Unité D
Programmation linéaire
Corrigé

Les solutions sont accompagnées d'une annexe intitulée « Notes à l'intention des élèves ». Ces notes peuvent être copiées et remises aux élèves. Aussi, les questions de l'exercice 5 « Résolution de problèmes de programmation linéaire » peuvent être utilisées dans les tests et les examens.

Exercice 1 : Problèmes préliminaires - corrigé

Ces problèmes ont été conçus pour être effectués par les élève à l'aide de feuilles de calcul. Ils donnent aux élèves un aperçu de l'unité. L'enseignant doit remettre aux élèves une feuille de calcul semblable à celle illustrée ci-dessous et intitulée « Chandails ». Les élèves ne doivent changer que le nombre de chandails.

	A	B	C	D	E
1		Nombre	Temps de coupe	Temps de couture	Profit
2	Manches longues	10	=4*B2	=3*B2	=1,1*B2
3	Manches courtes	20	=3*B3	=B3	=0,6*B3
4	Total	=B2+B3	=C2+C3	=D2+D3	=E2+E3

Les élèves devraient copier les formules utilisées dans la feuille de calcul « Chandails » pour qu'elles leur servent de guides lorsqu'ils créent leur propre feuille de calcul pour le deuxième problème préliminaire.

1.

Cellule	Formule
C2	=4*B2
C3	=3*B3
C4	=C2+C3
D2	=3*B2
D3	=1*B3
D4	=D2+D3
E2	=1,1*B2
E3	=0,6*B3
E4	=E2+E3

Réponse : 12 à manches longues, 24 à manches courtes = profits de 27,60 $

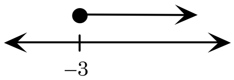
2.

Cellule	Formule
C2	=1,5*B2
C3	=0,5*B3
C4	=C2+C3
D2	=1*B2
D3	=2*B3
D4	=D2+D3
E2	=250*B2
E3	=180*B3
E4	=E2+E3

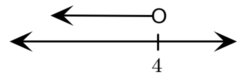
Réponse : 10 réguliers, 30 supérieurs = profits de 7 900 $

Exercice 2 : Inégalités linéaires - corrigé

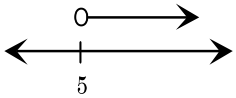
1. $x \geq -3$



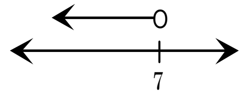
2. $x < 4$



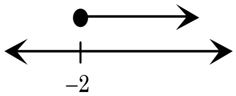
3. $x > 5$



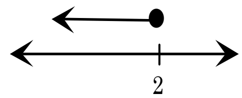
4. $x < 7$



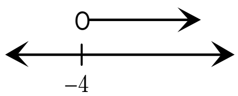
5. $x \geq -2$



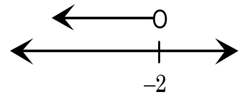
6. $x \leq 2$



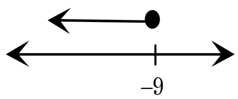
7. $x > -4$



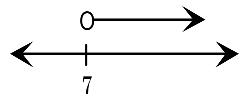
8. $x < -2$



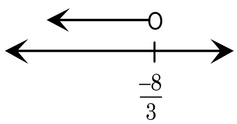
9. $x \leq -9$



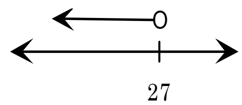
10. $x > 7$



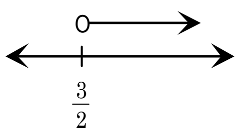
11. $x < -\dfrac{8}{3}$



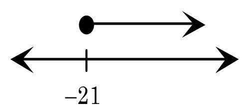
12. $x < 27$



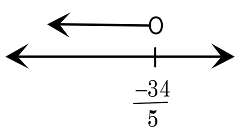
13. $x > \dfrac{3}{2}$



14. $x \geq -21$

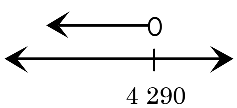


15. $x < \dfrac{-34}{5}$ ou $-6{,}8$



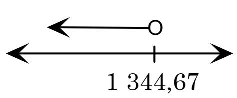
16. a) $1\,322 + 108 < \dfrac{1}{3}x$

$x > 4\,290$



b) $172 + x < \dfrac{1}{3}(2\,200 + 2\,350)$

$x < 1\,344{,}67$



Exercice 3 : Graphiques d'inégalités sur un plan - corrigé

Cette section sert à renforcer la formule $y = mx + b$ et la manipulation algébrique.

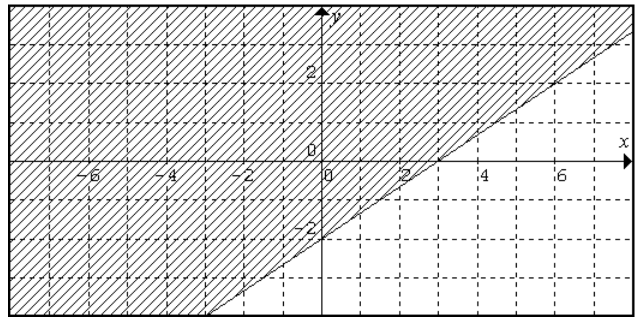
1. $2x - 3y \leq 6 \rightarrow \quad 2x - 3y = 6$

   $y \geq \frac{2}{3}x - 2$

   test (0, 0)

   $2(0) - 3(0) \leq 6$

   $0 \leq 6$ oui



2. $3x + 3y < 9 \rightarrow \quad 3x + 3y = 9$

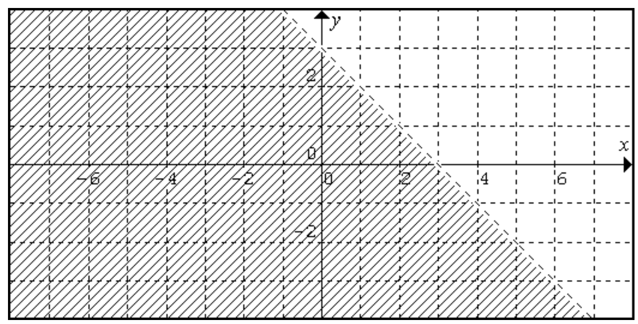
   $y = -x + 3$

   $y < -x + 3$

   test (0, 0)

   $3(0) + 3(0) < 9$

   $0 < 9$ oui



3. $5x - 2y \geq 16 \rightarrow \quad 5x - 2y = 16$

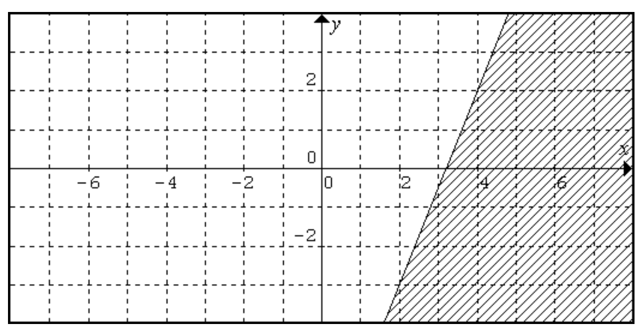
   $y = \frac{5}{2}x - 8$

   $y \leq \frac{5}{2}x - 8$

   test (0, 0)

