Unité C
Identités trigonométriques

IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans l'unité qui suit, les élèves :
- examinent le graphique d'identités trigonométriques et les analysent;
- vérifient les identités trigonométriques algébriquement, en utilisant les identités trigonométriques de base;
- utilisent les identités relatives à la somme, à la différence et au double d'un angle pour le sinus, le cosinus et la tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :
- d'analyser les identités graphiquement, si c'est approprié;
- d'utiliser diverses techniques algébriques pour vérifier des identités;
- d'intégrer les identités de base pour résoudre des équations trigonométriques;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui feront appel à un « calcul mental », les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe C-1) :
- la décomposition en facteurs de trinômes; la différence des carrés; les facteurs communs;
- les fractions complexes.

Matériel

- outils graphiques

Durée

- 12 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultat d'apprentissage général

Résoudre des équations exponentielles, logarithmiques et trigonométriques et des identités

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes C-2 à C-7, p. C-42 à C-47).

- **définir une équation et une identité trigonométrique**

  Une ***fonction trigonométrique*** est par définition une équation qui comprend au moins une fonction trigonométrique d'une variable. On appelle ces équations des ***identités trigonométriques*** si l'équation est vérifiée quelle que soit la valeur des variables dans les deux membres. Si l'équation n'est pas une identité, elle est appelée ***équation conditionnelle***.

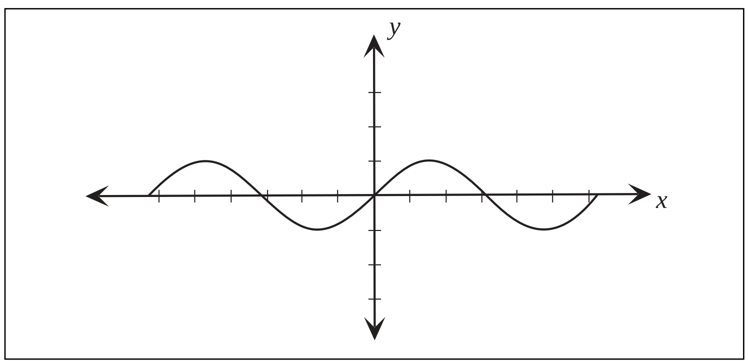
- **examiner et analyser les graphiques des équations ou des identités**

  Exemple 1

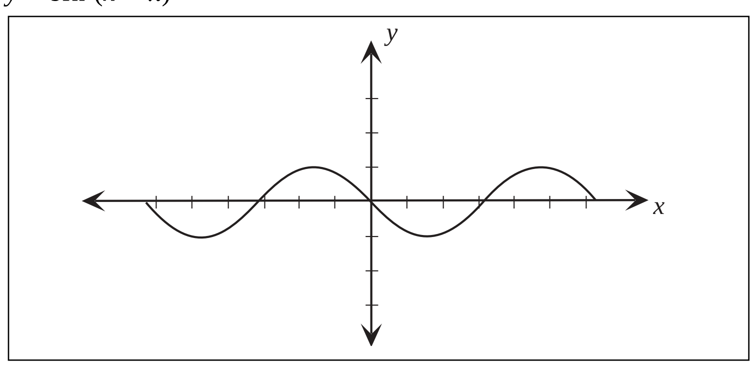
  Trace le graphique de $y = \sin x$ et de $y = \sin (x + \pi)$.

  Solution

  $y = \sin x$



  $y = \sin (x + \pi)$



  Ces graphiques permettent de constater que $\sin x \neq \sin (x + \pi)$. Ce n'est pas une identité.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Simplifie :

a) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \tan\theta$

b) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

c) $\dfrac{\sin\theta}{\sin^2\theta}$

NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en oeuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

