

Exercice d'algèbre**• simplifier des exposants rationnels et fractionnaires**

Les élèves devraient être en mesure de simplifier des expressions qui comprennent des exposants rationnels et fractionnaires dont les dénominateurs sont inférieurs ou égaux à 5.

Exemple

Évalue :

a) 2^{-2}

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

c) $8^{\frac{2}{3}}$

d) $27^{-\frac{4}{3}}$

e) $32^{\frac{3}{5}}$

Solutions

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

c) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

d) $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

e) $32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

- utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{3x}$, trouve les réponses suivantes :

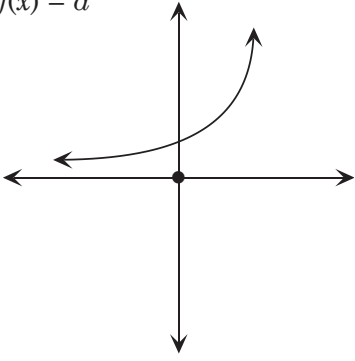
- a) $f(4)$
- b) $g(-2)$
- c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
- d) $h(3)$
- e) $g(h(27))$
- f) $g(f(0))$

Solutions

- a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$
- b) $g(-2) = \frac{1}{-2}$
- c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$
- d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$
- e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \frac{1}{9}$
- f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \frac{1}{2}$

