

Exercice d'algèbre

• **simplifier des fractions complexes**

Les élèves devraient être en mesure de simplifier des fractions complexes en fractions pour qu'elles contiennent seulement un seul numérateur et un seul dénominateur.

Dans le cours de calcul universitaire, l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ revêt une grande importance. Les

élèves de ce cours devraient être en mesure de manipuler des expressions rationnelles afin d'être à

l'aise avec l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exemple

Simplifie :

a) $\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{4x+1}{x-1}}$

b) $\frac{2(x-h)^2}{x-h+1} - \frac{2x^2}{x+1}$

c) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$

Solutions

a) $\frac{x+2}{4x+1}$

b) $\frac{(x+1)2(x-h)^2 - (x-h+1)(2x^2)}{(x-h+1)(x+1)}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

- trouver le plus petit dénominateur de deux ou trois expressions rationnelles quand les dénominateurs sont faciles à décomposer en facteurs ou quand ils sont déjà unis en facteurs

Exemple

Trouve le plus petit dénominateur commun des expressions rationnelles suivantes :

a) $\frac{2x-1}{x^2-4}; \frac{x}{x-2}$

b) $\frac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}; \frac{x^2}{x^2-9}$

c) $\frac{\sin x}{\cos x}; \frac{1-\sin x}{\sin x}$

Solutions

a) $(x-2)(x+2)$ ou x^2-4

b) $(2x+1)(x-3)(x+3)$ ou $(2x+1)(x^2-9)$

c) $\cos x \sin x$

- utiliser $y - y_1 = m(x - x_1)$ pour trouver l'équation d'une droite

Dans le cours *Mathématiques pré-calcul – Secondaire 2*, on a présenté aux élèves la « forme point-pente » de l'équation d'une droite. Cette forme est beaucoup utilisée en mathématiques pré-calcul pour trouver l'équation d'une droite tangente à une courbe.

Exemple 1

Si la pente d'une droite est $\frac{-4}{5}$ et qu'elle passe par le point $(-2, 3)$, écris l'équation de la droite.

Solution

$$y - 3 = \frac{-4}{5}(x + 2)$$

Exemple 2

La pente de la tangente à une courbe donnée est définie par l'équation $m = 3x^2$. Quelle est l'équation de la tangente au point $(-2, -8)$?

Solution

Pente : $m = 3(-2)^2$

$$m = 12$$

∴ l'équation est $y + 8 = 12(x + 2)$

- utiliser la notation fonctionnelle pour évaluer des fonctions

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{3x}$, trouve :

a) $f(4)$

b) $g(-2)$

c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

d) $h(3)$

e) $g(h(27))$

f) $g(f(0))$

Solutions

a) $f(4) = 4^2 + 2 = 18$

b) $g(-2) = \frac{1}{-2}$

c) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

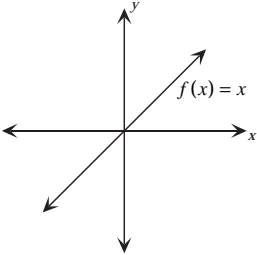
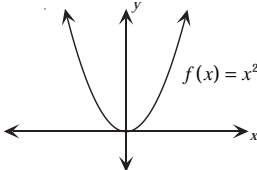
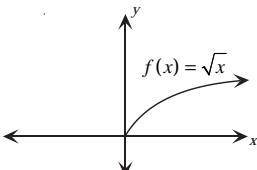
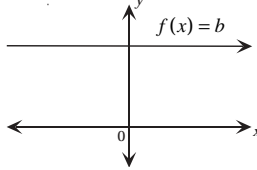
d) $h(3) = \sqrt{3(3)} = 3$

e) $g(h(27)) = g(\sqrt{3(27)}) = g(9) = \frac{1}{9}$

f) $g(f(0)) = g(0^2 + 2) = g(2) = \frac{1}{2}$

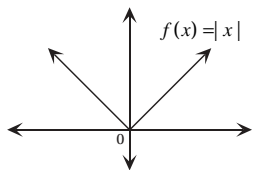
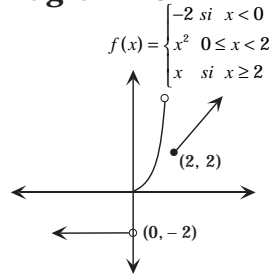
Méthode en trois points – Mots et concepts

