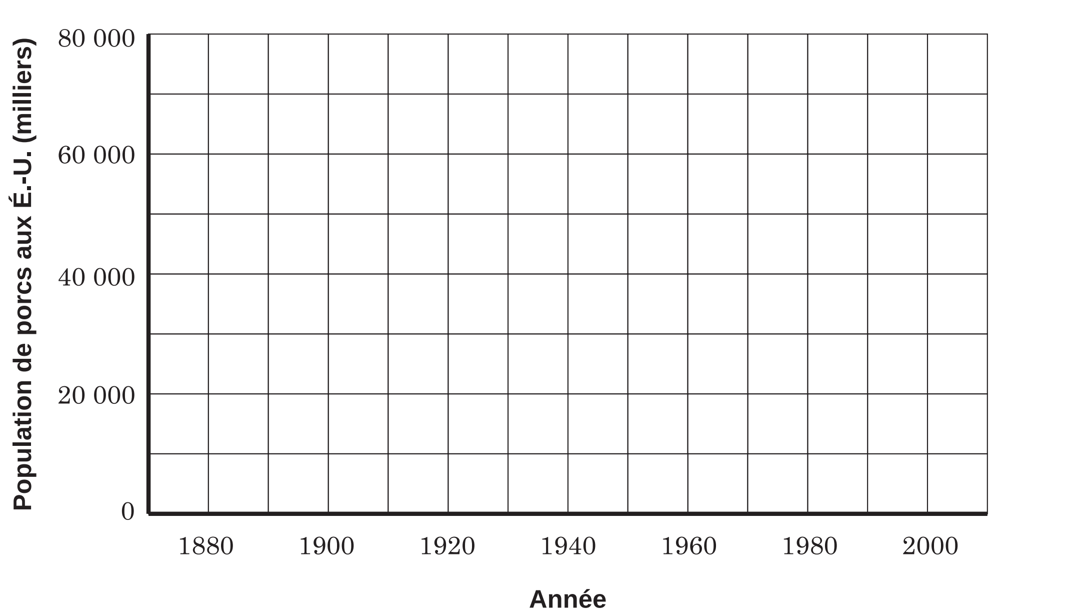
____

____

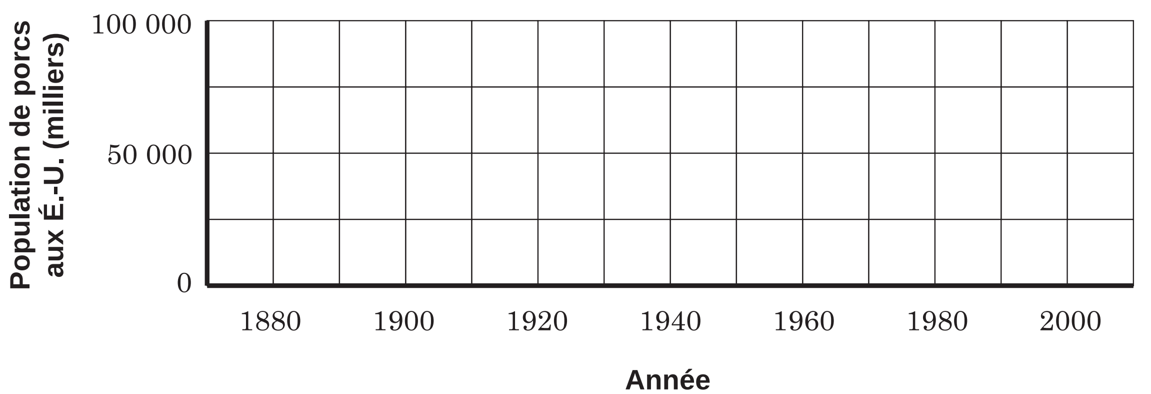
____

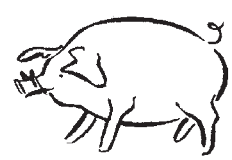
Année	Population de porcs aux É.-U. (milliers)
1890	48 130
1900	51 055
1910	48 072
1920	60 159
1925	55 770
1930	55 705
1935	39 066
1940	61 165
1945	59 373
1950	58 937
1955	50 474
1960	59 026
1965	56 106
1970	57 046
1975	54 693
1980	67 318
1985	54 073
1990	53 821

Graphique A



Graphique B





Quand vous tracez un graphique des données, il est important de déterminer quelles données sont représentées sur l'axe horizontal et l'axe vertical. Généralement, l'axe horizontal est réservé aux variables indépendantes, ou aux nombres de l'exemple sur lesquels les circonstances n'ont aucune influence. L'axe vertical est réservé aux variables dépendants, ou aux nombres qui dépendent des variables indépendantes. Dans notre exemple, l'année est la variable indépendante, puisque les années passent, indépendamment des résultats. La variable dépendante représente le nombre de porcs, puisque la donnée dépend de l'année. Autrement dit, le nombre de porcs est une fonction de l'année.