Vue d'ensemble du concept

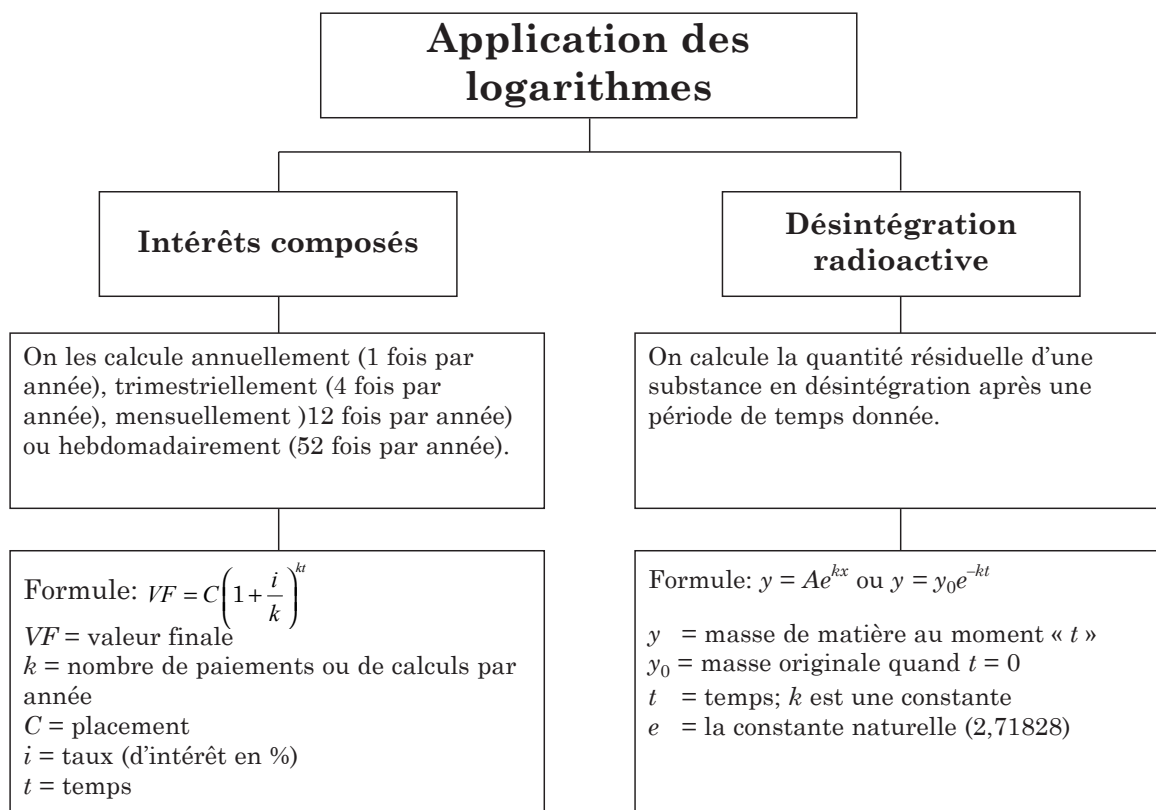
Annexe D-2

<p>Concept Logarithmes naturels</p>	<p>Exemples Simplifie :</p> $e^{6+5 \ln t}$ $= e^6 \cdot e^{5 \ln t}$ $= e^6 \cdot t^5$ $= e^6 t^5$	
<p>Caractéristiques</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ les logarithmes de base « e » sont appelés des <i>logarithmes naturels</i> (ou <i>népériens</i>) ➤ ils sont similaires aux logarithmes décimaux ➤ $e^{\ln u} = u$ et $\ln e^u = u$, alors $\ln e = 1$ 		
<p>À quoi ça ressemble?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Ça ressemble à un logarithme décimal dont il faut résoudre l'équation logarithmique. 	<p>À quoi ça ne ressemble pas?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Un logarithme naturel ne ressemble pas à une transformation parce que les règles de résolution sont différentes. 	<p>Peux-tu l'illustrer?</p> <p>$f(x) = a^x$</p>  <ul style="list-style-type: none"> ➤ Le graphique illustré ci-dessus découle de la fonction de base $f(x) = a^x$. Cela représente la fonction exponentielle.
<p>Définition</p> <p>Un logarithme naturel est un logarithme élémentaire de base « e ».</p> <p>$e^{\ln u} = u$ et $\ln e^u = u$ (alors $\ln e = 1$). Tu peux utiliser cette règle de base pour résoudre l'équation.</p>		

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec l'autorisation de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley, n° 27.

Mise en correspondance

Annexe D-3


Exemples

Un compte d'épargne rapporte un taux d'intérêt de 6 %, composé trimestriellement.

- a) Si le compte contient 5 000 \$ actuellement, combien d'argent contiendra-t-il dans 5 ans?

$$\begin{aligned}
 VF &= C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt} \\
 &= 5000 \$ \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{(4)(5)} \\
 &= 6734,28 \$
 \end{aligned}$$

- b) Combien de temps faudra-t-il pour que le montant original double ?