Annexe B-2

<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> - fonction linéaire particulière $m = 1$, y ou $b = 0$ - tous les points où l'abscisse est égale à l'ordonnée - f est une fonction impaire; le graphique est symétrique par rapport à l'origine 	<p>Mot ou concept</p> <p>fonction identité</p> <hr/> <p>Équation</p> $f(x) = x$	<p>Diagramme</p> 
<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> - domaine \mathfrak{R} - fonction paire parce que $f(-x) = f(x)$ symétrique par rapport à l'axe des y - sommet $(0, 0)$ - f décroissante $]-\infty, 0]$ et croissante dans l'intervalle $[0, \infty[$ 	<p>Mot ou concept</p> <p>élévation au carré de la fonction</p> <hr/> <p>Équation</p> $f(x) = x^2$	<p>Diagramme</p> 
<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> - fonction croissante $[0, \infty[$ - le graphique n'a pas de symétrie par rapport à l'axe des y ni à l'origine 	<p>Mot ou concept</p> <p>fonction racine carrée</p> <hr/> <p>Équation</p> $f(x) = \sqrt{x}$	<p>Diagramme</p> 
<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> - fonction linéaire particulière $m = 0$, ordonnée à l'origine = b - parallèle à l'axe des x - tous les points ont la même ordonnée b - domaine \mathfrak{R}; image $\{b\}$ - ni croissante ni décroissante - symétrique par rapport à l'axe des y 	<p>Mot ou concept</p> <p>fonction constante</p> <hr/> <p>Équation</p> $f(x) = b$	<p>Diagramme</p> 

Méthode en trois points – Mots et concepts (Three-Point Approach for Words and Concepts) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.

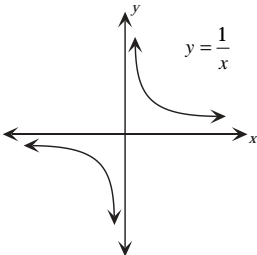
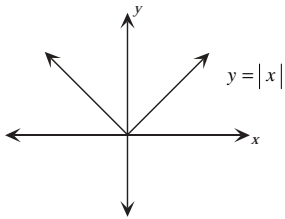
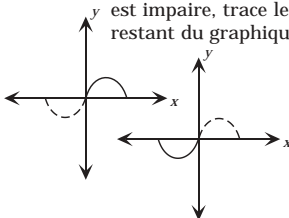
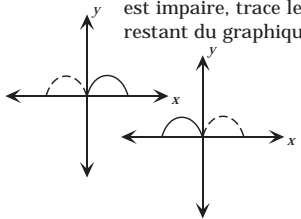
Méthode en trois points – Mots et concepts

<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> – domaine \mathcal{R} – f est paire et symétrique par rapport à l'axe des y – pour $x \geq 0$, $f(x) = x$ (fonction identité) <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<p>Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">fonction valeur absolue</p> <hr/> <p>Équation</p> <p style="text-align: center;">$f(x) = x$</p>	<p>Diagramme</p> 
<p>Définition</p> <p><u>Le tracé d'une fonction définie par morceaux est en fonction des restrictions relatives aux valeurs de x. Ces restrictions indiquent quelle fonction particulière il faut utiliser pour tracer le graphique (à l'aide d'un outil de tracé point à point.)</u></p>	<p>Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">fonction définie par morceaux</p> <hr/> <p>Équation</p> <p style="text-align: center;">$f(x) = \begin{cases} 3 \text{ fonctions} \\ \text{différentes} \end{cases}$</p>	<p>Diagramme</p> <p style="text-align: center;">$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$</p> 
<p>Définition</p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<p>Mot ou concept</p> <hr/> <p>Équation</p>	<p>Diagramme</p>
<p>Définition</p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<p>Mot ou concept</p> <hr/> <p>Équation</p>	<p>Diagramme</p>

Méthodes en trois points – Mots et concepts (Three-Point Approach for Words and Concepts) :
Adaptée par Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*, Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.