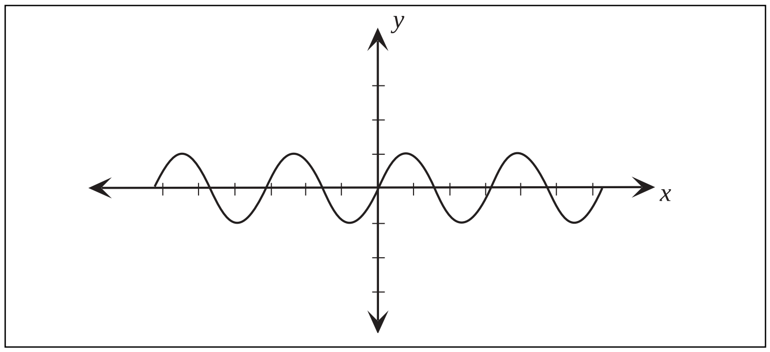
- **examiner et analyser les graphiques des équations ou des identités (suite)**

Exemple 2

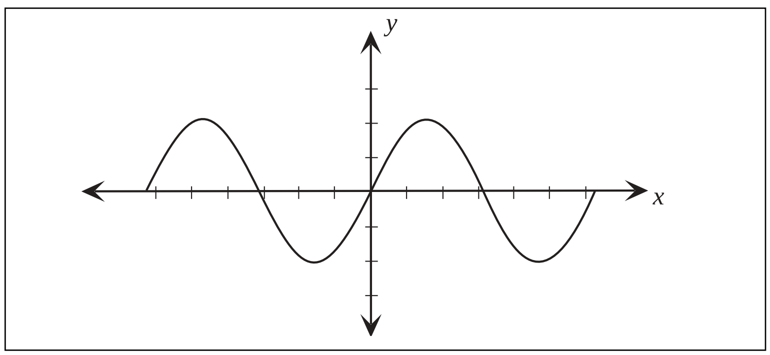
Sur le même système d'axes, trace le graphique de $y = \sin 2x$ et de $y = 2 \sin x$.

Solution

$y = \sin 2x$



$y = 2 \sin x$



Les graphiques permettent de constater que l'équation n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs : ce ne sont pas des identités.

Remarque : La méthode des graphiques ne permet pas de démontrer (vérifier) une identité.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 3, Leçons 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement *– suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **énoncer les huit identités trigonométriques de base**

Identités inverses

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identités de Pythagore

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Variations : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(division par $\cos^2 x$) (division par $\sin^2 x$)

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x} \qquad \boxed{\cot^2 x + 1 = \csc^2 x}$$

- **utiliser des identités pour trouver des autres fonctions circulaires**

Les identités de base peuvent remplacer la méthode du cercle unitaire ou du triangle rectangle pour trouver des autres fonctions circulaires.

Exemple

Trouve $\cos x$ si $\cot x = 2$ et $\sin x < 0$.

Solution

$$\begin{aligned} \cot^2 x + 1 &= \csc^2 x \\ 2^2 + 1 &= \csc^2 x \\ 5 &= \csc^2 x \\ \sqrt{5} &= \csc^2 x \end{aligned}$$

Étant donné que $\sin x < 0$, alors $\csc x = -\sqrt{5}$ et $\sin x = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ ou $\dfrac{-\sqrt{5}}{5}$.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Si tan $\theta = \frac{-5}{13}$ et cos $\theta > 0$, trouve la valeur exacte de sin θ.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement *– suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités pour trouver des autres fonctions circulaires (suite)**

Exemple – suite

Solution – suite

Ainsi, $\cot x = 2$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2$$

$$\cos x = 2 \sin x$$

$$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \text{ ou } \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

- **utiliser des identités pour simplifier des fonctions trigonométriques**

Exemple

Simplifie le plus possible l'expression suivante :

$$\frac{\sin x + \cos^2 x \csc x}{\csc x}$$

Solution

$$\frac{\sin x + \cos^2 x \cdot \csc x}{\csc x} = \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos^2 x \csc x}{\csc x}$$

$$= \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Exprime $\cot\theta \sin\theta$ sous forme de fonction trigonométrique simple de θ.