30. Dans le graphique représentant l'altitude des montgolfières, quelle est la variable indépendante? ____________________

____

La variable dépendante? ____________________

31. Même si l'échelle peut avoir une importance, elle ne compte pas quand il s'agit de déterminer une tendance dans les données. Si on suppose que le mouvement vers le haut et vers la droite d'un graphique représente des valeurs croissantes, lequel des quatre graphiques ci-dessous peut représenter :

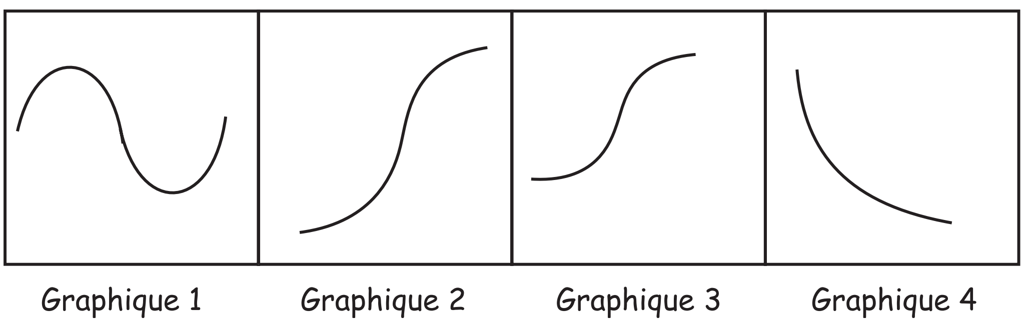
   a) le nombre d'automobiles vendues par rapport au prix de vente? ________

   b) les heures d'ensoleillement par rapport au temps de l'année (mois)? ________

   c) la grandeur par rapport à l'âge? ________

   d) les risques de maladies coronaires par rapport au taux de cholestérol élevé?

   ____

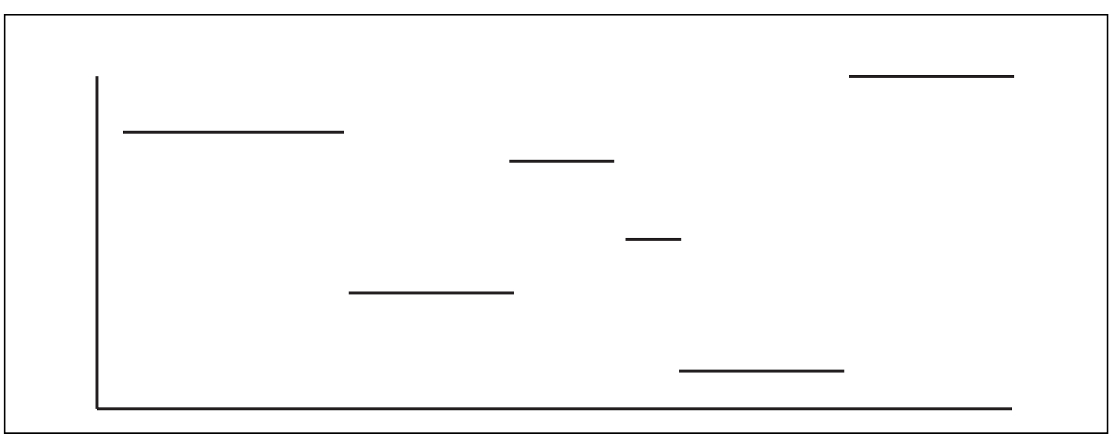


32. Le graphique suivant indique le nombre de livres de nourriture se trouvant dans le réfrigérateur d'une famille selon l'heure qu'il est, entre minuit et midi.

    Décrivez ce qui a pu se passer durant cette période de douze heures.

    ____

    ____

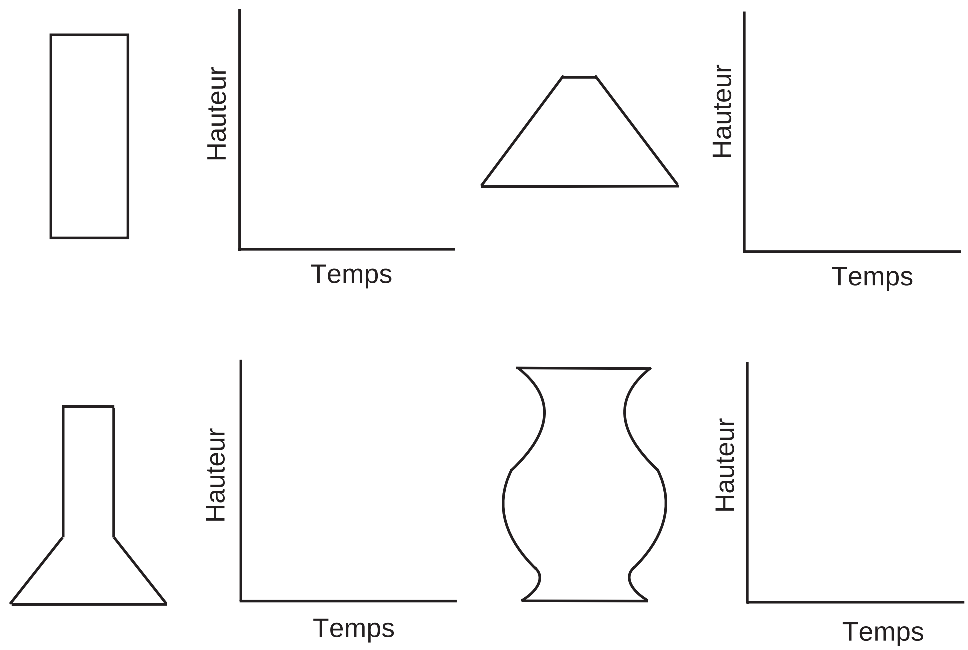


33. Un autre diagramme intéressant établit le rapport entre les ventes de voitures de taille moyenne et l'économie d'essence.

