Annexe E-1

Exercice d'algèbre

- **multiplication de polynômes**

  Les élèves devraient être à même de multiplier deux binômes sans effectuer d'étapes intermédiaires.

  Exemple

  Multiplie et regroupe les termes semblables :

  a) $(x + 2)(x - 1)$

  b) $(x + 3)(x - 3)$

  c) $(x + 4)(x + 4)$

  d) $(x - 9)^2$

  Solutions

  a) $x^2 + x - 2$

  b) $x^2 - 9$

  c) $x^2 + 8x + 16$

  d) $x^2 - 18x + 81$

- **décomposer en facteurs des trinômes qui sont des carrés parfaits**

  Exemple

  Décompose entièrement en facteurs les expressions suivantes :

  a) $x^2 - 2x + 1$

  b) $x^2 + 6x + 9$

  c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

  Solution

  a) $(x - 1)^2$

  b) $(x + 3)^2$

  c) $(x - \sqrt{2})^2$

- **compléter le carré**

  Exemple

  Pour quelles valeurs de k le trinôme sera-t-il un carré parfait?

  a) $x^2 - 10x + k$
  b) $x^2 + 12x + k$
  c) $x^2 + 3x + k$

  Solution

  a) 25
  b) 36
  c) $\frac{9}{4}$

Développement du concept selon Frayer

Annexe E-2

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles Toujours

- il s'agit d'une sélection de nombres pour laquelle l'ordre est ***important***
- les objets sont classés dans un ***certain ordre*** ou dans une rangée

Caractéristiques non essentielles Parfois

- permutations avec des restrictions
- permutations avec des répétitions et des restrictions
- permutations circulaires
- notation factorielle

Caractéristiques non pertinentes Jamais

- l'ordre n'intervient pas
- ce n'est pas une combinaison

Sujet - Concept

Permutations

Exemples

On doit placer huit garçons dans une rangée. Deux garçons particulièrement difficiles n'ont pas la permissions de s'asseoir ensemble, ou ils peuvent s'asseoir à l'une des extrémités de la rangée. De combien de façons peut-on les placer?

1. $\underbrace{\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{5}}_{}$ $= 6 \cdot 5 \cdot 6! = 21\ 600$

   Deux autres garçons que les garçons difficiles

   S'assoient ensemble (les autres garçons)
2. Grouper les garçons ensemble :
   $6! \cdot 5 \cdot 2 = 7200$
   Ils peuvent s'asseoir à cinq autres places (pas un à côté de l'autre), et il faut multiplier par deux parce qu'ils peuvent échanger leur place.
3. $21\ 600 - 7200 = 14\ 400$

Exemple non pertinent

Un groupe de 15 chasseurs de trésors arrivent dans une clairière dans la forêt, où ils voient cinq sorties. On décide que sept iront à gauche, quatre sortiront par le centre et les autres iront par la droite. De combien de façons cela peut-il être réalisé?

$${}_{15}C_7 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 = 45\ 045$$

Faire un dessin ou un diagramme en arbre

${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$: « n » objets pris « r » à la fois

« $n!$ » est un entier positif appelé « factorielle n »

$\dfrac{{}_nP_r}{n} = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ Permutations circulaires

$\dfrac{n!}{j!k!l!\ldots}$ Permutations comprenant des répétitions

Définition

Arrangement d'un ensemble d'objets dans un ordre particulier. Pour n objets, le nombre de permutations est ($n!$). Si « r » objets doivent être choisis parmi un ensemble de « n » objets au total, le nombre de permutations est calculé selon la formule $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Développement du concept selon Frayer

Annexe E-3

Caractéristiques

Caractéristiques essentielles Toujours	Caractéristiques non essentielles Parfois	Caractéristiques non pertinentes Jamais
• l'orde est toujours important • selon la formule $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	• peuvent être disposées en rangée ou en cercle • les principes de l'addition ou de la multiplication peuvent s'appliquer	• on ne peut remplacer des combinaisons par des permutations

Sujet - Concept

Permutations

Exemples

Combien de « mots » de quatre lettres peut-on former avec les lettres du mot DIMANCHE?

Solution

<u>8</u> <u>7</u> <u>6</u> <u>5</u> = 1680 ways

Processus

Pour former des mots de quatres lettres, tu dois insérer des espaces vides. Le mot *dimanche* comprenant huit lettres, tu peux placer huit lettres dans le premier espace. Il reste sept lettres pour le deuxième espace, six pour l'espace suivant et cinq pour le dernier. Il s'agit d'une permutation parce que l'ordre est important.