Choix multiples

Laquelle parmi les expressions suivantes est équivalente à $\cot^2\theta$?

a) $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

b) $\dfrac{1}{1-\sin^2\theta}$

c) $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

d) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

Problèmes

1. Simplifie l'expression suivante :

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x}$$

2. Exprime $1 - \tan^2\theta$ en termes de la fonction sinus seulement.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement
– suite

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **utiliser des identités de base pour démontrer des identités trigonométriques**

Les techniques suivantes permettent de résoudre des identités :

a) Commence par le membre le plus complexe d'une identité et essaie de le réduire pour qu'il devienne le membre le plus simple.
b) Si la technique expliquée en (a) ne semble pas fonctionner, essaie de simplifier chaque membre séparément et de les réduire à la même expression.
c) Effectue les additions et les soustractions nécessaires dans les expressions rationnelles.
d) Effectue les multiplications et les divisions nécessaires dans les expressions rationnelles.
e) Simplifie les fractions en annulant les facteurs communs dans le numérateur et le dénominateur.
f) Si c'est possible, effectue les décompositions en facteurs dans les expressions.
g) Essaie de multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par la même expression.
h) Essaie de reformuler toutes les expressions trigonométriques en termes de sinus et de cosinus.

Exemple 1

Démontre que $\cot x + \tan x = \csc x \sec x$.

Solution

$$
\begin{aligned}
\text{CG} &= \cot x + \tan x \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \ \cos x} \\
&= \frac{1}{\sin x \cos x} \\
&= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \csc x \cdot \sec x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ côté gauche = côté droit

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que :

   a) $\dfrac{\csc^2\theta + \sec^2\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \cot\theta + \tan\theta$

   b) $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}$

2. L'expression $\tan\theta\csc\theta - \sec^2\theta + 1$ est le côté gauche d'une identité. Trouve un côté droit possible pour cette identité, de sorte que la preuve de cette identité comporte au moins trois étapes importantes. Explique le travail que tu as fais.

3. Soit $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$ le côté gauche d'une identité. Jack déclare qu'il peut exprimer le côté droit en termes de la fonction sinus. Jill dit qu'elle peut écrire un côté droit en termes de la fonction cosinus.

   a) Quel sera le côté droit trouvé par Jack?

   b) Quel sera le côté droit trouvé par Jill?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de base pour démontrer des identités trigonométriques (suite)**

Exemple 2

Soit l'identité $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$:

a) vérifie l'identité dans le cas précis où $x = \dfrac{\pi}{3}$.

b) fais une vérification pour un angle général, en utilisant une méthode algébrique.

Solution

a) Côté gauche

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{3}$$

Côté droit

$$\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Côté gauche = Côté droit

b) Côté gauche $= \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$$= \frac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \text{Côté droit}$$

Remarque : Les élèves peuvent résoudre les deux côtés en même temps si aucun signe d'égalité ou symbole d'identité ne se trouve entre les deux. Une fois que les deux côtés sont identiques, ils peuvent conclure que le côté gauche est égal au côté droit.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Démontre que :

a) $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = (\tan^2 \theta)(\sin^2 \theta)$

b) $\dfrac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \dfrac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

Communications | ✔ **Résolution**
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques en utilisant des identités**

Exemple 1

Résous tan x = 2 sin x, où $0 \le x \le 2\pi$.

Solution

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x, \text{ étant donné que } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = 2 \sin x \cos x, \text{ pourvu que } \cos x \ne 0$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x\,(1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

L'équation suivante pose un vrai défi.

Étant donné que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, alors $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$ est une identité qui comprend un radical.
De même, $x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ est une identité qui comporte un radical. Par conséquent, il arrive souvent que, pour résoudre des équations qui comprennent des sommes et des différences d'expressions linéaires de fonctions sinus et cosinus, on élève les deux membres au carré, jusqu'à ce que les « radicaux » soient éliminés. Cependant, étant donné que les deux membres ont été élevés au carré, il peut arriver que certaines solutions n'aient aucun lien avec la fonction - il faut les vérifier.

Exemple 2

Résous $\cos x + 1 = \sqrt{3} \sin x$, où $0 \le x < 2\pi$.

Solution

Remarque : Les termes cos x et $\sqrt{3}$ sin x fonctionnent comme des radicaux. Par conséquent, il faut commencer par élever les deux membres au carré.