Méthode en trois points Stratégie du vocabulaire des mathématiques

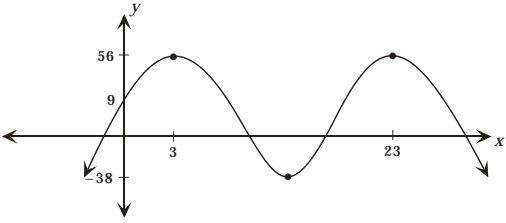
Annexe B-4

<p style="text-align: center;">Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">fonctions rationnelles</p>	<p style="text-align: center;">Explication</p> $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ <p>domaine : $x \in \mathbb{R}$ sauf 0 image : $y \in \mathbb{R}$ sauf 0 asymptotes : axes des x et des y</p>	<p style="text-align: center;">Exemple</p> 
<p style="text-align: center;">Mots clés</p> $y = \frac{1}{x} \quad f(x) = \frac{1}{x}$		
<p style="text-align: center;">Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">Fonctions valeur absolue</p>	<p style="text-align: center;">Explication</p> <p>domaine : $x \in \mathbb{R}$ image : $\{y \mid y \geq 0\}$ coordonnée à l'origine : (0, 0)</p>	<p style="text-align: center;">Exemple</p> 
<p style="text-align: center;">Mots clés</p> $f(x) = x $		
<p style="text-align: center;">Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">Fonctions impaires</p>	<p style="text-align: center;">Explication</p> <ul style="list-style-type: none"> • symétrique par rapport à l'origine • réflexion de chaque point $(x, f(x)) = (-x, -f(x))$ • la fonction est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour chaque x dans le domaine de f 	<p style="text-align: center;">Exemple</p> <p>Soit le graphique suivant; si la fonction est impaire, trace le restant du graphique</p> 
<p style="text-align: center;">Mots clés</p> <p>$y = x^n$ où n est impair</p>		
<p style="text-align: center;">Mot ou concept</p> <p style="text-align: center;">Fonctions paires</p>	<p style="text-align: center;">Explication</p> <ul style="list-style-type: none"> • symétrique par rapport à l'axe des y • réflexion de chaque point $(x, f(x)) = (-x, f(x))$ • la fonction est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour chaque x dans le domaine de f 	<p style="text-align: center;">Exemple</p> <p>Soit le graphique suivant; si la fonction est impaire, trace le restant du graphique</p> 
<p style="text-align: center;">Mots clés</p> <p>$y = x^n$ où n est pair</p>		

Méthode en trois points - Stratégie du vocabulaire des mathématiques (Three-Point Approach Vocabulary Strategy) : Adaptée de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.