Exemple non pertinent

Quand tu joues à la Loto 6-49, tu peux choisir 6 nombres de 1 à 49. De combien de façons peux-tu faire ce choix?

Solution

$_{49}C_6$ = 13 938 816 façons

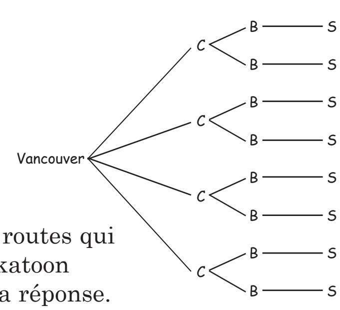
Processus

Utilise la calculatrice pour trouver la réponse.

Cet exemple n'est pas pertinent parce qu'il illustre une combinaison; l'ordre n'intervenant pas dans le choix des six chiffres, ce n'est pas une permutation.

Trace un dessin ou un diagramme en arbre

À partir de l'aéroport international de Vancouver, quatre corridors aériens mènent à Calgary, deux corridors mènent de Calgary à Brandon, et un corridor mène de Brandon à Saskatoon. Combien de corridors aériens différents conduisent de Vancouver à Saskatoon?



Dénombre les routes qui mènent à Saskatoon pour trouver la réponse.

Définition

Une permutation est un arrangement ***ordonné*** d'objets distincts, en rangée ou en cercle.

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-4

À quoi ça ressemble?	**À quoi ça ne ressemble pas?**
➢ Les combinaisons sont comme le théorème du binôme, qui utilise des combinaisons. ➢ Le théorème du binôme utilise l'équation $(r + 1)^e$ terme = ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ pour obtenir le n^e terme du développement d'un binôme.	➢ Les combinaisons ne sont pas des permutations. ➢ Dans les permutations, l'ordre est important et les problèmes ont plus de résultats possibles.

Combinaisons

Caractéristiques

- Le nombre de combinaisons est donné par l'équation ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- n représente le nombre d'objets parmi lesquels on fait un choix
- r représente le nombre d'objets choisis

Exemple

Un club de placement compte quatre membres féminins et six membres masculins. Un comité de recherche composé de trois personnes doit être formé. De combien de façons peux-tu y arriver si :

a) le comité doit compter deux femmes et un homme;
b) il doit y avoir au moins une femme dans le comité;
c) les trois membres doivent être du même sexe.

Solutions et Processus

a) $({}_4C_2 \cdot {}_6C_1) = 36$ façons
- Utilise la formule ${}_nC_r$.
- ${}_4C_2$ représente la sélection de deux femmes parmi un total de cinq, et ${}_6C_1$ représente la sélection d'un homme parmi un total de six.
- Les deux événements doivent se produire en même temps, ce qui t'oblige à les multiplier ensemble selon le principe du dénombrement factoriel.

b) $({}_4C_1 \cdot {}_6C_2) + ({}_4C_2 \cdot {}_6C_1) + ({}_4C_3 \cdot {}_6C_0) = 100$ façons
- Il y a trois scénarios possibles : 1 femme, 2 hommes
  2 femmes, 1 homme
  3 femmes, 0 homme
- Dans chaque scénario, applique la formule ${}_nC_r$ comme tu l'as fait dans la partie (a), puis additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent.

c) $({}_4C_3 \cdot {}_6C_0) + ({}_6C_3 \cdot {}_4C_0) = 24$ façons
- Il y a deux scénarios possibles : 2 femmes, 0 homme
  0 femme, 3 hommes
- Applique la formule ${}_nC_r$ pour chaque scénario et additionne les résultats parce que chaque scénario doit se produire à un moment différent.

Définition	**Questions pratiques**
Une combinaison est une sélection parmi un certain nombre d'objets, dans laquelle ***l'ordre n'intervient pas.***	Exercice 33, N[os] 1–11 Exercice 34, N[os] 1–5

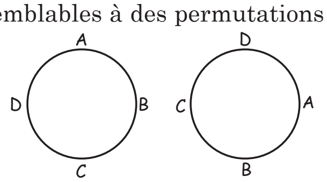
Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n[o] 27.

Vue d’ensemble du concept

Annexe E-5

À quoi ça ressemble?

- Semblables à des permutations



- Ils semblent différents, mais on a tout simplement avancé chaque lettre d’un espace (chacune des quatre lettres occupe la même position par rapport aux autres).

À quoi ça ne ressemble pas?