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Comment peut-on utiliser des identités trigonométriques pour résoudre des équations trigonométriques?

Problèmes

1. Trouve la valeur de x dans chacune des équations étant donné $0^{\circ} \leq x < 360^{\circ}$:

   a) $\tan x = \sin x \tan x$

   b) $2 \cos x = 3 \tan x$

2. Trouve la valeur de x dans chacune des équations étant donné $0 \leq x \leq 2\pi$:

   a) $2 \cos^2 x - 1 = -\sin x$

   b) $2 \sec^2 x + \tan x = 2$

   c) $\sin x + \cos x = 1$

3. Trouve la valeur de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Exprime les réponses en radians, soit des réponses correctes à trois décimales près ou des valeurs exactes.

$$13 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta = 12 \sin^2 \theta - 6$$

4. Trouve la valeur de x si $x \in \Re$:

$$\tan x \cos^2 x + \tan x \sin^2 x = \sqrt{3}$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-1 analyser des identités trigonométriques graphiquement et les vérifier algébriquement – *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques en utilisant des identités (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

$$(\cos x + 1)^2 = (\sqrt{3}\ \sin x)^2$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 3\sin^2 x$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 3(1 - \cos^2 x)$$

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$

$$2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -1$$

les solutions possibles sont : $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$

Vérifie :

$\frac{\pi}{3}$: $\cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$

Par conséquent, $\frac{\pi}{3}$ est une racine.

$\frac{5\pi}{3}$: $\cos\frac{5\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{3} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$

Par conséquent, la racine $\frac{5\pi}{3}$ n'a aucun lien avec la solution.

π : $\cos\pi + 1 = -1 + 1 = 0$

$\sqrt{3}\sin\pi = \sqrt{3}(0) = 0$

Par conséquent, π est une racine. La solution est $x = \pi, \frac{\pi}{3}$.

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les propriétés des arcs et des angles complémentaires relatives à des fonctions circulaires et des fonctions trigonométriques**

Propriétés des cofonctions relatives aux fonctions circulaires

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$

$\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sec x$ et $\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \csc x$

Propriétés des cofonctions relatives aux fonctions trigonométriques

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ et $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$ et $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

$\csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ et $\sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$

Ainsi, le cosinus d'un angle est équivalent au sinus de son complément et ainsi de suite.

Demandez aux élèves de tracer le graphique des fonctions pour vérifier graphiquement les énoncés ci-dessus.

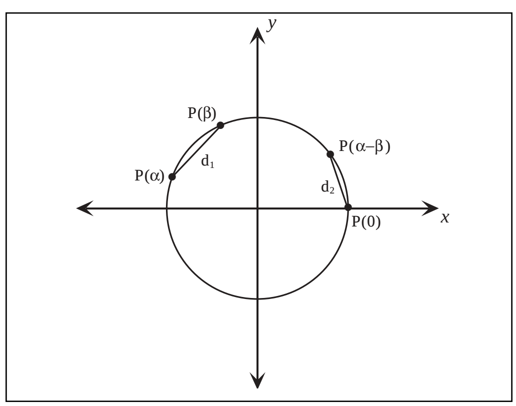
- **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente**

On dérive ces identités pour évaluer et simplifier des expressions.

1. **Identité de base de la différence**

$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

Preuve :

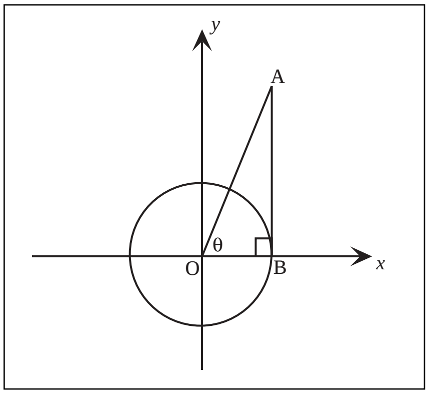


– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problème

Soit le cercle unitaire avec une tangente AB au point B sur le cercle; démontre que la longueur de la tangente AB = tangente (θ).



NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 3, Leçons 3, 4 et 5

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente (suite)**

Les coordonnées de $P(\alpha)$ sont $(\cos \alpha, \sin \alpha)$; les coordonnées de $P(\beta)$ sont $(\cos \beta, \sin \beta)$.

Transfère l'arc qui unit les points $P(\beta)$ et $P(\alpha)$ pour la mettre en position standard afin de créer le point $P(\alpha - \beta)$. Les coordonnées de $P(\alpha - \beta)$ sont : $(\cos (\alpha - \beta), \sin (\alpha - \beta))$, étant donné que la longueur de l'arc entre $P(0)$ et $P(\alpha - \beta)$ est $(\alpha - \beta)$.

Étant donné que les deux arcs ont la même longueur, les cordes ont aussi la même longueur.

$d_1 = d_2$

$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$

$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2}$

$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta + \sin^2 \beta$
$= \cos^2 (\alpha - \beta) - 2 \cos (\alpha - \beta) + 1 + \sin^2 (\alpha - \beta)$
$2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 - 2 \cos (\alpha - \beta)$, étant donné que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
$-2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = -2 \cos (\alpha - \beta)$
$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta)$

Tu peux utiliser l'identité de base de la différence ainsi que les identités des cofonctions et de la symétrie pour démontrer les identités de la somme et de la différence suivantes :

2. $\boxed{\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$

Preuve :
$\cos (\alpha + \beta) = \cos (\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos (-\beta) + \sin \alpha \sin (-\beta)$
Étant donné que le sinus est impair et que le cosinus est pair, alors
$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

3. $\boxed{\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$

Preuve :

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

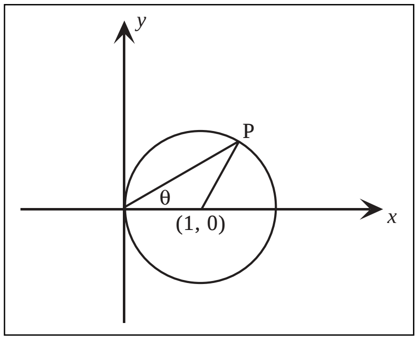
– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Soit un cercle unitaire centré à (1,0); trouve les coordonnées de P en termes de θ.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **dériver les identités de la somme et de la différence pour le sinus, le cosinus et la tangente (suite)**

4. $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

Preuve :

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha-(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,[-\sin\beta]$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Tu peux maintenant trouver les coordonnées de tous les points du cercle unitaire qui sont la somme ou la différence de longueurs d'arc données, sans recourir à la calculatrice.

5. $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

Preuve :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

6. $\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}}$

Preuve :

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$= \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, étant donné que tan x est impair.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Soit $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta - 1$; démontre que $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.
2. Si $\cos\theta = p$, trouve la valeur de $\cos 4\theta$ en termes de p.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de la somme et de la différence pour trouver des valeurs exactes**

Demandez aux élèves de faire des essais pour trouver des combinaisons de longueurs d'arc $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$, qui serviront à trouver d'autres longueurs d'arc exactes.

Exemple 1

a) Utilise des identités pour trouver les valeurs exactes de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et de $\cos \frac{7\pi}{12}$

Solution

Posons $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}\right)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

b) À quel quadrant $P\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ appartient-il?

Solution

Étant donné que $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) < 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$, alors $P\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ appartient au quadrant II.

– *suite*

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Simplifie : $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \tan(\alpha+\beta)$

Choix multiples

La valeur de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ peut être évaluée par :

a) $\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)-\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

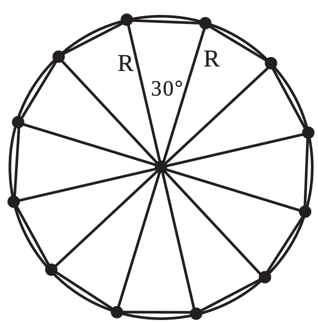
d) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)-\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

Problèmes

1. Trouve la valeur exacte de $\sin \dfrac{29\pi}{12}$.

2. Trouve la valeur exacte de $\sin\dfrac{5\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{16} - \sin\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{5\pi}{16}$

3. Démontre que l'aire d'un polygone à 12 côtés est équivalente à $3\,R^2$, où R est un rayon du cercle circonscrit.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– *suite*

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser des identités de la somme et de la différence pour trouver des valeurs exactes (suite)**

Exemple 2

Trouve la valeur exacte de tan 75°.