Développement du concept selon Frayer

Annexe B-5

Caractéristiques		
<p style="text-align: center;">Caractéristiques essentielles Toujours</p> <ul style="list-style-type: none"> • dans une transformation, on utilise toujours l'équation de la fonction $f(x) = af(b(x - c)) + d$ où : a – étirement – compression à la verticale a – amplitude b – étirement – compression à l'horizontale c/b – déphasage (horizontal) d – glissement vertical 	<p style="text-align: center;">Caractéristiques non essentielles Parfois</p> <ul style="list-style-type: none"> • selon le nombre de transformations, les variables ne figurent pas dans toutes les équations • si les transformations sont multiples, l'ordre est : (1) réflexion; (2) étirements – compressions; (3) glissements 	<p style="text-align: center;">Caractéristiques non applicables Jamais</p> <ul style="list-style-type: none"> • les glissements horizontaux ne vont jamais dans le même sens que le signe +/- • les glissements verticaux ne vont jamais dans le sens opposé du signe +/- • $b > 1$ = compression à l'horizontale • $b < 1$ = étirement à l'horizontale • l'amplitude n'est jamais négative
<p style="text-align: center;">Sujet – concept</p> <h1 style="text-align: center; margin: 0;">Transformations</h1>		
<p style="text-align: center;">Exemples</p> <p>$y = a \cos b(x - c) + d$</p> <p>$y = -2 \cos \frac{\pi}{10}(x - 3) + 9$</p> <ul style="list-style-type: none"> • le signe “-” indique que le graphique est réfêchi par rapport à l'axe des x • 2 indique un étirement vertical • cos est la fonction • $\frac{\pi}{10}$ permet de trouver la période = $\frac{2\pi}{b}$ • -3 indique un glissement horizontal dans le sens opposé (positif) • +9 représente l'axe horizontal ou un glissement vertical dans le même sens positif 	<p style="text-align: center;">Exemples non pertinents</p> <p>$y =afb(x - c) + d$</p> <p>$y = a \cos \frac{1}{2}(-x - 3) + 7$</p> <p style="text-align: center;">Erreurs fréquentes</p> <ul style="list-style-type: none"> • étirements et compressions : à la verticale, $a > 1$ indique un étirement et $a < 1$ une compression mais, à l'horizontale $a < 1$ indique une compression et $a < 1$ un étirement • réflexions : $y = -f(x)$ indique une réflexion par rapport à l'axe des x, mais $y = f(-x)$ indique une réflexion par rapport à l'axe des y • glissements : à l'horizontale – opposé signe +/- tel qu'écrit; à la verticale – même sens que +/-, tel qu'écrit 	
<p style="text-align: center;">Fais un dessin ou un diagramme</p> <p style="text-align: center;">$y =afb(x - c) + d \rightarrow y = 47 \cos \frac{\pi}{10}(x - 3) + 9$</p> 		
<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> • pour effectuer une transformation, il faut prendre l'équation générale de la fonction : $f(x) = af(bx - c) + k$ et la modifier par une réflexion, une compression, un étirement ou un glissement à la verticale ou à l'horizontale, selon les valeurs utilisées dans les différents membres de l'équation. 		

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick, and Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisé avec autorisation.