   $5(0) - 2(0) \geq 16$

   $0 \geq 16$ non



4. $6x - 4y \geq 24 \rightarrow \quad 6x - 4y = 24$

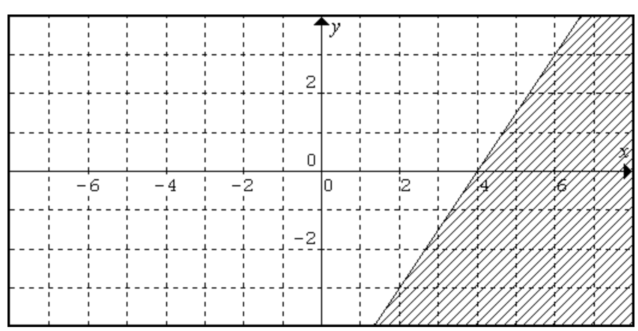
   $y = \frac{6}{4}x - 6$

   $y \leq \frac{3}{2}x - 6$

   test (0, 0)

   $6(0) - 4(0) \geq 24$

   $0 \geq 24$ non



Exercice 3 : Graphiques d'inégalités sur un plan - corrigé (suite)

5. $2x - 7y > 35 \rightarrow \; 2x - 7y = 35$

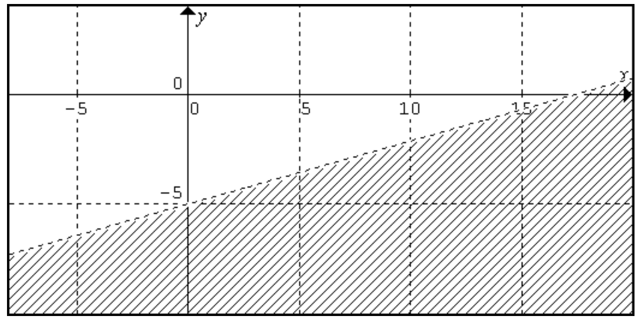
$$y = \frac{2}{7}x - 5$$

$$y < \frac{2}{7}x - 5$$

test (0, 0)

$2(0) - 7(0) > 35$

$0 > 35$ non



6. $-5x - 2y \le 14 \rightarrow \; -5x - 2y = 14$

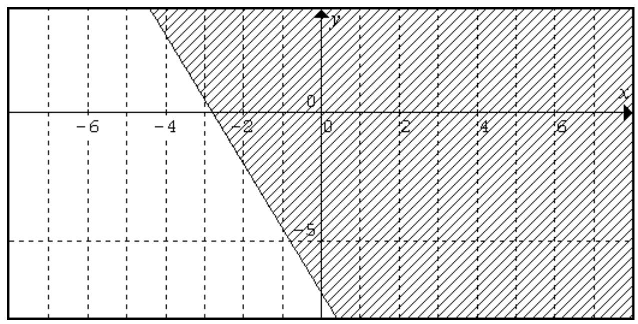
$$y = \frac{-5}{2}x - 7$$

$$y \ge \frac{-5}{2}x - 7$$

test (0, 0)

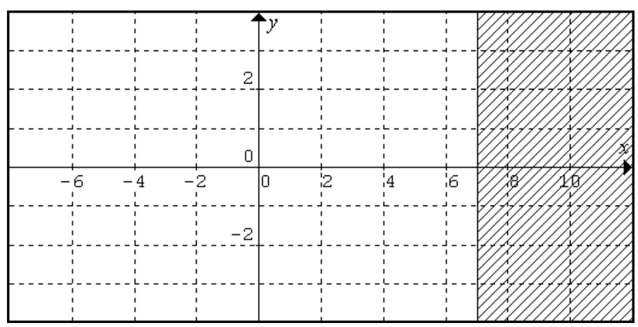
$-5(0) - 2(0) \le 14$

$0 \le 14$ oui



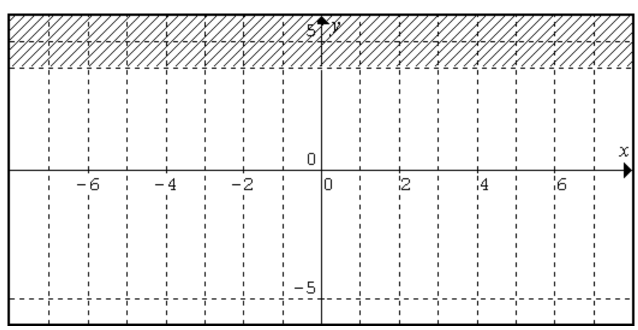
7. $x \ge 7 \rightarrow \; x = 7$

$$x \ge 7$$



8. $y > 4 \rightarrow \; y = 4$

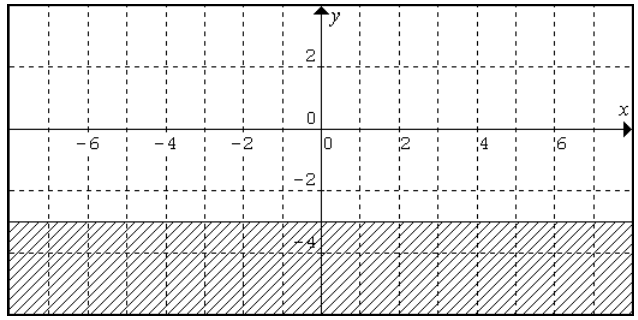
$$y > 4$$



Exercice 3 : Graphiques d'inégalités sur un plan - corrigé (suite)

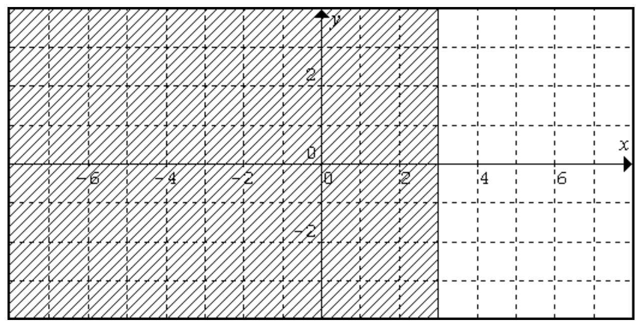
9. $y \le -3 \rightarrow \; y = -3$

$$y \le -3$$



10. $x \le 3 \rightarrow \; x = 3$

$$x \le 3$$



11. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \le -4 \rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = -4$

$$2x + 3y = -24$$

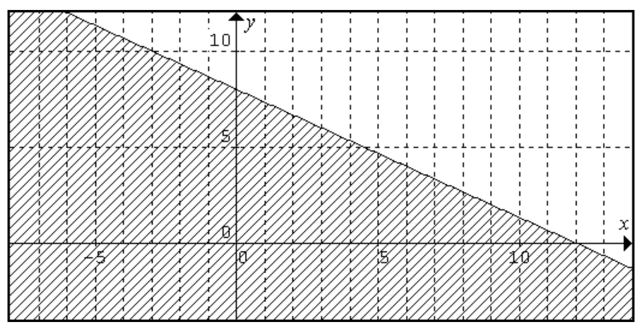
$$y = \frac{-2}{3}x - 8$$

$$y \le \frac{-2}{3}x - 8$$

test (0, 0)

