

Exercice d'algèbre

• décomposer des trinômes

Les trinômes décomposés en facteurs devraient être exprimés sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$ ou a est un nombre premier inférieur à 10. La valeur de c devrait avoir un nombre minimal de facteurs.

Exemple

Décompose en facteurs

- a) $x^2 + 5x + 6$
- b) $x^2 + 9x - 10$
- c) $2x^2 - 5x + 3$
- d) $x^2 - 4x - 12$
- e) $2 \cos^2 x + \cos x - 1$
- f) $5 \tan^2 x - 12 \tan x + 7$

Solutions

- a) $(x + 3)(x + 2)$
- b) $(x + 10)(x - 1)$
- c) $(2x - 3)(x - 1)$
- d) $(x - 6)(x + 2)$
- e) $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$
- f) $(5 \tan x - 7)(\tan x - 1)$

• trouver la valeur de a , b ou c quand deux des trois valeurs sont données

Exemple

Soit $ax^2 + bx + c$, trouve les valeurs possibles de b si :

- a) $a = 1$, $c = 6$
- b) $a = 2$, $c = -5$

Solutions

- a) $x^2 + bx + 6$ pourrait être décomposée en facteurs :
- $(x + 6)(x + 1) \Rightarrow b = 7$
 - $(x - 6)(x - 1) \Rightarrow b = -7$
 - $(x + 2)(x + 3) \Rightarrow b = 5$
 - $(x - 2)(x - 3) \Rightarrow b = -5$

∴ la valeur de b pourrait être ± 5 , ± 7

- b) $2x^2 + bx - 5$ pourrait être décomposée en facteurs :
- $(2x + 5)(x - 1) \Rightarrow b = 3$
 - $(2x - 5)(x + 1) \Rightarrow b = -3$
 - $(2x + 1)(x - 5) \Rightarrow b = -9$
 - $(2x - 1)(x + 5) \Rightarrow b = 9$

∴ la valeur de b pourrait être ± 3 , ± 9

• **décomposer en facteurs la différence de carrés**

Exemple

Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

- a) $x^2 - 4$
- b) $x^2y^2 - 1$
- c) $\cos^2 x - \sin^2 x$
- d) $x^2 - 49$
- e) $x^4 - 16$

Solutions

- a) $(x - 2)(x + 2)$
- b) $(xy - 1)(xy + 1)$
- c) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
- d) $(x - 7)(x + 7)$
- e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

• **décomposer en facteurs communs**

Exemple

Décompose entièrement en facteurs chacune des expressions suivantes :

- a) $9x^2 + 18$
- b) $2x^2 + 6x + 4$
- c) $\sin x - \sin x \cos x$
- d) $8x^2 - 32$

Solutions

- a) $9(x^2 + 2)$
- b) $2(x + 2)(x + 1)$
- c) $\sin x(1 - \cos x)$
- d) $8(x - 2)(x + 2)$

• **résoudre des questions qui font appel à la décomposition en facteurs**

Les élèves devraient être en mesure de résoudre des équations simples sans démontrer les étapes de la décomposition en facteurs.

Exemple

Trouver la valeur de x dans chacune des équations suivantes :

- a) $x^2 - 4 = 0$
- b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
- c) $4x^2 + x = 0$

Solutions

- a) $x = 2, -2$
- b) $x = -2, x = -1$
- c) $x = 0, x = -\frac{1}{4}$

• **simplifier des fractions complexes**

Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes pour qu'elles contiennent un seul numérateur et un seul dénominateur.

En calcul, l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les élèves de ce cours

devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à l'aise

avec l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exemple

Simplifie :

a) $\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{4x+1}{x-1}}$

b) $\frac{2(x-h)^2}{x-h+1} - \frac{2x^2}{x+1}$

c) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$

Solutions

a) $\frac{x+2}{4x+1}$

b) $\frac{(x+1)2(x-h)^2 - (x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

- trouver le plus petit dénominateur commun de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà mis en facteurs

Exemple

Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

a) $\frac{2x-1}{x^2-4}; \frac{x}{x-2}$

b) $\frac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}; \frac{x^2}{x^2-9}$