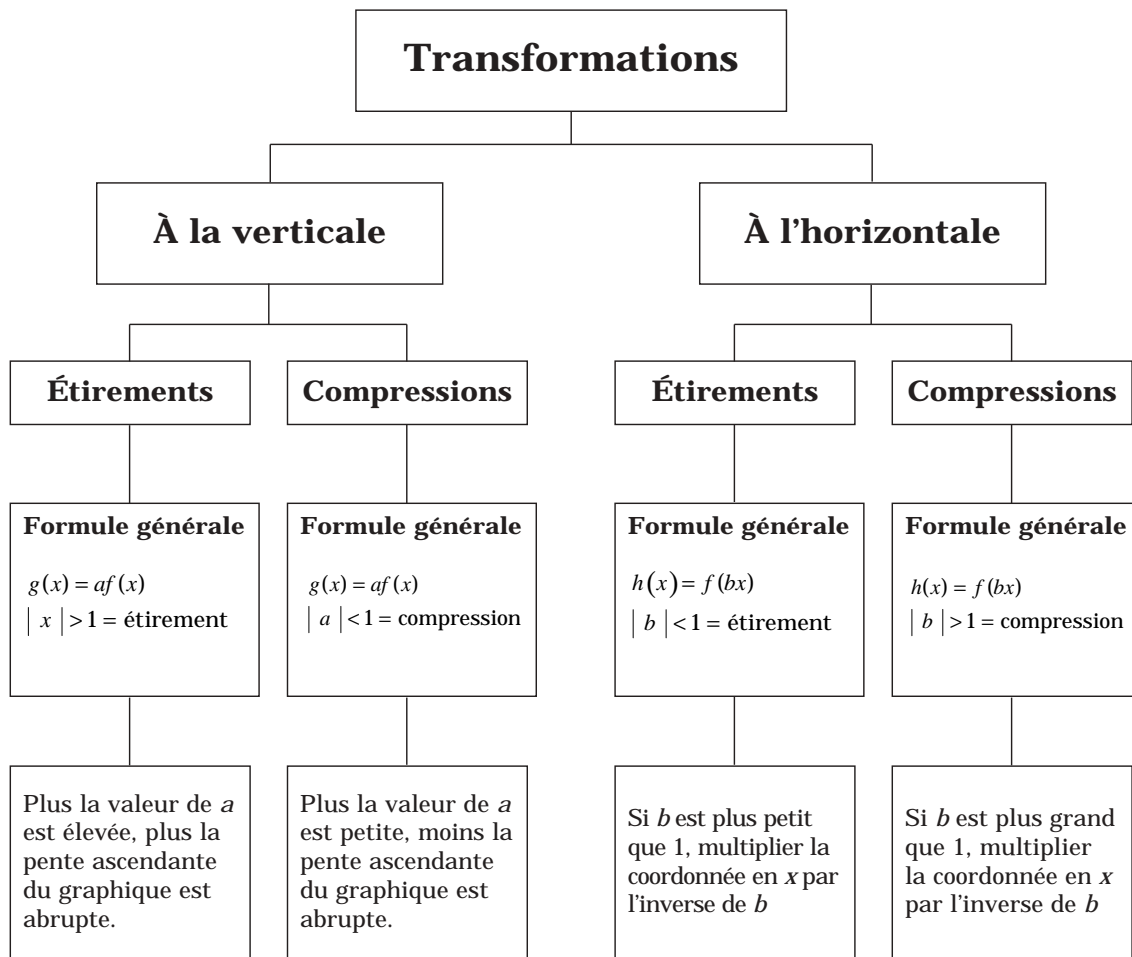
Développement du concept selon Frayer

Annexe B-6

Caractéristiques		
<p>Caractéristiques essentielles Toujours</p> <ul style="list-style-type: none"> • $y = af (bx - c) + k$ ou $y = afb \left(x - \frac{c}{b} \right) + k$ (équation générale) prend toujours cette forme générale 	<p>Caractéristiques non essentielles Parfois</p> <ul style="list-style-type: none"> • variable manquante, p. ex., $y = af (bx - c)$ pas de k 	<p>Caractéristiques non pertinentes Jamais</p> <ul style="list-style-type: none"> • le glissement horizontal ne va jamais dans le même sens que son signe (-3) = glissement à droite (+3) = glissement à gauche
<p>Sujet – concept Déphasage</p>		
<p>Exemples</p> <p style="text-align: center;"> a b $\frac{c}{b}$ k ↓ ↓ ↓ ↓ </p> <p>$y = 2 \sin \left(3 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right)$</p> <ul style="list-style-type: none"> • amplitude = 2 • glissement vertical = 1 vers le haut • période = $\frac{2\pi}{3}$ • déphasage = $\frac{\pi}{2}$ vers la droite • cycle = $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right)$ = $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6} \right)$ 	<p>Exemples non pertinents</p> <p style="text-align: center;">$y = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) + 1$</p> <ul style="list-style-type: none"> • amplitude = 2 • glissement vertical = 1 vers le haut • période = $\frac{2\pi}{3}$ • déphasage = $\frac{\pi}{2}$ <p>Exemple d'une faute parce que le 3 se trouve à l'intérieur des parenthèses, ce qui indique que le glissement devrait être $\frac{c}{b}$ ou $\frac{\pi}{6}$.</p>	<p style="text-align: center;">Fais un dessin ou un diagramme</p>
<p>Définition</p> <p>Le déphasage est une modification apportée à une fonction de base. Ces translations comprennent les translations horizontales.</p>		

Développement du concept selon Frayer (Frayer Plus Concept Builder) : Frayer, Dorothy, Wayne C. Fredrick, et Herbert J. Klausmeier. *A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery. Working Paper No. 16.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 1969. Utilisation avec autorisation.

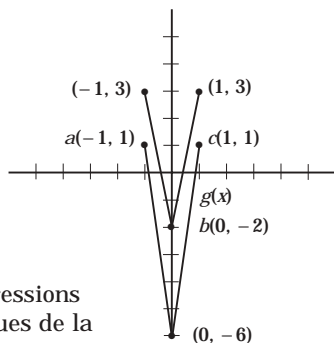
Organigramme des graphiques



Trouve $g(x) = 3f(x)$.

La valeur 3 influence la coordonnée en y . Le point original $a(-1, 1)$ devient $(-1, 3)$.

Il s'agit d'un étirement parce que $|a| > 1$.

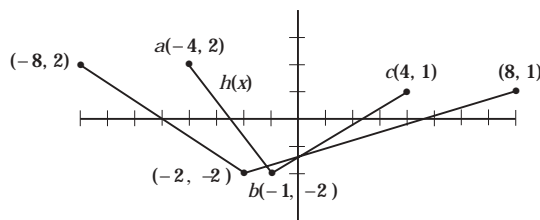


Les compressions sont résolues de la même façon.