$$\frac{1}{3}(0) + \frac{1}{2}(0) \le -4$$

$0 \le -4$ non



12. $\frac{x + 2y}{3} \ge -2 \rightarrow \; \frac{x + 2y}{3} = -2$

$$x + 2y = -6$$

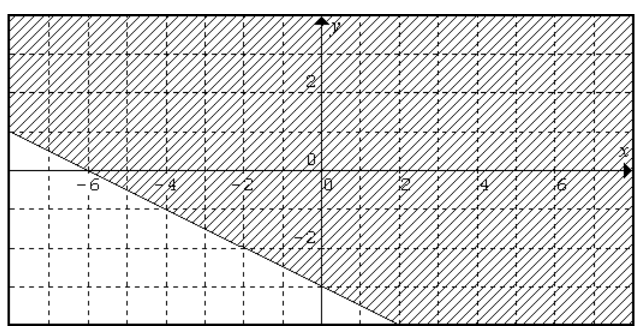
$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$y \ge -\frac{1}{2}x - 3$$

test (0, 0)

$$\frac{0 + 2(0)}{3} \ge -2$$

$0 \ge -2$ oui



Exercice 4 : Graphiques et résolutions de systèmes d'équations linéaires - corrigé

1. a) (1) $y \leq -2x + 3 \rightarrow y = -2x + 3$

test (0, 0)

$0 \leq -2(0) + 3$

$0 \leq 3$ oui

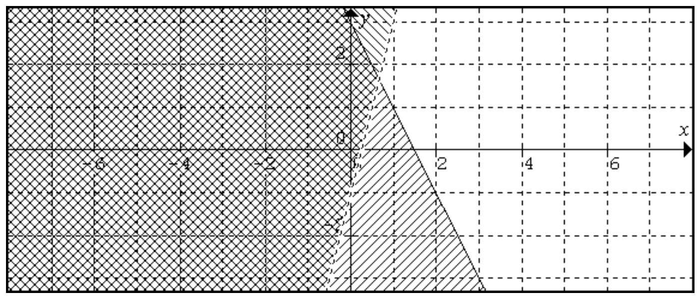
(2) $y > 4x - 1 \rightarrow y = 4x - 1$

test (0, 0)

$0 > 4(0) - 1$

$0 > -1$ oui

$y \leq -2x + 3, \quad y > 4x - 1$



b) (1) $2x + 3y \geq 9 \rightarrow 2x + 3y = 9$

$y = \dfrac{-2}{3}x + 3$

test (0, 0)

$2(0) + 3(0) \geq 0$

$0 \geq 9$ non

(2) $-3x + 4y \geq -4 \rightarrow -3x + 4y = -4$

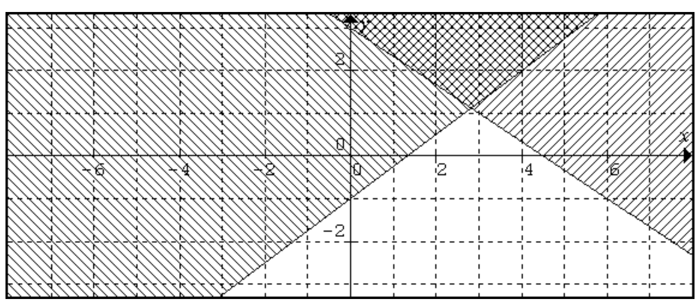
$y = \dfrac{3}{4}x - 1$

test (0, 0)

$-3(0) + 4(0) \geq -4$

$0 \geq -4$ oui

$y \geq \dfrac{-2}{3}x + 3, \; y \geq \dfrac{3}{4}x - 1$



Exercice 4 : Graphiques et résolutions de systèmes d'équations linéaires - corrigé (suite)

c) (1) $2x + y > 3 \rightarrow 2x + y = 3$

$y = -2x + 3$

test $(0, 0)$

$2(0) + 0 > 3$

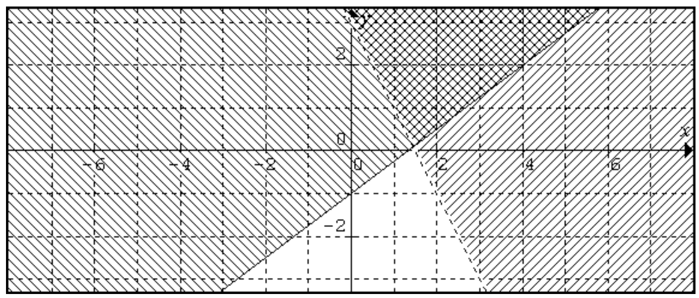
$0 > 3$ non

(2) $y \geq x \rightarrow y = x$

test $(-1, 1)$

$1 \geq -1$ oui

$y > -2x + 3,\ y \geq x$



d) (1) $y \leq x - 3 \rightarrow y = x - 3$

test $(0, 0)$

$0 \leq 0 - 3$

$0 \leq -3$ non

(2) $-2y \leq 2x + 4 \rightarrow -2y = 2x + 4$

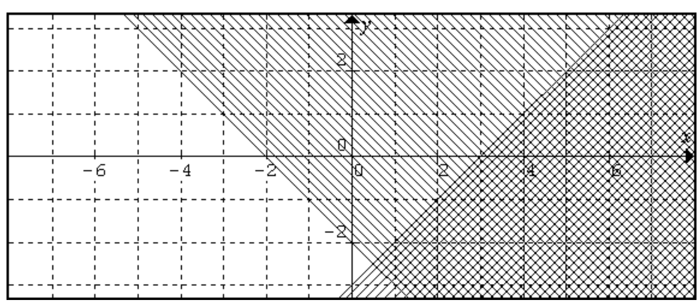
$y = -x - 2$

test $(0, 0)$

$-2(0) \leq 2(0) + 4$

$0 \leq 4$ oui

$y \leq x - 3,\ y \geq -x - 2$



Exercice 4 : Graphiques et résolutions de systèmes d'équations linéaires - corrigé (suite)