   a) Dessinez un graphique dans l'espace ci-desous pour illustrer la relation entre l'économie d'essence et les ventes. Sur l'axe horizontal (axe des *x*), placez les « milles au gallon », et le « nombre de voitures de taille moyenne vendues » sur l'axe vertical (axe des *y*).

   b) Expliquez pourquoi votre graphique illustre bien le lien entre les deux variables.

34. Un chimiste apporte quatre contenants de formes différentes dans son laboratoire. Il verse du liquide dans chaque contenant à un rythme constant, et enregistre la hauteur du liquide de façon régulière. Pour chacun des contenants, tracez le graphique illustrant la hauteur du liquide.



Pouvez-vous...

- déterminer si une fonction est croissante; décroissante; ni l'une, ni l'autre; les deux?
- déterminer si une fonction est continue ou discontinue?
- créer un exemple réel de graphique périodique ou oscillant?
- créer un exemple réel dans lequel le graphique aurait un domaine continu et une image discrète?
- dessiner le graphique du coût de l'envoi d'un colis par la poste?
- déterminer les valeurs maximale et minimale d'un graphique?
- déterminer le domaine et l'image du graphique d'un ensemble de données?
- déterminer le domaine de la croissance et de la décroissance d'une fonction?

Saviez-vous que...

- la pente d'un graphique indique le rythme de changement de la relation?
- si une fonction décrit la distance entre une particule et sa position originale, le graphique de la dérivée de cette fonction illustre la relation entre le temps et la vitesse de la particule, soit le taux de déplacement de cette particule?
- les courbes S, appelées courbes en ogive, sont utilisées dans le domaine de la psychologie?
- les fonctions peuvent être déterminées pour représenter et décrire des ensembles de données?
- de nombreuses calculatrices graphiques portatives permettent de trouver des formules liées à des ensembles de données?

Ressources pour l'enseignant : Les nouvelles

Habiletés requises

- saisie de données
- échantillonnage
- mesures
- planification d'un projet

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps. L'expérience préalable en saisie de données d'échantillonnage pourra être utile.

Suggestions d'enseignement

Cette activité doit préférablement être effectuée par de petits groupes. Les diverses activités de saisie de données peuvent être divisées. Les élèves devront échantillonner des articles de journaux et des bulletins de nouvelles télévisés. Dans le dernier cas, ils devraient préférablement enregistrer le bulletin télévisé et faire la transcription du bulletin sur papier; cette procédure devrait être exécutée par plus d'une personne. Demandez aux élèves de planifier au préalable comment ils s'attaqueront au problème. Un texte rédigé complet devrait être produit.

Feuille à reproduire : Les nouvelles

Beaucoup de gens apprennent ce qui se passe dans le monde en écoutant le bulletin de nouvelles à la télévision. D'autres lisent les journaux, comme le *Winnipeg Free Press* ou *La Liberté*. Combien de pouces de colonnes de votre journal favori seraient nécessaires pour imprimer le texte complet (sans les messages publicitaires) d'un bulletin de nouvelles d'une demi-heure à la télévision? [Vous devrez recueillir des données pour faire cet exercice. Cherchez des moyens efficaces de réunir l'information dont vous avez besoin, en trouvant l'échantillon le plus précis possible au lieu de compter **tous** les mots.]

Renseignements pour l'enseignant : La couverture d'un toit

Habiletés requises

- visualisation spatiale
- calcul de l'aire
- utilisation de la calculatrice

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

Suggestions d'enseignement

Ce problème exige la visualisation des diverses parties du toit, y compris l'intérieur, afin de déterminer la hauteur du toit en utilisant la pente d'un sur trois. Encouragez les élèves à tracer des diagrammes des différentes surfaces verticales et inclinées.