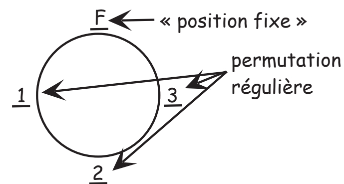
- Elles sont différentes des permutations parce que, dans les permutations circulaires, l’ordre est important (l’arrangement des objets autour du cercle influe sur le nombre possible d’arrangements).

Permutations circulaires

Caractéristiques

- une permutation ciculaire de n éléments peut être calculée à l’aide de la formule : $\frac{{}_nP_r}{n} = (n-1)!$ (p.ex., 10 personnes peuvent être assises de $(10-1)! = 362\,880$ façons autour d’une table).

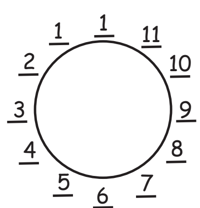
Illustration



Exemple 1

De combien de façons les douze chevaliers du roi Arthur peuvent-ils être placés autour de la table ronde?

Solution



(12 – 1)! ou 11! façons = 39 916 800 façons

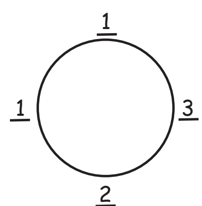
Processus

1. Commence par insérer un espace autour de la « table » — la position fixe — où tu peux placer un seul objet.
2. Remplis tous les autres espaces en appliquant la formule de la permutation régulière.

Exemple 2

De combien de façons quatre perles de couleurs différentes peuvent-elles être arrangées pour créer un bracelet.

Solution



(4 – 1)! = 6 façons
6 ÷ 2 = 3 bracelets

Processus

1. Dispose les perles en cercle et, au moyen de permutations circulaires, calcule le nombre de bracelets possibles.
2. Divise par deux parce que le bracelet serait le même si les perles étaient placées dans l’ordre inverse.

Définition

Les permutations ciculaires sont effectués sur des objets placés en cercle (non linéaires).

Questions pratiques

Exercice 31, n^os^ 1(a), 2
Exercice 32, n^o^ 4

Vue d’ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n^o^ 27.

Vue d'ensemble du concept

Annexe E-6

Théorème du binôme

Caractéristiques

- utilise la formule : ${}_nC_r a^{n-r} b^r$
- utilise les combinaisons
- n est un nombre entier positif
- x et y sont deux nombres quelconques
- r doit être égal au n^e terme –1

Illustration

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
etc

Le triangle de Pascal suit un modèle similaire au modèle du théorème du binôme.

Exemple 1

Trouve le terme qui contient x^{20} dans$(2x - x^4)^{14}$.

Solution

$r = 0$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$

Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le premier terme.

1^er^ terme $(0 + 1)$ $= {}_{14}C_0(2x)^{14}(-x^4)^0$
$= 1(16384x^{14})1$
$=16384x^{14}$

$r = 1$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$
Insère les nombres dans l'équation et simplifie-la pour obtenir le deuxième terme.

2^e^ terme $(1 + 1)$ $= {}_{14}C_1(2x)^{13}(-x^4)^1$
$= 14(8192x^{13})(-x^4)$
$=-114688x^{17}$

Compare les exposants de x dans les deux premiers termes. Tu constateras qu'ils augmentent de 3. Par conséquent, le troisième terme contiendra l'expression x^{20}.

$r = 2$, $n = 14$, $a = 2x$, $b = -x^4$

Insère les nombres dans l'équation et simplifie pour obtenir le troisième terme.

3^e^ terme $(2 + 1)$ $= {}_{14}C_2(2x)^{12}(-x^4)^2$
$= 91(4096x^{12})(x^8)$
$= 372\ 736x^{20}$

Exemple 2

Trouve le dixième terme dans le développement de

$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^{12}$.

Solution

$r = 9,\ n = 12,\ a = x,\ b = -\frac{1}{2}y$

Insère les nombres dans l'équation.

$$(9+1) = {}_{12}C_9 x^3 \left(-\frac{1}{2}y\right)^9$$

Simplifie l'équation.

$$(9+1) = 220x^3\left(-\frac{1}{512}y^9\right)$$

Multiplie les termes ensemble pour obtenir le dixième terme.

$$(9+1) = \frac{-220x^3y^9}{512}$$

Définition

Le théorème du binôme permet de trouver le n^e terme du développement d'un binôme quelconque quelle que soit sa puissance.

Questions pratiques

Exercice 34, n^os^ 6–12
Exercice 35, n^os^ 1–7

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec la permission de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n^o^ 27.