e) (1) $-x - y \leq 2 \rightarrow -x - y = 2$

$y = -x - 2$

test $(0, 0)$

$-0 - 0 \leq 2$

$0 \leq 2$ oui

(2) $y - 2x > 1 \rightarrow y - 2x = 1$

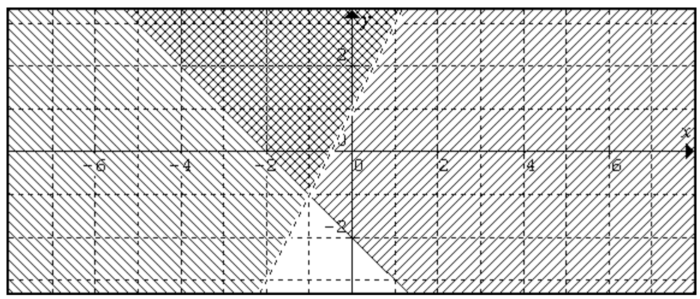
$y = 2x + 1$

test $(0, 0)$

$0 - 2(0) > 1$

$0 > 1$ non

$y \geq -x - 2, \ y > 2x + 1$



f) (1) $3x - 4y < -12 \rightarrow 3x - 4y = -12$

$y = \frac{3}{4}x + 3$

test $(0, 0)$

$3(0) - 4(0) < -12$

$0 < -12$ non

(2) $3x + 4y > 0 \rightarrow 3x + 4y = 0$

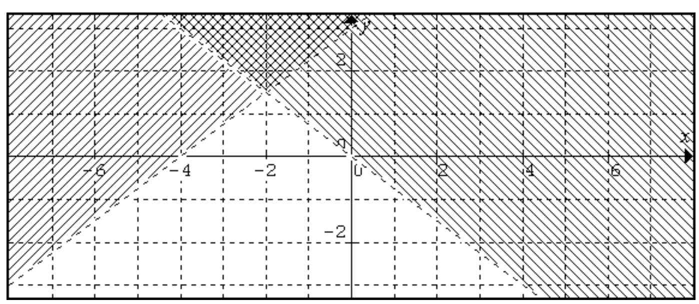
$y = -\frac{3}{4}x$

test $(1, 1)$

$3(1) + 4(1) > 0$

$7 > 0$ oui

$y > \frac{3}{4}x + 3, \ y > -\frac{3}{4}x$



Exercice 4 : Graphiques et résolutions de systèmes d'équations linéaires - corrigé (suite)

g) (1) $y \le -2x+4 \rightarrow y = -2x+4$

test (0, 0)

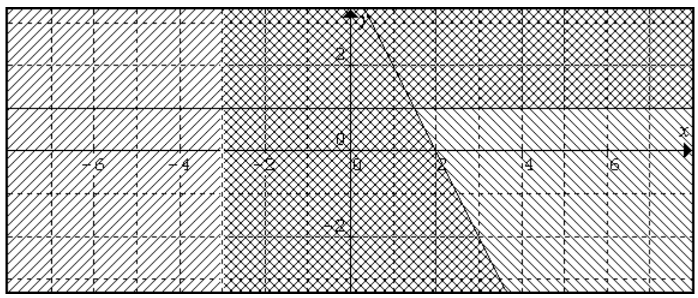
$0 \le -2(0)+4$

$0 \le 4$ oui

(2) $x > -3 \rightarrow x = -3$

(4) $y \ge 1 \rightarrow y = 1$

$y \le -2x+4,\ x > -3,\ y \ge 1$



h) (1) $-x+3y<5 \rightarrow -x+3y=5$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

test (0, 0)

$-0+3(0)<5$

$0<5$ oui

(2) $3x-2y \ge 6 \rightarrow 3x-2y=6$

$y = \frac{3}{2}x - 3$

test (0, 0)

$3(0)-2(0) \ge 6$

$0 \ge 6$ non

(3) $-4x+y<3 \rightarrow -4x+y=3$

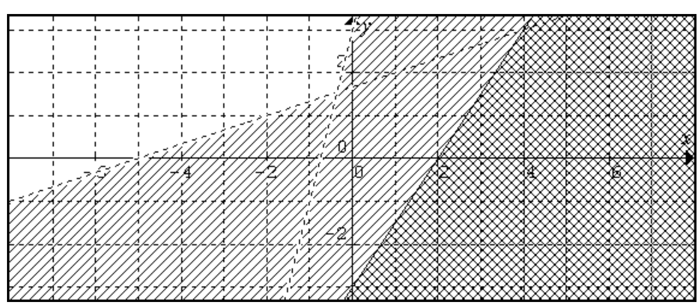
$y = 4x = 3$

test (0, 0)

$-4(0)+0<3$

$0<3$ oui

$y < \frac{x}{3} + \frac{5}{3},\ y \le \frac{3}{2}x - 3,\ y < 4x+3$



Exercice 4 : Graphiques et résolutions de systèmes d'équations linéaires - corrigé (suite)

2. a) $y \leq x + 2$
$y < -x + 4$
$y \geq 0$

b) $y \leq x$
$y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

c) $y \leq -x - 2$
$x < -2$

d) $x > -2$
$x < 4$
$y \leq \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$
$y \geq -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

e) $y \geq x - 3$
$y \leq -2x$

f) $x \geq -3$
$y \leq -x + 1$
$y \geq \frac{1}{7}x - \frac{25}{7}$

g) $y \geq -4$
$y < x - 4$

h) $y < -2x + 2$
$y < \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$

i) $y \leq -\frac{1}{2}x + 2$
$y > -3x - 3$
$y \geq \frac{3}{4}x - 3$

j) $y \leq \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$
$y \leq -\frac{3}{2}x + 7$
$y \leq 4$
$y \geq -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$

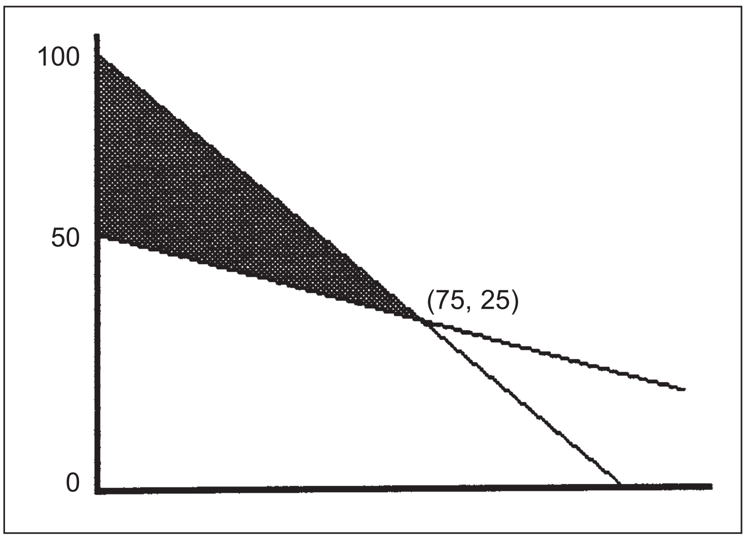
Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé

Note à l'enseignant : La dernière partie de chaque problème permet à l'élève de découvrir que la meilleure solution se situe au sommet de la région des solutions réalisables.

1. a) $x + y \leq 100$

   b) $10x + 30y \geq 1\ 500$

   c)



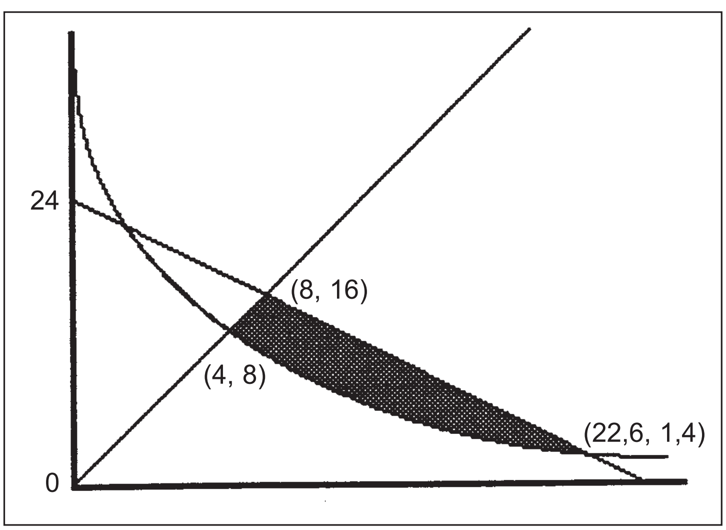
   d) Les solutions comprennent tous les points de la zone ombragée.