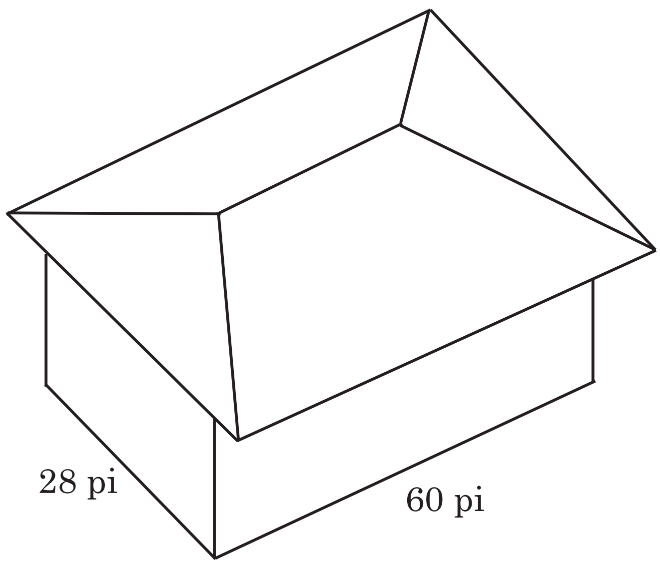
Solutions

Le toit a une largeur de 32 pi et une longueur de 64 pi à l'avant-toit. En utilisant une demi-largeur de 16 pi et une pente d'un sur trois, on détermine que la hauteur verticale doit être de 5 1/3 pi et que la hauteur inclinée doit être de 16,87 pi pour toutes les surfaces. Donc, la ligne de couronnement est de 32 pi. Chaque aire trapézoïdale est de 809,76 ≈ 810 pieds carrés, et chaque extrémité est d'environ 270 pieds carrés. Donc, l'aire totale est de 2 160 pieds carrés. Chaque feuille de 4 pi x 8 pi couvre 32 pieds carrés. Donc, le charpentier aura besoin d'au moins 68 feuilles.

Feuille à reproduire : La couverture d'un toit

La couverture du toit de la maison illustrée sur le croquis doit être refaite. Les plans du toit s'élèvent selon une pente de un pied tous les trois pieds dans une direction perpendiculaire à un mur - c.-à-d. l'inclinaison est de 1/3. Le toit dépasse les murs de deux pieds à l'horizontale (l'avancée est de deux pieds).

Combien de pieds carrés faudra-t-il? Combien de feuilles de 4 pi x 8 pi de revêtement l'entrepreneur devrait-il acheter pour ce toit?



Renseignements pour l'enseignant : Le contrôle de la circulation aérienne à l'aide de transpondeurs

Habiletés requises

- principe de dénombrement
- analyse

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

Suggestions d'enseignement

Les croquis peuvent aider les élèves à visualiser la situation en ce qui concerne les cadrans et les réglages de direction.

Solutions

1. $8^4 = 4\,096$ réglages
2. Huit réglages de direction sur le cadran 1; deux réglages sur le cadran 2 et huit sur chacun des deux autres cadrans : $8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 = 1\,024$

Feuille à reproduire : Le contrôle de la circulation aérienne à l'aide de transpondeurs

Les avions sont équipés d'instruments électroniques appelés transpondeurs, qui permettent aux contrôleurs de savoir de quel avion proviennent les signaux qui apparaissent sur leur écran radar. Les transpondeurs ont 4 cadrans, calibrés de 0 à 7. Le contrôleur demande au pilote de régler son transpondeur selon un nombre de quatre chiffres qu'il lui donne. Ce nombre apparaît ensuite (en forme de code) à côté du signal, qui est associé à un avion particulier, sur l'écran radar.

1. Combien existe-t-il de réglages différents du transpondeur? Est-il possible qu'un contrôleur aérien donne le même nombre à deux avions à un moment donné? Pourquoi ou pourquoi pas?
2. Supposez que la contrôleuse aérienne Suzanne Jean décide d'utiliser les premiers chiffres du réglage pour indiquer la direction d'un avion : 0 correspond au nord, 1 au nord-est, 2 à l'est, et ainsi de suite, alors que le deuxième chiffre indique si un avion décolle ou s'il atterrit. À combien d'avions pourrait-elle donner des réglages distincts?

Renseignements pour l'enseignant : La vitesse et l'état des pneus

Habiletés requises

- visualisation géométrique
- calcul avec les fractions et les décimales
- mesure dans les cercles

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

Suggestions d'enseignement

Vous pouvez aider les élèves en leur demandant de réfléchir à la distance couverte par unité de temps pour les roues de dimensions différentes ayant le même nombre de tours/minute. Le compteur de vitesse est calibré sur ce nombre de tours/minute.

Solutions

1. Étant donné que le rayon et la circonférence de vos pneus sont plus petits, une distance moins grande sera parcourue pour chaque révolution, soit 1,374 po par révolution. Donc, la vitesse indiquée par le compteur de vitesse sera supérieure à votre vitesse réelle.
2. Une circonférence plus grande fera parcourir une plus grande distance au véhicule (1,963 po) par révolution, donc la vitesse réelle est plus grande que celle indiquée par le compteur de vitesse.
3. Si les pneus ne sont pas assez gonflés, leur diamètre et leur circonférence seront moins grands, ce qui fera en sorte que la vitesse indiquée sera supérieure à la vitesse réelle. Des pneus qui ne sont pas assez gonflés ou qui sont trop gonflés ont aussi un effet sur la conduite du véhicule et sur l'usure des pneus.