Solution

$\tan 75^\circ = \tan (45^\circ + 30^\circ)$

$= \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}$

- **exprimer chacune des expressions en termes de fonctions de θ seulement**

Exemple

Exprime $\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ en termes de fonctions de θ seulement.

Solution

$$\sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta}$$

- **simplifier des expressions trigonométriques sans l'aide de la calculatrice**

Exemple

Évalue la fonction suivante sans utiliser une calculatrice :

$\sin\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{5\pi}{36} + \cos\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{5\pi}{36}$

Solution

La fonction est équivalente à : $\sin\left(\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{5\pi}{36}\right) = \sin\dfrac{9}{36}\pi$ ou $\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul Mental

1. Soit $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$; à quel quadrant $(\alpha + \beta)$ appartient-il?
2. Exprime les mesures suivantes en tant que fonction trigonométrique d'un seul angle : $\sin 61^\circ \cos 47^\circ - \sin 47^\circ \cos 61^\circ$.

Problèmes

1. Soit $\tan \alpha = \dfrac{-4}{3}$ et $\cot \beta = \dfrac{5}{12}$, où α n'appartient pas au quadrant IV et où $\pi \le \beta \le \dfrac{3\pi}{2}$; trouve $\cos(\alpha + \beta)$.
2. $P(\alpha - \beta)$ est un point du cercle unitaire, tel que
   $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}, \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\cos\beta = \dfrac{-5}{13}, \ \pi \le \beta \le \dfrac{3\pi}{2}$.
   Trouve $\sin(\alpha - \beta)$.
3. Trouve la valeur exacte de $\cos 105^\circ$.
4. Trouve la valeur numérique exacte de α :
   $$\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right) = a\sin\theta + b\cos\theta$$
5. Utilise des identités pour simplifier l'expression et l'exprimer sous la forme d'une seule fonction circulaire :
   a) $\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$
   b) $2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– *suite*

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **vérifier des identités en utilisant des identités de la somme et de la différence**

Exemple

Vérifie $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$.

Solution

Côté gauche $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$
$= 2\cos\alpha\sin\beta$

$\therefore$ côté gauche = côté droit

- **établir les identités du double d'un angle pour le sinus, le cosinus et la tangente**

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

ou

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2 - (1 - \cos^2\alpha)$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

ou

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha =$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

3. $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que l'énoncé suivant est vrai :

$$\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -3\sin\theta$$

2. Démontre l'identité :

$$\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cos 2\theta$$

3. Trouve la valeur de x : $0 < x < 2\pi$

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **simplifier des expressions en utilisant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Écris 2 (sin 5)(cos 5) en termes d'une seule fonction trigonométrique.

Solution

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ 2\sin 5\cos 5 = \sin 2(5)$

$= \sin 10$

- **évaluer des expressions en utilisant des identités de l'angle double**

Exemple 1

Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\sin\theta = \frac{3}{5}$, trouve les valeurs exactes de $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$.

Solution

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{3}{5}\\
1-\sin^2\theta &= \cos^2\theta\\
1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 &= \cos^2\theta\\
1-\frac{9}{25} &= \cos^2\theta\\
\frac{16}{25} &= \cos^2\theta\\
\pm\frac{4}{5} &= \cos\theta
\end{aligned}$$

parce que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\
&= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\\
&= \frac{24}{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 1-2\sin^2\theta\\
&= 1-2\left(\frac{3}{5}\right)^2\\
&= 1-2\left(\frac{9}{25}\right)\\
&= 1-\frac{18}{25}\\
&= \frac{7}{25}
\end{aligned}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– *suite*