c) $\frac{\sin x}{\cos x}; \frac{1-\sin x}{\sin x}$

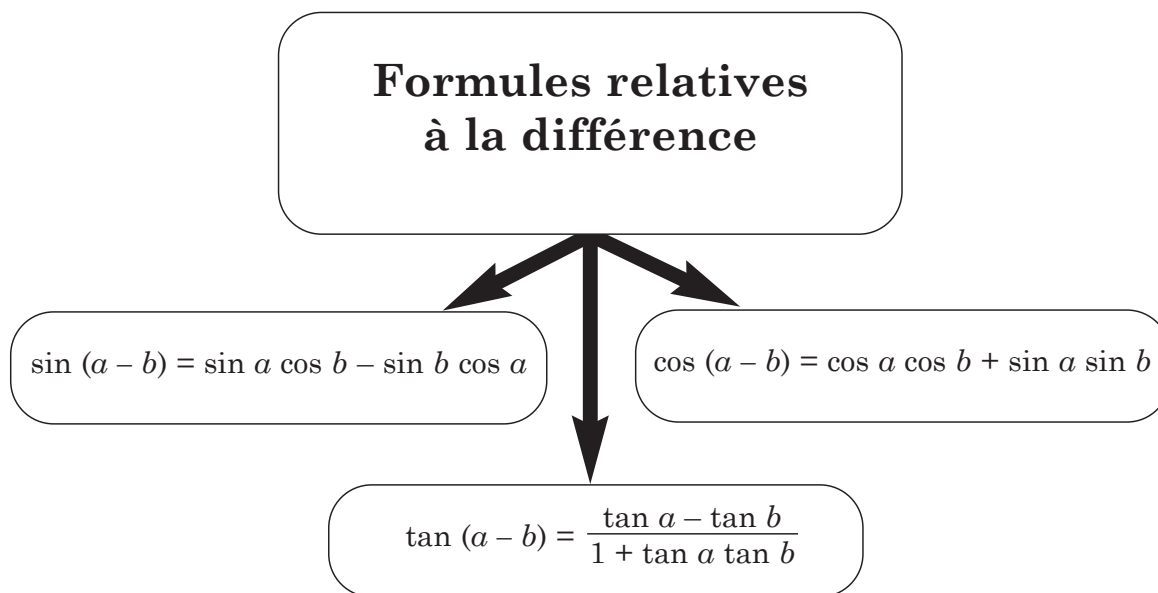
Solutions

a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

c) $\cos x \sin x$

Mise en correspondance – Problème et solution Anexe C-2



Problème

Trouve la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution

Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

Étape 3

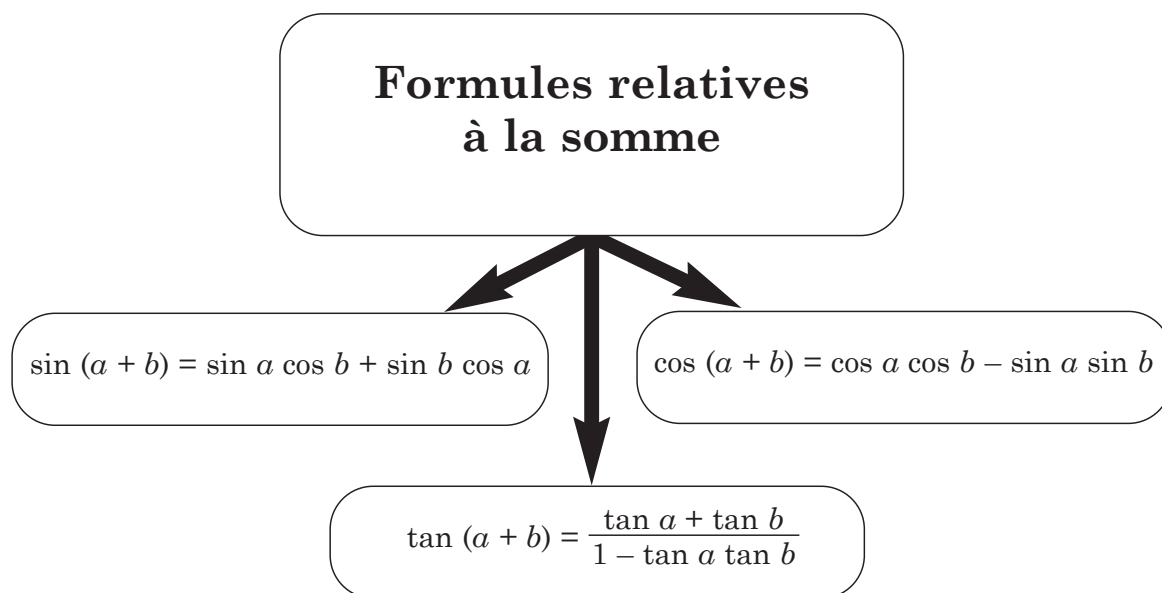
Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Mise en correspondance – Problème et solution Annexe C-3

Problème

Trouve la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ en utilisant la formule d'addition.

Solution
Étape 1

Trouve deux fonctions particulières qui, si elles sont additionnées, te permettent d'obtenir $\frac{7\pi}{12}$.

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Étape 2

Place les nombres trouvés dans l'équation appropriée.

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}$$

Étape 3

Trouve les valeurs exactes appropriées à partir du cercle unitaire.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Étape 4

Effectue les multiplications et les additions pour obtenir la réponse finale.