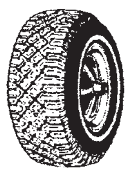
Feuille à reproduire : La vitesse et l'état des pneus

Le compteur de vitesse d'une automobile mesure le taux de rotation de l'arbre de transmission de la voiture et, par le biais du différentiel ou de la transmission, la vitesse à laquelle les roues tournent. Si le compteur de vitesse est précis quand les pneus sont neufs (profondeur de la bande de roulement de 9/32 po) et bien gonflés :

1. Quel sera l'effet sur la lecture de votre compteur de vitesse, quand les pneus sont usés à une épaisseur de 1/16 po (l'épaisseur minimale légale dans plusieurs territoires)?

2. Quel type de changement des lectures d'un compteur de vitesse, résulte du remplacement de pneus usés (bande de roulement de 1/16 po, bien gonflés) par des pneus d'hiver (bande de roulement de 12/32 po, bien gonflés)?

3. Quel effet des pneus qui ne sont pas assez gonflés auraient-ils sur un compteur de vitesse?



Renseignements pour l'enseignant : Rectangles et diagonales

Habiletés requises

- visualisation géométrique
- notions de diviseurs, de nombres premiers et des nombres premiers relatifs
- identification d'une régularité

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

Suggestions d'enseignement

Il existe plusieurs approches à ces questions, lesquelles sont aussi valides les unes que les autres. Cette activité peut être exécutée de manière individuelle, par des groupes de deux élèves ou par des petits groupes. Si elle n'est pas exécutée en groupe, l'enregistrement des données dans une base de données commune paut faciliter l'établissement de conclusions. Il revient aux élèves de décider de la manière dont ils désirent traiter le problème. Si vous dirigez les élèves, vous nuirez au but de l'exercice.

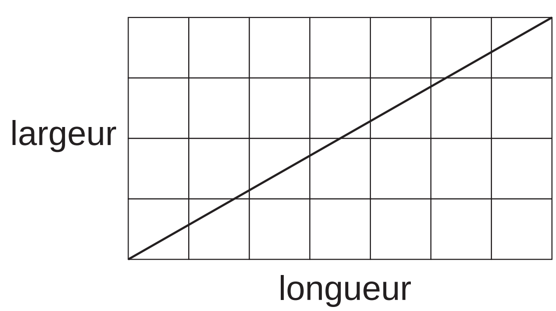
Solutions

Les élèves doivent reconnaître que les dimensions devraient être considérées de différentes façons. Les dimensions peuvent :

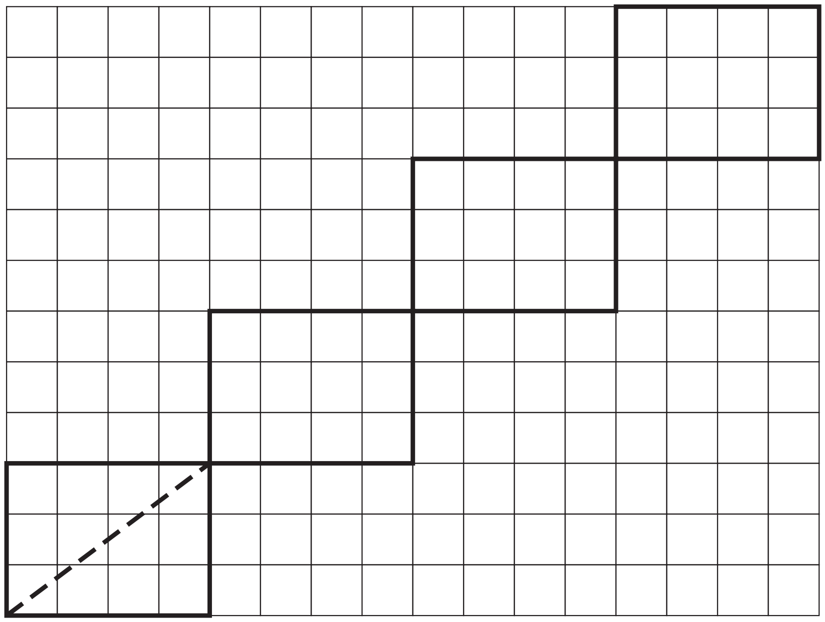
- consister de nombres premiers relatifs;
- avoir un diviseur commun;
- comprendre une dimension représentant le diviseur d'une autre dimension.

Si les données sont regroupées comme ci-dessus, les relations peuvent être plus faciles à visualiser. Vous remarquerez que la notation et la terminologie de la solution ci-dessous sont algébriques. Ceci n'est pas la seule façon d'aborder le problème.

Nombre premier relatif. Dans un rectangle 4 x 7 (premier exemple), les dimensions correspondent à des nombres premiers relatifs. La diagonale doit traverser sept carrés. Dans certaines colonnes, elle traversera deux carrés. Deux carrés sont croisés dans une colonne chaque fois qu'une droite horizontale est croisée, c'est-à-dire trois fois. Le nombre total de carrés croisés (T) est de 7 + 3 = 10, ou pour généraliser : T = longueur + largeur – 1.