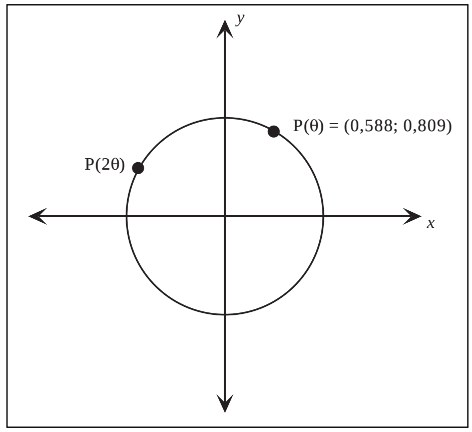
Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **évaluer des expressions en utilisant des identités de l'angle double (suite)**

Exemple 2

Sur le cercle unitaire, les coordonnées du point circulaire P(θ) sont (0,588; 0,809). Trouve les coordonnées de P(2θ).



Solution

Les coordonnées de P(2θ) sont (cos 2θ, sin 2θ).
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\,(0{,}588)^2 - 1 = -0{,}309$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\,(0{,}809)(0{,}588) = 0{,}951$
Par conséquent, les coordonnées de P(2θ) sont (–0,309; 0,951).

- **résoudre des équations comprenant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Résous; exprime les réponses en valeurs exactes.

$$\sin 2x + \sin x = 0 \; ; -\pi \le x \le \pi$$

Solution

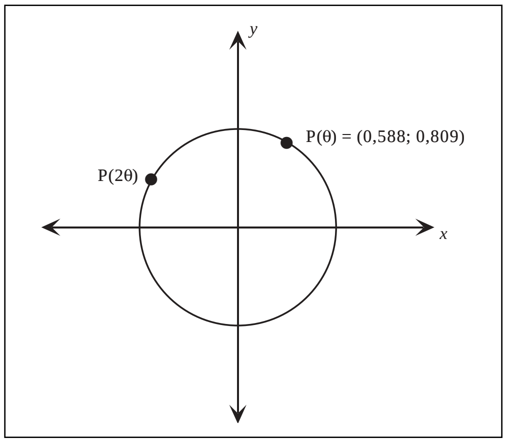
$2\sin x\cos x + \sin x = 0$
$\sin x\,(2\cos x + 1) = 0$
$\sin x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
$x = -\pi, 0, \pi, -\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Sur le cercle unitaire, les coordonnées du point circulaire P(θ) sont (0,588, 0,809). Trouve les coordonnées de :
   a) P(4θ)
   b) $P\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$



2. Si $\cos\dfrac{\pi}{10} = 0,95$, trouve $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

C-2 utiliser les identités de la somme, de la différence et de l'angle double pour les fonctions sinus, cosinus et tangente pour vérifier et simplifier des expressions trigonométriques
– suite

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations où θ est exprimé sous la forme de l'angle double ou d'une longueur d'arc double**

Exemple

Résous l'équation $\sin 2\theta = \sin \theta$, où $0 \le \theta < 2\pi$.

Solution

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$
$$2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0$$
$$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$$
$$\sin \theta = 0 \text{ ou } \cos \theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

L'identité te permet de transformer l'équation en une équation où l'argument θ est le même.

- **vérifier d'autres identités en utilisant des identités de l'angle double ou d'un arc double**

Exemple

Vérifie : $\dfrac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$.

Solution

$$\text{Côté gauche} = \frac{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}}{\sec^2 \theta}$$
$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta$$
$$= 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$
$$= \sin 2\theta$$

$\therefore$ Côté gauche = côté droit

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trouve la valeur de θ si $0 \leq \theta \leq 2\pi$: $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$
2. Trouve la valeur de x si $0^\circ \leq x < 360^\circ$:
   a) $\sin 2x = \sin x$
   b) $\sin 2x + \cos x = 0$
3. Vérifie :
   a) $\sin 2x \sin x \cos x - \sin^2 x = \cos 2x \sin^2 x$
   b) $\dfrac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$