2. a) $y < 2x$

   b) $2x + 2y \leq 48$

   c) $xy \geq 32$

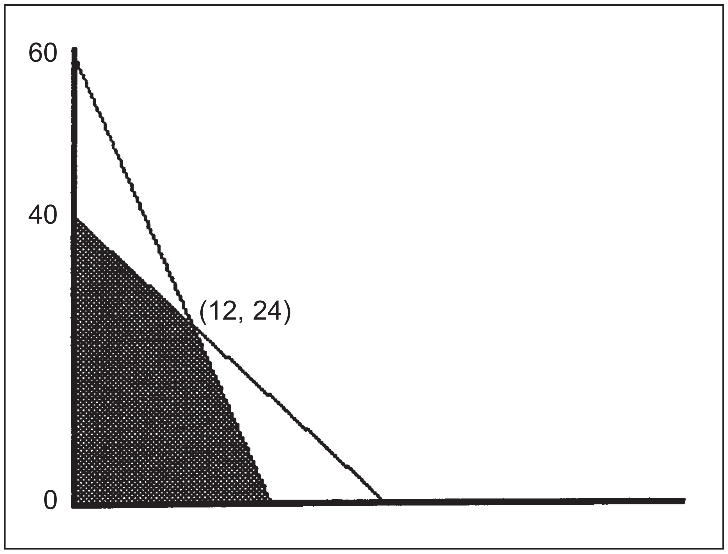
   d)



   e) Les solutions comprennent tous les points de la zone ombragée.

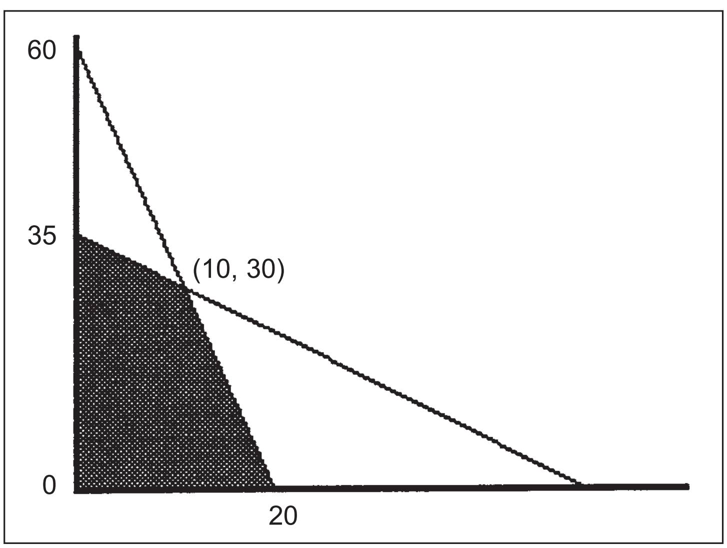
Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

3. a) $4x + 3y \leq 120$
   b) $3x + y \leq 60$
   c)



   d) Les solutions comprennent tous les points de la zone ombragée.
   e) La meilleure solution se situe au point d'intersectoin des deux droites.

4. a) $1{,}5x + 0{,}5y \leq 30$
   b) $x + 2y \leq 70$
   c)



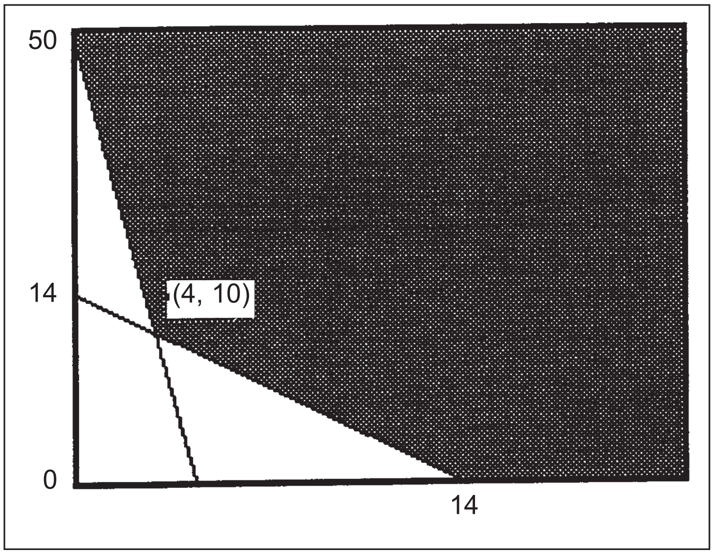
   d) Les solutions comprennent tous les points de la zone ombragée.
   e) La meilleure solution se situe au point d'intersection des deux droites.

Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

5. a) $x + y \geq 14$

   $400x + 40y \geq 2\ 000$

   b)

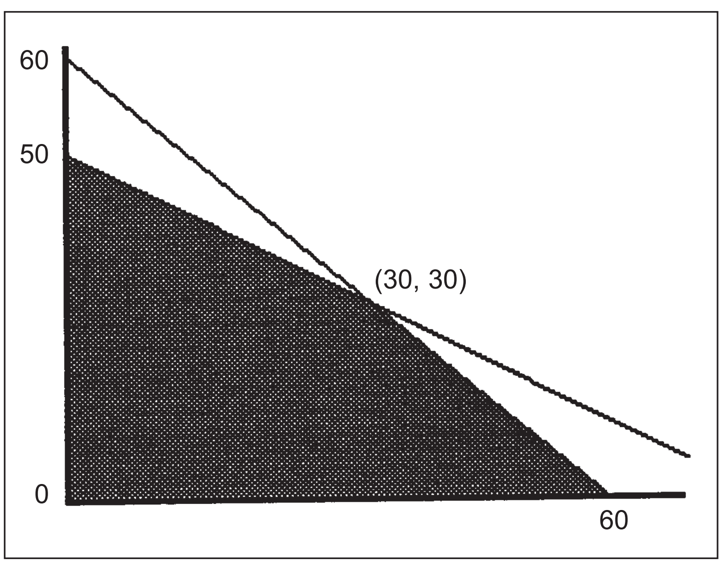


   c) Coût = $1x + 5y$

   La meilleure solution est 4 singes et 10 lapins. Le coût de la nourriture est de 30 $ par jour.

6. $4x + 6y \leq 300$

   $x + y \leq 60$

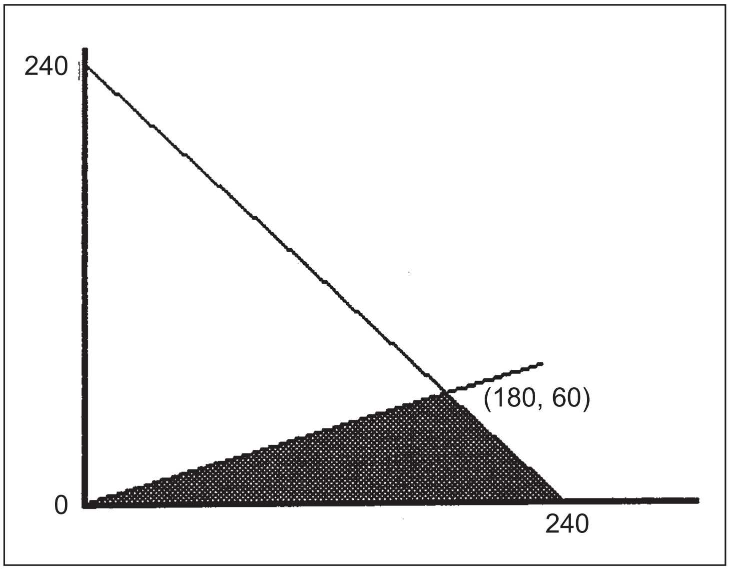


La meilleure solution est 30 véhicules légers et 30 véhicules lourds pour des ventes de 2,1 millions de dollars.

Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

7. $x + y \leq 240$

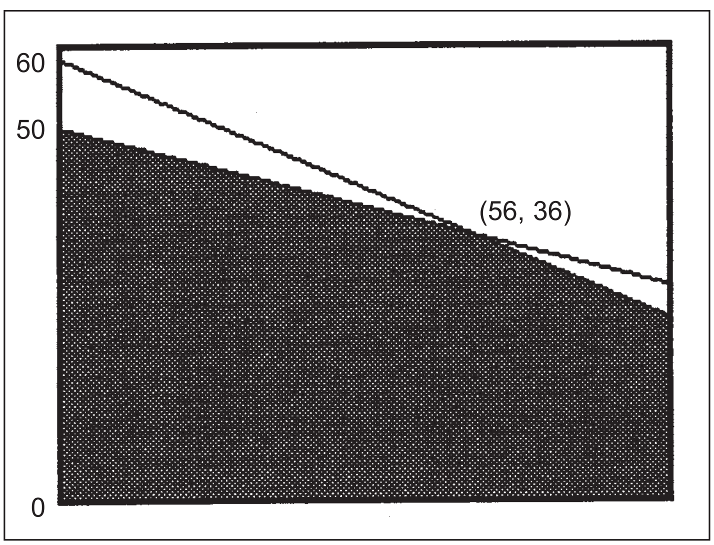
   $x \geq 3y$



La meilleure solution est 180 sacs de *Munchies* et 60 sacs de *Crispios* pour des profits de 390 $.

8. $3x + 7y \leq 420$

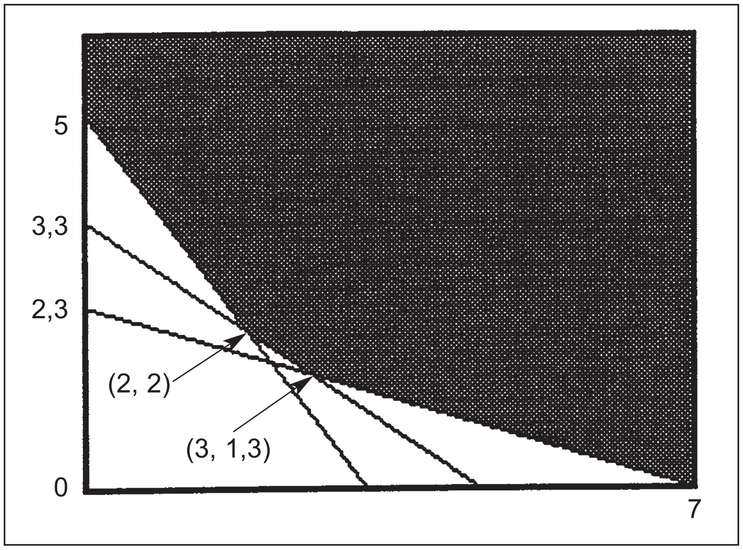
   $2x + 8y \leq 400$



La meilleure solution est 56 tabourets et 36 chaises pour des profits maximaux de 1 640 $.

Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

9. $3x + 2y \geq 10$
   $4x + 6y \geq 20$
   $x + 3y \geq 7$

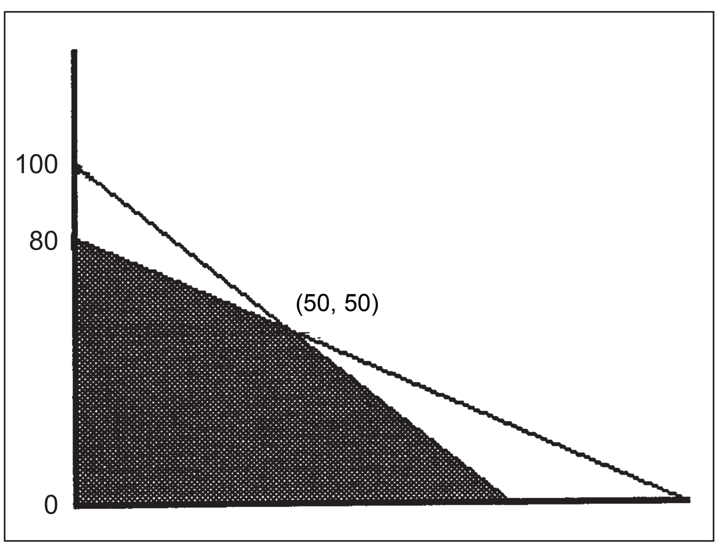


Points possibles d'intersection : (2, 2) et (3, ¾).

Deux sacs de chacun coûteraient 14 $.

Trois sacs de régulier et deux sacs de supérieur (impossible d'acheter $\frac{4}{3}$ de sacs) coûteraient 17 $.

10. $x + y \leq 100$
    $30x + 50y \leq 4000$



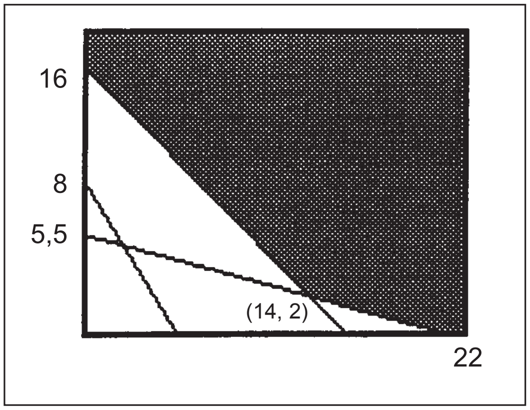
50 m^2 — poivrons
50 m^2 — carottes
Profits de 1000 $.

Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

11. $10x + 5y \geq 40$

    $5x + 5y \geq 80$

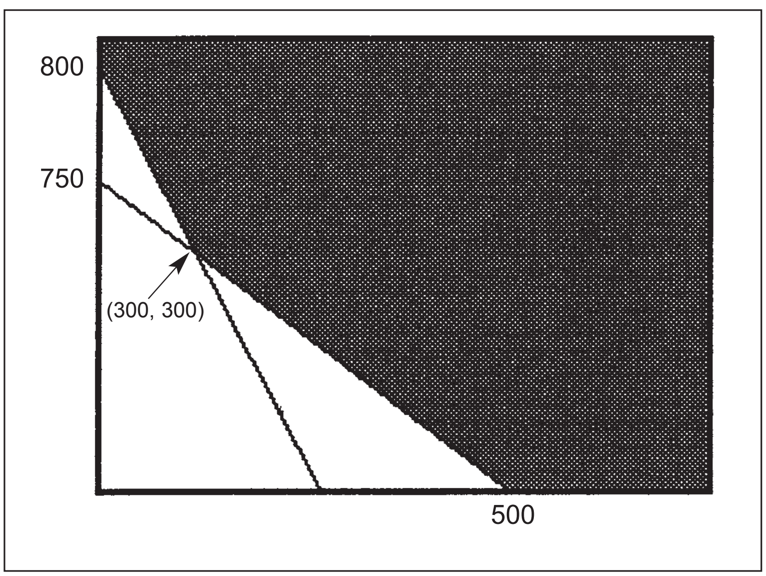
    $5x + 20y \geq 110$



La meilleure solution est 14 heures pour Jean et 2 heures pour Benoît pour des coûts minimaux de 143 $.