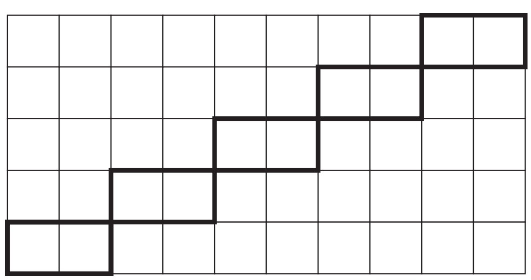


Diviseur commun. Prenons l'exemple d'un rectangle de 12 x 6. Les diagonales croisent des points sur la grille et ils ne traversent pas des carrés supplémentaires. En réalité, il existe quatre rectangles plus petits, quatre étant le plus grand commun diviseur (PGCD). Examinez un des petits rectangles.



Ses dimensions sont de 3 x 4. Ces nombres sont des nombres premiers relatifs et le nombre de carrés croisés est : 3 + 4 – 1 = 6. Cette régularité se répète quatre fois, donc le nombre total de carrés croisés est 6 x 4 = 24. Sur le plan algébrique, si les dimensions sont ax et ay (a étant le diviseur commun), le nombre de rectangles est a, et le nombre de carrés croisés est : $a(x + y – 1)$ ou $ax + ay – a$.

Une dimension correspond au diviseur d'une autre dimension. Prenons l'exemple d'un rectangle de 5 x 10.



Il s'agit d'une version modifiée de l'exemple précédent. Le PGCD correspond au nombre de petits rectangles, et nous obtenons donc 5(1 + 2 – 1) = 10. Dans cet exemple, la formule devient les trois cas ensemble. Le nombre de croisements est :

- longueur + largeur – 1
- $ax + ay – a$ mais ax = longueur et ay = largeur
- $a + ay – a$ mais a = longueur et ay = largeur

Dans les deux derniers cas, a est le plus grand commun diviseur. On peut donc exprimer les équations ci-dessus de la manière suivante :

- longueur + largeur – 1
- longueur + largeur – a
- longueur + largeur – a

Le plus grand commun diviseur de deux nombres premiers relatifs est 1. Donc, toutes les équations ci-dessus se réduisent à une relation. Le nombre de croisements est :

La somme des dimensions moins le plus grand commun diviseur des dimensions.

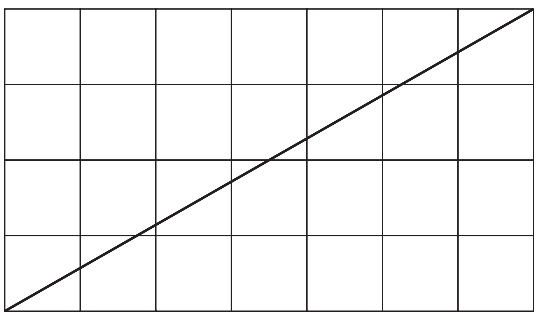
Feuille à reproduire : Rectangles et diagonales

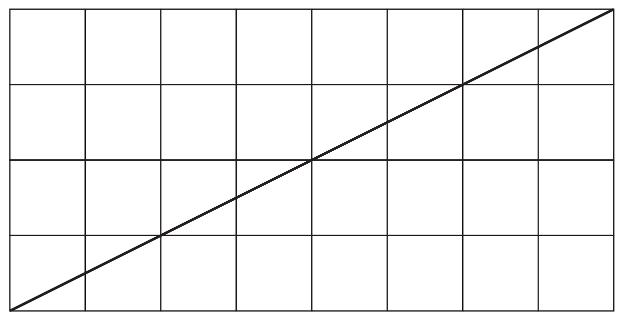
En examinant un rectangle sur un papier quadrillé, et une diagonale dans ce rectangle :

1. Combien de carrés la diagonale traverse-t-elle?
2. Pouvez-vous établir un lien (description ou démonstration mathématique) entre les dimensions du rectangle et le nombre de carrés traversés par la diagonale?

Écrivez les résultats obtenus en décrivant les liens. Utilisez des diagrammes comme ceux qui sont utilisés sur cette page.

Déterminez vous-même comment aborder ce problème. Quelques exemples ci-dessous suggèrent que les dimensions des rectangles peuvent être considérées de différentes façons.





Quelles différences remarquez-vous entre les deux exemples ci-dessus?

Renseignements pour l'enseignant : Les séries éliminatoires

Habiletés requises

- expériences des problèmes de dénombrement
- analyse
- utilisation d'un diagramme en arbre (facultatif)

Quand peut-on utiliser cette activité?

On peut utiliser cette activité en tout temps. Les élèves peuvent manifester une plus grande motivation lorsque les séries comme les séries mondiales de baseball ou les séries de la Coupe Stanley sont en cours.

Suggestions d'enseignement

Rappelez aux élèves qu'une série de cinq parties se termine dès qu'une des équipes remporte trois parties; quatre parties dans le cas d'une série de sept parties. Certains élèves devront peut-être dresser la liste de toutes les possibilités, et d'autres pourront peut-être visualiser ces possibilités. Pour les élèves qui s'intéressent au hockey, le problème peut être adapté aux séries de la Coupe Stanley. Si on utilise cet exemple, ou un exemple fondé sur les séries mondiales de baseball, vous pourriez aussi inclure les séries éliminatoires précédant les finales.

Solutions

1. Si V correspond à *victoires* et si D correspond à *défaites*, voici une liste de possibilités. Les séries peuvent être remportées de 10 façons différentes.