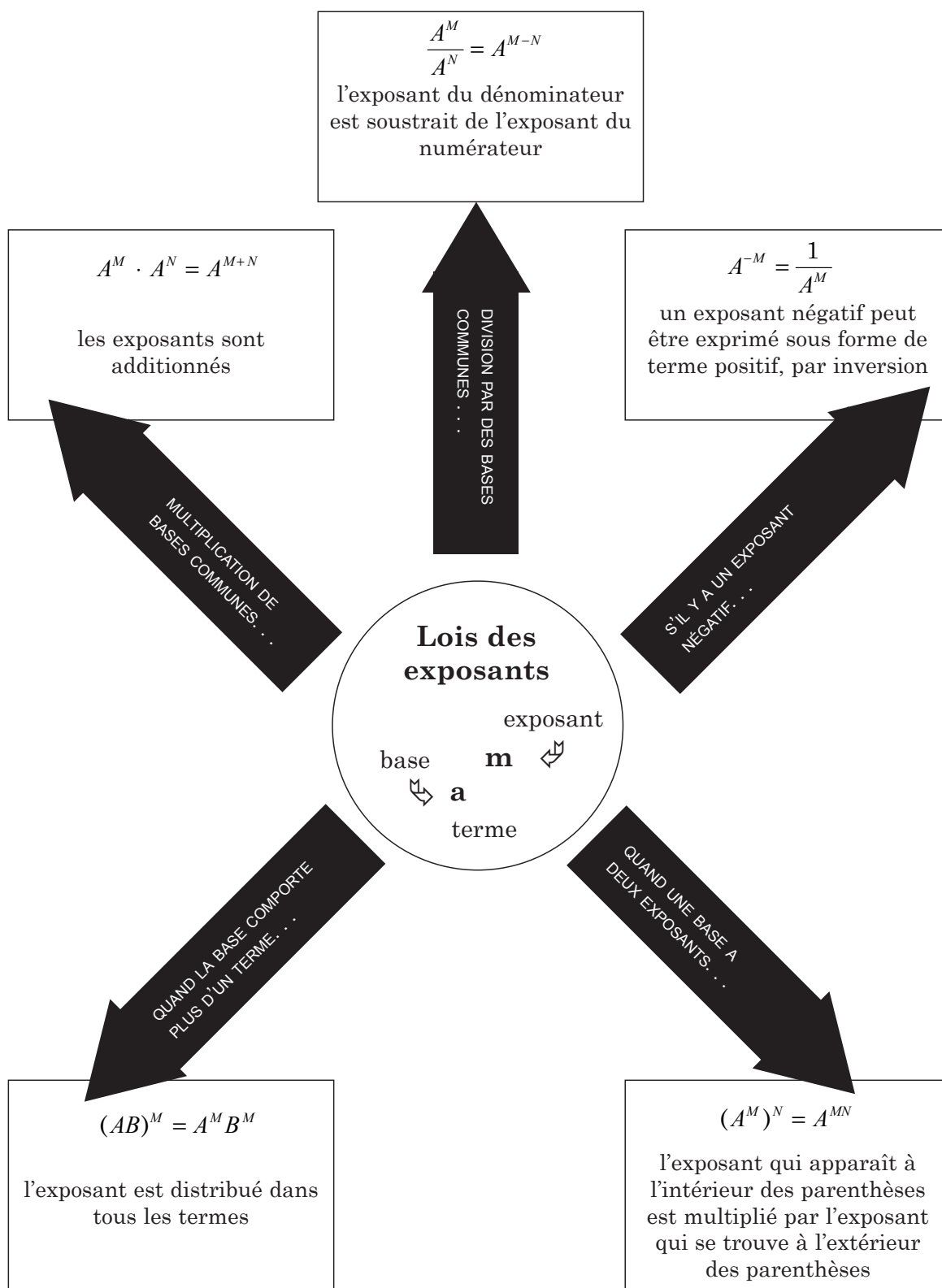
$$\begin{aligned}
 10\,000 \$ &= 5000 \$ \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4t} \\
 2 &= (1,015)^{4t} \\
 \log 2 &= t(4 \log(1,015)) \\
 \frac{\log 2}{4 \log(1,015)} &= t \\
 11,64 \text{ années} &= t
 \end{aligned}$$

- a) En utilisant la formule des intérêts composés, remplace les valeurs données, soit $P = 5\,000 \$$, $i = 0,06$ et $n = 4$, $t = 5$. Effectue les calculs pour trouver le montant que contiendra le compte après 5 ans.
- b) Remplace les valeurs connues dans l'équation. Simplifie l'équation. Prends le logarithme des deux membres pour trouver la valeur de « t ». En appliquant la règle du logarithme aux exposants, place le 4 de « t » devant le logarithme. Isole t dans l'équation. Effectue les calculs et utilise les unités appropriées (ici, les années).