Trouve $h(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)x$.

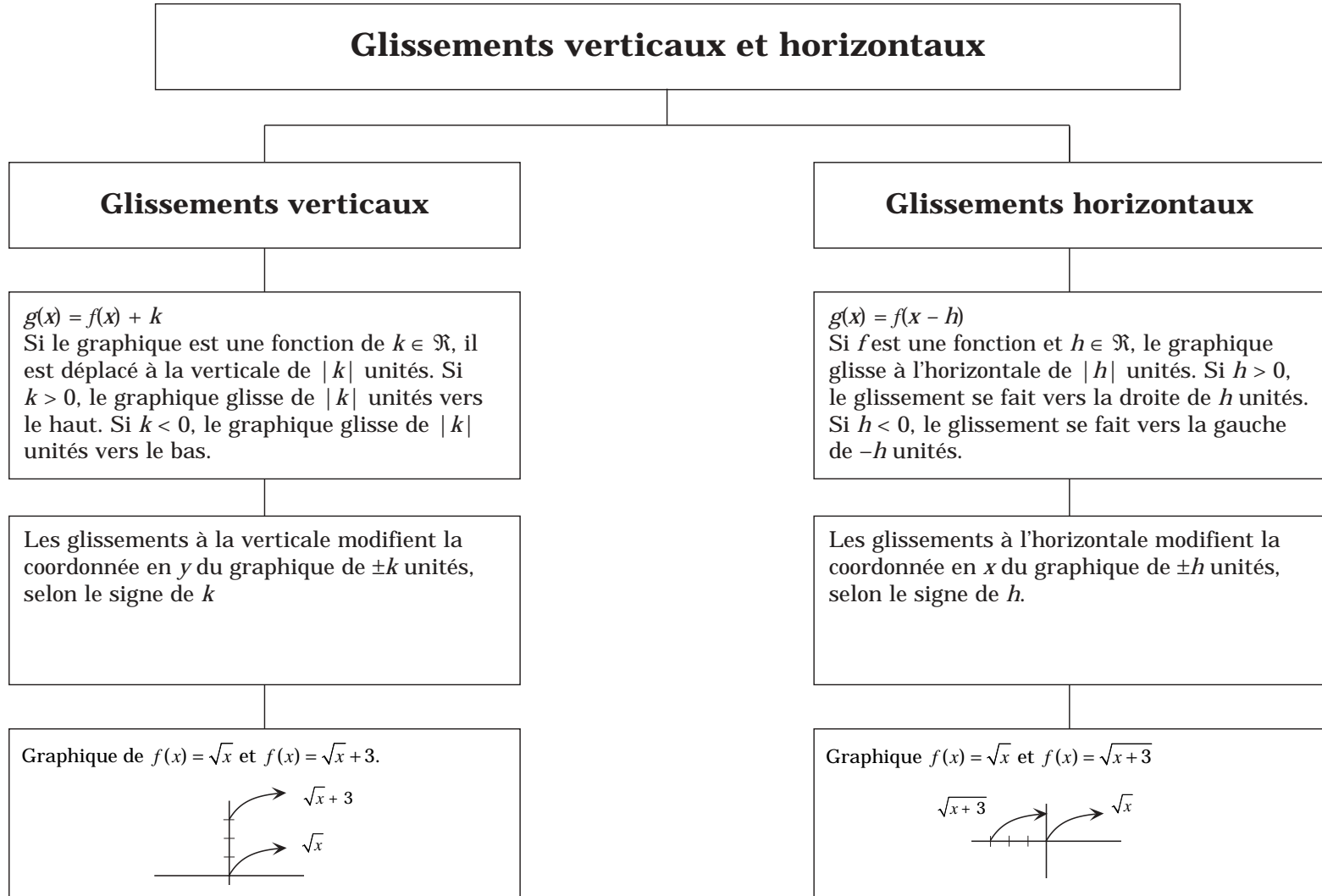
La valeur $\frac{1}{2}$ influence la coordonnée en x . Le point original $a(-4, 2)$ devient $(-8, 2)$.