V V V	Une façon en trois parties
D V V V V D V V V V D V	Trois façons en quatre parties
D V V D V D V D V V D D V V V V D V D V V D D V V V V D D V	Six façons en cinq parties

2. Les séries mondiales (qui peuvent comprendre jusqu'à sept parties) peuvent être remportées de 35 façons différentes.

Les séries : Extrait de *Problem of the Week* by Fisher, Lyle et Medigovich, William. © 1981 par Pearson Education, Inc., publié par Dale Seymour Publications, an imprint of Pearson Learning Group. Permission autorisée.

Feuille à reproduire : Les séries éliminatoires

Dans de nombreux sports, une équipe doit gagner trois parties sur cinq pour remporter le championnat. La première équipe qui gagne trois parties gagne la série. De combien de façons une équipe peut-elle gagner le championnat?

Problème 1

Imaginez que vous êtes le journaliste sportif de l'hebdo local ou du journal de ton école. Trouvez la réponse au problème ci-dessus, puis écrivez un court article pour l'expliquer aux mordus du sport qui lisent votre chronique.

Problème 2

Lors des séries mondiales de baseball, une équipe doit remporter quatre parties sur sept pour gagner. De combien de façons peut-elle y arriver?

Saviez-vous...

- que la Série mondiale (*World Series*) a été baptisée ainsi parce qu'elle était commanditée à l'origine par le journal *New York World*?

Les séries : Extrait de *Problem of the Week* by Fisher, Lyle et Medigovich, William. © 1981 par Pearson Education, Inc., publié par Dale Seymour Publications, an imprint of Pearson Learning Group. Permission autorisée.

Renseignements pour l'enseignant : Problèmes divers

Habiletés requises

- visualisation
- raisonnement spatial
- identification d'une régularité

Quand peut-on utiliser cette activité?

En tout temps.

Renseignements pour l'enseignement

- Ces problèmes pourraient être remis aux élèves deux questions à la fois ou d'un seul coup.
- Si vous les remettez par paires, les élèves pourraient remettre la solution à un des deux problèmes.
- Si vous leur remettez tous les problèmes d'un coup, les élèves pourraient fournir des solutions à deux des quatre questions. Cela leur donnerait l'occasion de choisir des problèmes qui les intéressent ou avec lesquels ils se sentent plus à l'aise.
- Dans le cas du problème 1, les élèves pourraient travailler en équipes de deux. Un élève dessine la forme et l'autre place une corde à chaque sommet. Le premier élève peut tracer les diagonales résultantes en suivant la corde. On peut utiliser d'autres exemples de polygones avec des nombres de côtés différents.
- Dans le cas du problème 2, les élèves pourraient dessiner chaque couche et compter les boulets. Une fois le total obtenu, les élèves pourraient rechercher les régularités.

Solutions

1. On peut tracer les polygones, compter les diagonales et déterminer une régularité numérique. On peut ensuite supposer que cette régularité se maintient lorsqu'on détermine le nombre de diagonales d'autres polygones. On peut aussi examiner comment les diagonales sont formées et établir une approche plus généralisée. Prenons l'exemple en premier de l'hexagone. À partir de chaque sommet de l'hexagone, on peut tracer des diagonales jusqu'à trois sommets. Puisqu'il y a six sommets, il y a $\frac{(6)(3)}{2}=9$ diagonales. (On divise par 2 puisque chaque diagonale serait autrement comptée deux fois.) Pour l'heptagone, on peut tracer les diagonales jusqu'à quatre sommets. Il y a donc $\frac{(7)(4)}{2}=14$ diagonales. Cette procédure peut être généralisée. Si un polygone convexe a n sommets, $(n-3)$ diagonales peuvent être tracées à partir de chaque sommet, une jusqu'à chaque sommet, à l'exception du sommet même et de ses voisins immédiats. Donc, un polygone à n côtés a $\frac{(n)(n-3)}{2}$ sommets.

2. Examinez le diagramme ci-dessous qui illustre la couche du fond de boulets de canon.

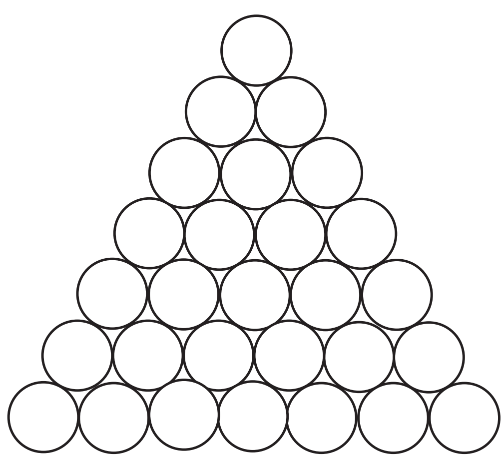
   La couche du fond contient 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28

   La couche suivante contient 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