12. Cette question est plus difficile que les autres.

    $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} \geq 50$ $\qquad$ $\frac{x}{12} + \frac{y}{20} \geq 40$



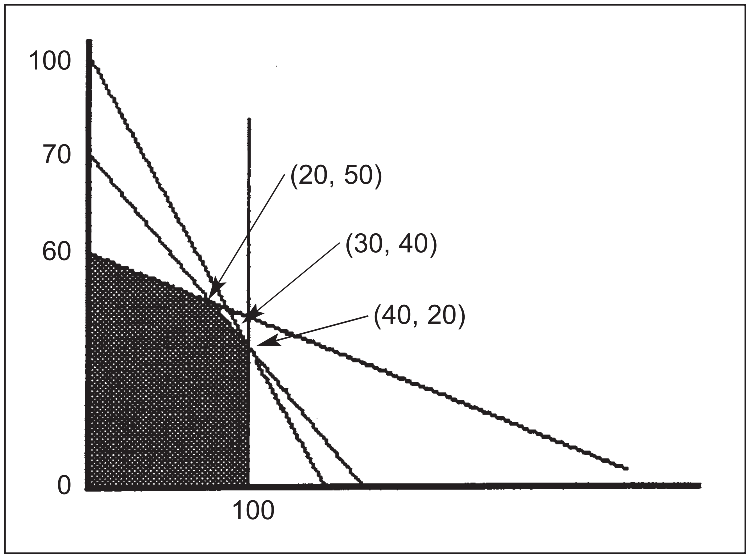
La meilleure solution est 5 heures pour chacun pour des coûts minimaux de 100 $.

Exercice 5 : Résolution de problèmes de programmation linéaire - corrigé (suite)

13. Pour ce problème, les élèves doivent produire un rapport au directeur de la manufacture. Ils devraient produire des graphiques et une note de présentation de qualité. Cet exercice renforce les aptitudes de communication technique enseignées dans le cours. Le graphique peut être produit à l'aide d'un graphiciel ou d'un logiciel de dessin.

    $3x + 3y \leq 210$ $x \leq 40$

    $4x + 2y \leq 200$ $x + 2y \leq 120$

    La meilleure solution est 20 produits A et 50 produits B pour des profits de 1 900 $.

Annexe D-1

Inégalités linéaires

Légende

$>$	plus grand que	exemple : $10 > 6$	
$<$	plus petit que	exemple : $6 < 10$	
$\geq$	plus grand que ou égal	exemple : $10 \geq 6$	$6 \geq 6$
$\leq$	plus petit que ou égal	exemple : $6 \leq 10$	$6 \leq 6$

Une phrase mathématique comme $5 + 8x > 16$ ou $7 - 5x < 27$ se nomme une inégalité linéaire à une variable (x dans cet exemple). Pour résoudre des inégalités, il faut utiliser les mêmes propriétés que pour la résolution d'équations, à une exception près. Lorsqu'on doit faire une multiplication ou une division au moyen d'un nombre négatif, l'ordre change de $>$ à $<$, et vice versa.

Exemple 1

Puisque $-8 < 6$ si nous multiplions les deux côtés par -2

$-2(-8) < -2(6)$

$16 < -12$ faux

$16 > -12$ vrai

Exemple 2

Détermine la valeur de x : $-6 - 3x > 9$

$-3x > 15$ le signe ne change pas

$x < -5$ le signe change

Nous pouvons exprimer la réponse d'une inéquation sur une ligne de nombres.

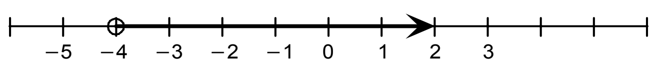
Exemple 3

Détermine la valeur de x et mets ta réponse sur graphiques.

$8 - 3x < 2x + 28$

$-5x < 20$

$x > -4$



Tu remarqueras que nous utilisons un cercle ouvert à -4 pour illustrer que x est *plus grand que* mais ***non*** *égal* à -4.

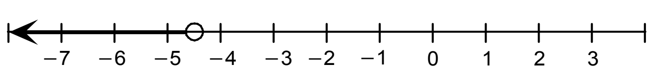
Exemple 4

Résous le problème et mets ta réponse sur graphiques.

$3x - 2 > 5x + 7$

$-2x > 9$

$x < \frac{-9}{2}$ or $x < -4\frac{1}{2}$

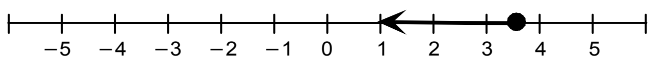


Inégalités linéaires (suite)

Exemple 5

Résous le problème et mets ta réponse sur graphiques.

$$3(x - 2x) \geq 4x - 27$$
$$3x - 6x \geq 4x - 27$$
$$-3x - 4x \geq -27$$
$$-7x \geq -27$$
$$x \leq \frac{-27}{-7}$$
$$x \leq 38{,}6$$



Graphiques d'inégalités sur un plan

La formule générale des inégalités linéaires à deux variables est Ax + By < C ou Ax + By > C.

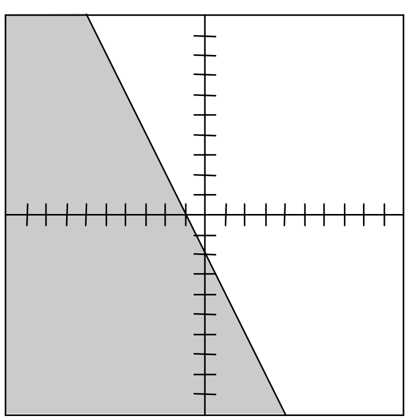
Pour mettre sur graphique une inégalité comme $3x + 5y > 6$, tu dois la traiter comme une équation et la réarranger pour la mettre en équation définie par l'intersection avec l'axe y et la pente ($y = mx + b$). N'oublie pas que m est la pente et que b est l'ordonnée à l'origine.

Étapes :

1. Détermine la valeur de y.
2. Trace une droite comme si le > ou le < était un =.
   Remarque : utilise une ligne pleine si tu as un ≥ ou un ≤; utilise une ligne pointillée si tu as un > ou un <.
3. Si > ou ≥, tu dois ombrager la zone au-dessus de la droite.
   Si < ou ≤ , tu dois ombrager la zone dessous la droite.