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Mise en correspondance – Problème et solution Annexe C-4

Identités inverses

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Identités du quotient

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



Identités trigonométriques

Identités de base

dérivées de $x^2 + y^2 = r^2$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Autres relations pythagoriciennes

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

Étapes générales de la résolution d'une équation

- #1 Effectuer les opérations nécessaires pour réduire un côté de l'équation à la même forme que l'autre côté
- #2 On peut accomplir l'étape 1 comme suit :
 - a) en effectuant les additions ou les soustractions appropriées
 - b) en effectuant les multiplications ou les divisions appropriées
- #3 Simplifier la fraction et décomposer en facteurs si nécessaire :
 - a) essayer de reformuler les expressions trigonométriques en un seul terme

Exemple

$$\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$$

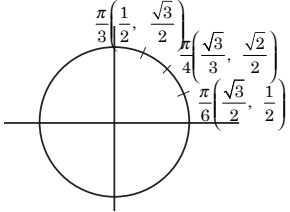
Côté gauche $(\sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta$$

Côté gauche = Côté droit

Méthode en trois points – Stratégies du vocabulaire

Terme/Concept : Fonctions circulaires particulières	Formule/Équation : $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • coordonnées précises • appartiennent au cercle unitaire • multiples de tous les types dans chaque quadrant 	Exemple : 
Terme/Concept : Équation trigonométrique du premier degré	Formule/Équation : $2 \cos \theta + 4 = 5$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • • • • 	Exemple : $2 \cos \theta = 1$ $\cos \theta > 0$ Quadrants I, IV $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
Terme/Concept : Équation trigonométrique du second degré	Formule/Équation : $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • décomposition en facteurs nécessaire en générale • possible d'utiliser une formule quadratique • 	Exemple : $(2x+1)(x-1) = 0$ Quadrants III, IV $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ $\sin \theta = 1$ $\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$
Terme/Concept : Identité de base	Formule/Équation : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • issue d'une équation générale du cercle unitaire • utilisée pour résoudre une fonction trigonométrique si on connaît l'autre 	Exemple : Soit $\cos \theta = \frac{-5}{13}$, et θ appartient au Q II, trouve $\sin \theta$ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\therefore \theta > 0$

Méthode en trois points - Stratégies du vocabulaire (*Three-Point Approach Vocabulary Strategy*) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisée avec l'autorisation de l'éditeur.

Méthodes en trois points – Stratégie du vocabulaire

Terme/Concept : Différence des cosinus	Formule/Équation : $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • utilisée pour des angles non précisés • α et β sont deux angles qui correspondent à une différence par rapport à l'angle inconnu 	Exemple : $\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &\rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$
Terme/Concept : Somme des cosinus	Formule/Équation : $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • utilisée pour des angles non précisés 	Exemple : $\cos \frac{29\pi}{12} \rightarrow \cos \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right)$ $\begin{aligned} &= \cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{-\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$
Terme/Concept : Différence des sinus	Formule/Équation : $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • utilisée pour des angles précis 	Exemple : $\sin \frac{5\pi}{12} \rightarrow \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$ $\begin{aligned} &= \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$
Terme/Concept : Somme des sinus	Formule/Équation: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
Caractéristiques : <ul style="list-style-type: none"> • utilisée pour des angles non précisés 	Exemple: $\sin \frac{17\pi}{12} \rightarrow \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right)$ $\begin{aligned} &= \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$

Méthode en trois points – Stratégie du vocabulaire (*Three-Point Approach Vocabulary Strategy*) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisée avec l'autorisation de l'éditeur.

Inscription au journal

Annexe C-7

Inscription au journal n° 5

$$(\cos \theta + \tan \theta \sin \theta) \cot \theta$$

$$1. \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$2. \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$3. \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cancel{\cos \theta} \sin \theta}$$

$$4. \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1}$$

$$5. \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$6. \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$7. = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$8. = \csc \theta$$

1. À la première étape, j'ai ramené les termes $\tan \theta$ et $\cot \theta$ à leur simple expression.

$$\left(\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ and } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

2. Ensuite, j'ai effectué la multiplication à l'intérieur des parenthèses.

$$\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{1} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)$$

3. J'ai ensuite multiplié le terme à l'extérieur des parenthèses par les deux termes se trouvant à l'intérieur. J'ai ensuite effectué l'élimination

nécessaire dans le terme $\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta}$.

4. Après l'élimination, il restait le terme en (4).

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1}$$

5. J'ai ensuite trouvé un dénominateur commun pour effectuer l'addition.

6. Après avoir effectué cette addition, il restait le terme illustré en (6).

7. Ayant reconnu que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ était une identité de Pythagore équivalant à 1, j'ai simplifié l'expression pour

obtenir $\frac{1}{\sin \theta}$.

8. J'ai aussi reconnu que $\frac{1}{\sin \theta}$ était

l'inverse de $\csc \theta$; c'est ma réponse finale.