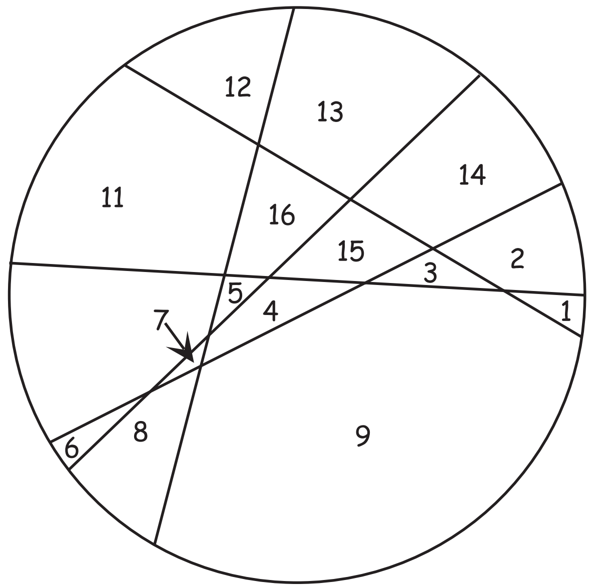
   Et ainsi de suite : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
   1 + 2 + 3 + 4 = 10
   1 + 2 + 3 = 6
   1 + 2 = 3

   La couche du dessus contient un boulet de canon.

   En tout, la pyramide contient 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84 boulets de canon.



3. Pour maximiser le nombre de pièces, chaque coupure doit diviser chaque autre coupure, et un maximum de deux coupures peuvent croiser un point donné. Il y aura 16 pièces, comme illustré ci-dessous.



4. Une pizza de 36 po a un diamètre de 36 po et un rayon de 18 po. Son aire est donc la suivante :

$$A = \pi r^2 = 324\pi \text{ pouces carrés.}$$

Dans le cas d'une pizza de 18 po, $r = 9$. Par conséquent, A = 81π pouces carrés pour une pizza et 162π pouces carrés pour deux pizzas, la moitié seulement que pour une pizza de 36 po – ce n'est pas une très bonne affaire!

Rappel : un rayon deux fois plus grand produit une aire quatre fois plus grande.

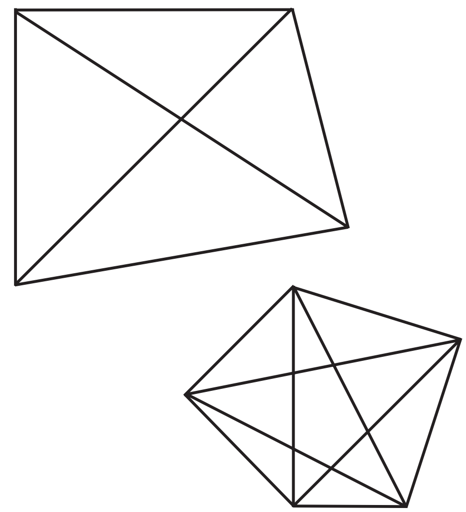
Feuille à reproduire : Problèmes divers

1. Un quadrilatère comporte deux diagonales, alors qu'un pentagone en comporte cinq. Trouvez le nombre de diagonales dans un :

   a) hexagone (6 côtés)

   b) heptagone (7 côtés)

   c) dodécagone (12 côtés)



2. Dans un fort historique, des boulets de canon sont placés de sorte à former un triangle équilatéral, avec sept boulets sur un côté. Une autre épaisseur, elle aussi en forme de triangle équilatéral, a six boulets sur un côté. Les boulets ont été placés couche après couche pour former une pyramide, au sommet de laquelle trône un seul boulet. Combien la pyramide compte-t-elle de boulets de canon?

3. Trouvez le plus grand nombre possible de morceaux que vous pouvez découper dans une pizza de forme circulaire en faisant seulement cinq traits droits. (Vous ne pouvez pas empiler les morceaux.) Expliquez votre réponse.

4. Le restaurant Pizza Pizza annonce que sa pizza de forme circulaire est la plus grande en ville, avec ses 36 po de diamètre. À 35,99 $, le restaurant prétend que c'est la meilleure affaire que le consommateur puisse faire. Vous et vos amis, vous avez très faim et vous avez décidé d'en commander une. Quand le livreur arrive, il vous annonce qu'ils ont eu des problèmes avec leur grand four et qu'il leur était impossible de cuire des pizzas de 36 po de diamètre. Il vous a donc apporté 2 pizzas de 18 po, pour le même prix. Est-ce que vous faites une bonne affaire? Pourquoi? Pourquoi pas?

Annexe II

Ressources additionnelles

Internet

Un grand nombre de sites dans Internet offrent des problèmes et des casse-tête. Si vous utilisez un moteur de recherche pour les trouver, effectuez votre recherche à l'aide des mots-clés tels « jeux mathématiques », « mots croisés », « mots mystère », « cybertests », ...

Dernière consultation en date du 17 octobre 2006.

Rigol'Math

<http://rigolmath.free.fr/index.htm>

Ce site offre plusieurs énigmes, problèmes et curiosités mathématiques.

Énigmatum

<http://www.enigmatum.fr.st>

Le centre des énigmes logiques et mathématiques.

Bric-à-brac d'énigmes et de problèmes

<http://www.bric-a-brac.org/enigmes/maths/>