Exemple 1

$-x - 2y \geq 4$
$-2y \geq x + 4$
$y \leq -2x - 2$
$m = -2,\ b = -2$

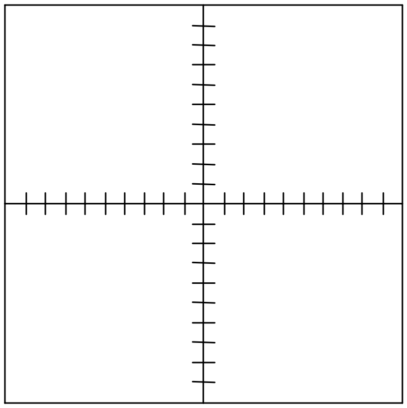


Graphiques d'inégalités sur un plan (suite)

Calcule les exemples ci-dessous avec ta calculatrice graphique.

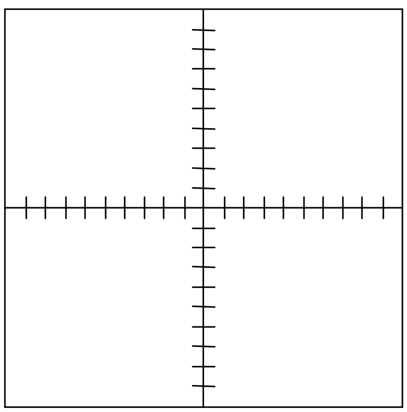
Exemple 2

$y + 2 < 0$
$y < -2$
$m = 0,\ b = -2$



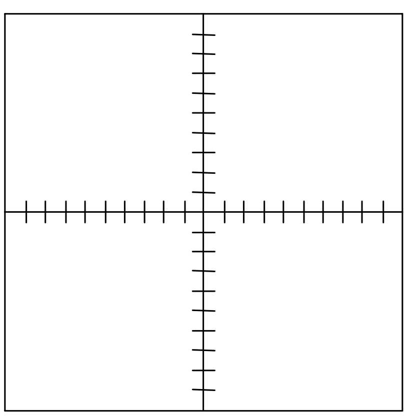
Exemple 3

$x + y > -1$



Exemple 4

$2x - y < 3$



Graphiques et résolution de systèmes d'inégalités

Lorsque tu dois résoudre un système d'inégalités, tu dois mettre les deux inégalités sur la même série d'axes. Les systèmes d'équations ont un « et » implicite. Habituellement, nous ne devrons traiter que deux inégalités, mais les problèmes de programmation linéaire peuvent compter plus de deux inégalités.

Exemple 1

Résous le problème et mets ta réponse sur graphique. Donne des exemples de points de solution possibles.

$x + y > -1$

$3x - 2y > 4$

$x + y > -1$

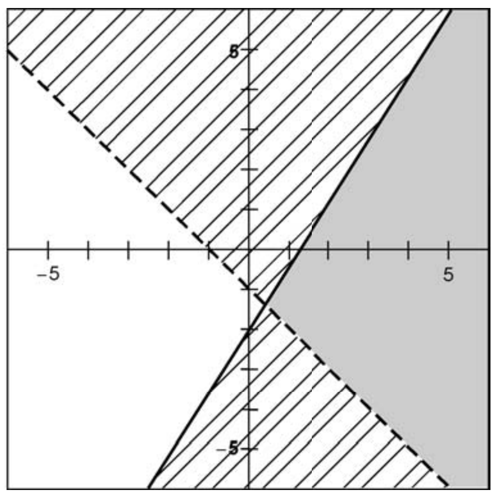
$y > -x - 1$

$m = -1, b = -1$

$3x - 2y \geq 4$

$-2y \geq -3x + 4$

$y \leq \dfrac{3}{2}x - 2$



Les points possibles sont {(2, −1) (5, 2) (4, 4)}

Exemple 2

Résous le problème et mets ta réponse sur graphique.

$2x - y \leq 3$

$x \leq -2$

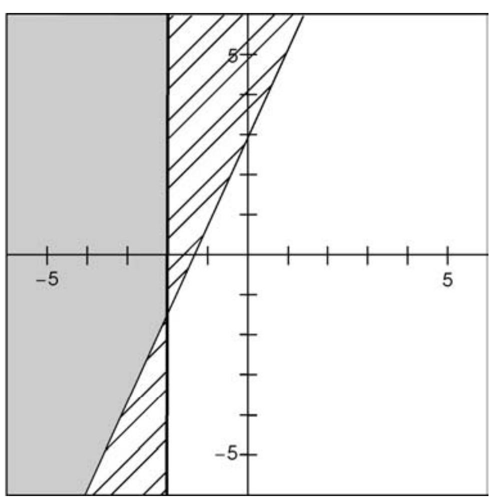
$2x - y \leq -3$

$-y \leq -2x - 3$

$y \geq 2x + 3$

$m = 2, b = 3$

$x \leq -2$



Problèmes textuels - établissement d'inéquations

L'établissement d'un système d'inéquations est semblable à l'établissement d'un système d'équations. Toutefois, tu rencontreras peut-être des expressions comme « au moins » ou « au plus ».

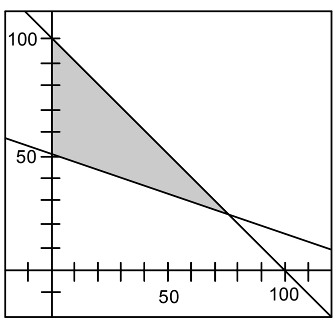
Exemple 1

Le propriétaire d'une animalerie a des tortues et des lapins. Il a de l'espace pour 100 animaux seulement. Il peut vendre les tortues 10 $ chacune et les lapins 30 $ chacun. Il détermine qu'il doit toucher un revenu de 1 500 $ pour que son entreprise soit rentable. Quelles sont ses solutions possibles?

Solution

Utilise les variables suivantes :	x = tortues, y = lapins
S'il ne peut avoir plus de 100 animaux :	$x + y \leq 100$
Inégalité des profits :	$10x + 30y \geq 1500$
Réarrange ces inégalités comme suit :	$y \leq -x + 100$
	$y \geq -\frac{1}{3}x + 50$

Graphique résultant de ces équations (parmi les solutions on retrouve tous les points de la zone ombrée).



Donne deux solutions possibles au propriétaire de l'animalerie.

Exemple 2

Tu dois construire un rectangle dont la longueur est moins de deux fois la largeur, dont le périmètre est d'au plus 48 unités et dont la surface est d'au moins 32 unités.

Solution

Si x = largeur, y = longueur

Les inégalités sont :

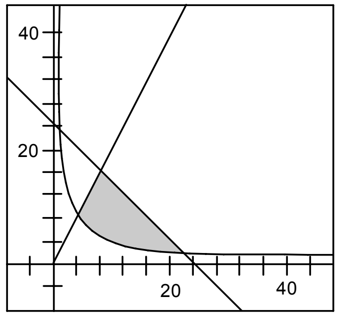
$$y < 2x$$
$$2x + 2y \leq 48$$
$$xy \geq 32$$

Réarrange comme suit :

$$y < 2x$$
$$y \leq -x + 24$$
$$y > \frac{32}{x}$$

Problèmes textuels - établissement d'inéquations (suite)

Le graphique est le suivant :



Donne deux solutions possibles pour les dimensions du rectangle. Les solutions incluent tous les points dans la section ombrée (ex : L = 12, l = 8).