Mise en correspondance

Logarithmes			
Logarithmes décimaux	Logarithmes naturels		
Exposants	Logarithmes	Exposants	Logarithmes
<ul style="list-style-type: none"> une équation qui contient une inconnue en exposant est appelée une équation exponentielle, soit $y = 2^{x+1}$ 	<ul style="list-style-type: none"> une équation qui contient une inconnue sous la forme d'un logarithme la réciproque de l'équation exponentielle, soit $\log_2 x = 4$ 	<ul style="list-style-type: none"> la valeur de « e » est 2,71828 « e^x » est la valeur obtenue quand la pente de la tangente au graphique d'une fonction exponentielle est 1 	<ul style="list-style-type: none"> les logarithmes naturels de base « e », soit $\ln_e x = \ln x$ $y = \ln x$ seulement si $e^y = x$ pour $x > 0$
<p>Lois des exposants</p> <ol style="list-style-type: none"> $\frac{1}{x} = x^{-1}$ $(x^m)^n = x^{mn}$ $x^m x^n = x^{m+n}$ $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $\left(\frac{x}{m}\right)^n = \frac{x^n}{m^n}$ 	<p>Propriétés des logarithmes</p> <ol style="list-style-type: none"> $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$ $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$ $\log_b N^y = y \log_b N$ $\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$ 	<p>Règles des exposants naturels</p> $e^{\ln u} = u \text{ pour } u > 0$ $\ln e = 1$	<p>Règles des logarithmes naturels</p> $\ln e^u = u \text{ pour } u \in \mathfrak{R}$ <p>Quand on trace le graphique, les logarithmes naturels sont la réciproque de $y = e^x$.</p>
<p>Exemple</p> <p>Trouve la valeur de x :</p> $5^{3(x-2)} = 125$ <ul style="list-style-type: none"> exprime les deux côtés dans le même système de base met les exposants en équation $3(x-2) = 3$ $3x - 6 = 3$ $3x = 9$ $x = 9$	<p>Exemple</p> <p>Trouve la valeur de x puis vérifie :</p> $\log_5(2x - 3) = 2$ <ul style="list-style-type: none"> reformule l'équation sous forme exponentielle trouve la valeur de x vérifie : $\log_5(2x - 3) = 2$ <p>nous savons que c'est correct</p>	<p>Exemple de base</p> <p>Simplifie</p> $e^{4 \ln(3s+5)}$ $= e^{\ln(3s+5)^4}$ $= (3s+5)^4$	<p>Exemple de base</p> <p>Simplifie</p> $\ln e^{x^2+3x}$ $= x^2 + 3x$ <p>Nous savons que $\ln e^u = u$ alors</p> $\ln e^{x^2+3x} = x^2 + 3x.$

Mise en correspondance



Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-6

Concept

Résolution d'équations
logarithmiques élémentaires

Problème

$$\log_{10}x + \log_{10}(x + 3) = 1$$

Étape 1

Écris sous la forme d'une somme ou d'une différence et transforme-la en un seul logarithme.

exemple

$$\log_{10}(x)(x + 3) = 1$$

Étape 2

Transforme-la en une forme exponentielle.

exemple

$$10 = (x)(x + 3)$$

Étape 3

Trouve la valeur des inconnues à l'aide de techniques algébriques de base.

exemple

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 3x - 0 \\ 0 &= (x + 5)(x - 2) \\ x &= -5, x = 2 \end{aligned}$$

Étape 4

Vérifie les racines de l'équation originale.

exemple

$$\begin{aligned} \log_{10}(-5)(-5 - 3) &= 1 \\ 1 &= 1 \\ \log_{10}(2)(2 - 3) &= 1 \end{aligned}$$

c'est impossible parce qu'on ne peut trouver le logarithme d'un nombre négatif

Fiche de notes – Fiche étapes – solution

Annexe D-7

Concept

Résolution d'équations exponentielles dont les bases sont différentes

Problème

Quand les bases d'une équation exponentielle ne sont pas les mêmes, et s'il n'est pas facile d'exprimer chaque membre dans le même système de base, suis les étapes suivantes :

Étape 1

Prends les logarithmes de chaque membre de l'équation

Étape 2

Utilise les propriétés des logarithmes pour écrire sous forme d'un seul logarithme.

Étape 3

Transforme les exposants en coefficient des logarithmes.
Conseil : Utilise les propriétés des logarithmes

Étape 4

Développe.

Étape 5

Rassemble les variables inconnues d'un côté de l'équation.

Étape 6

Décompose en facteurs les variables inconnues.

Étape 7

Effectue les calculs.

Exemple

$$3^{3x+6} = 5^{x-5}$$

$$\log 3^{3x+6} = \log 5^{x-5}$$

$$(3x+6) \log 3 = (x-5) \log 5$$

$$3x \log 3 + 6 \log 3 = x \log 5 - 5 \log 5$$

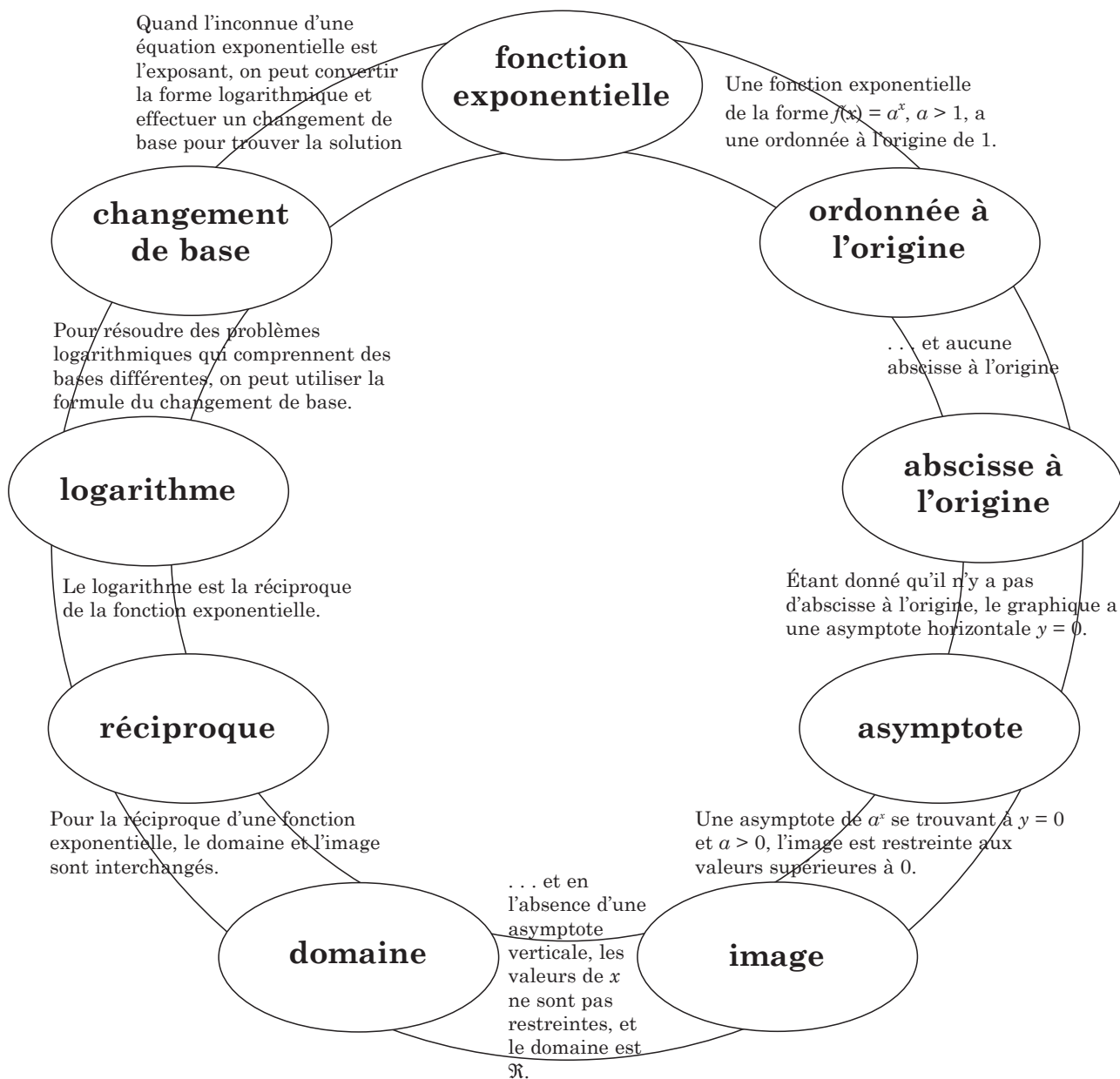
$$3x \log 3 - x \log 5 = 5 \log 5 - 6 \log 3$$

$$x(3 \log 3 - \log 5) = 5 \log 5 - 6 \log 3$$

$$x = \frac{5 \log 5 - 6 \log 3}{3 \log 3 - \log 5}$$

$$x = -8,7$$

Cycle du mot



Cycle du mot – Adapté (Word Cycle) : Extrait de *Reading — A Novel Approach*, texte de Janice Szabos, illustrations par Vanessa Filkins, © 1984 par Frank Schaffer Publications. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.