Il s'agit d'un étirement parce que $|b| < 1$.

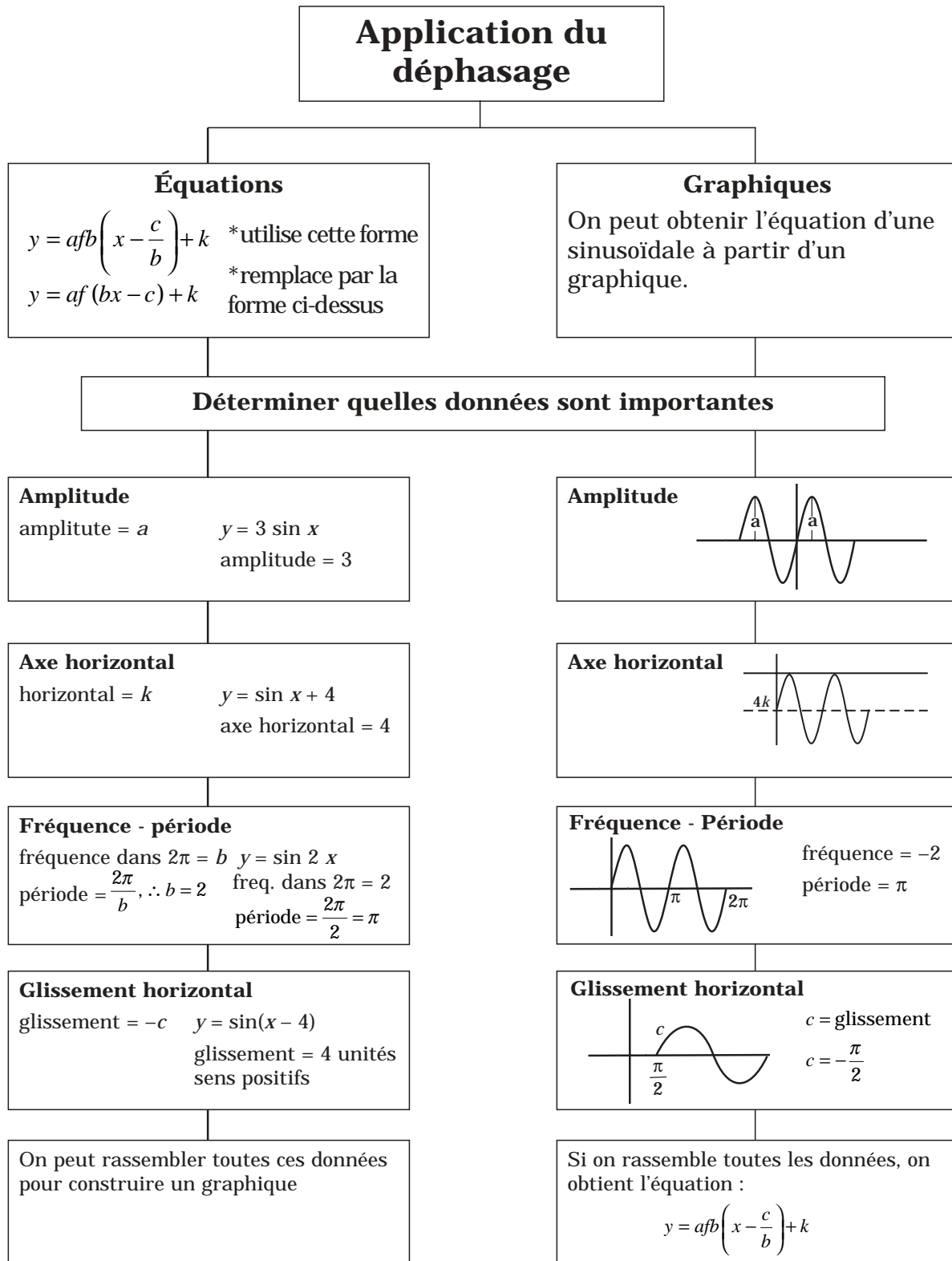


Les compressions sont résolus de la même façon.

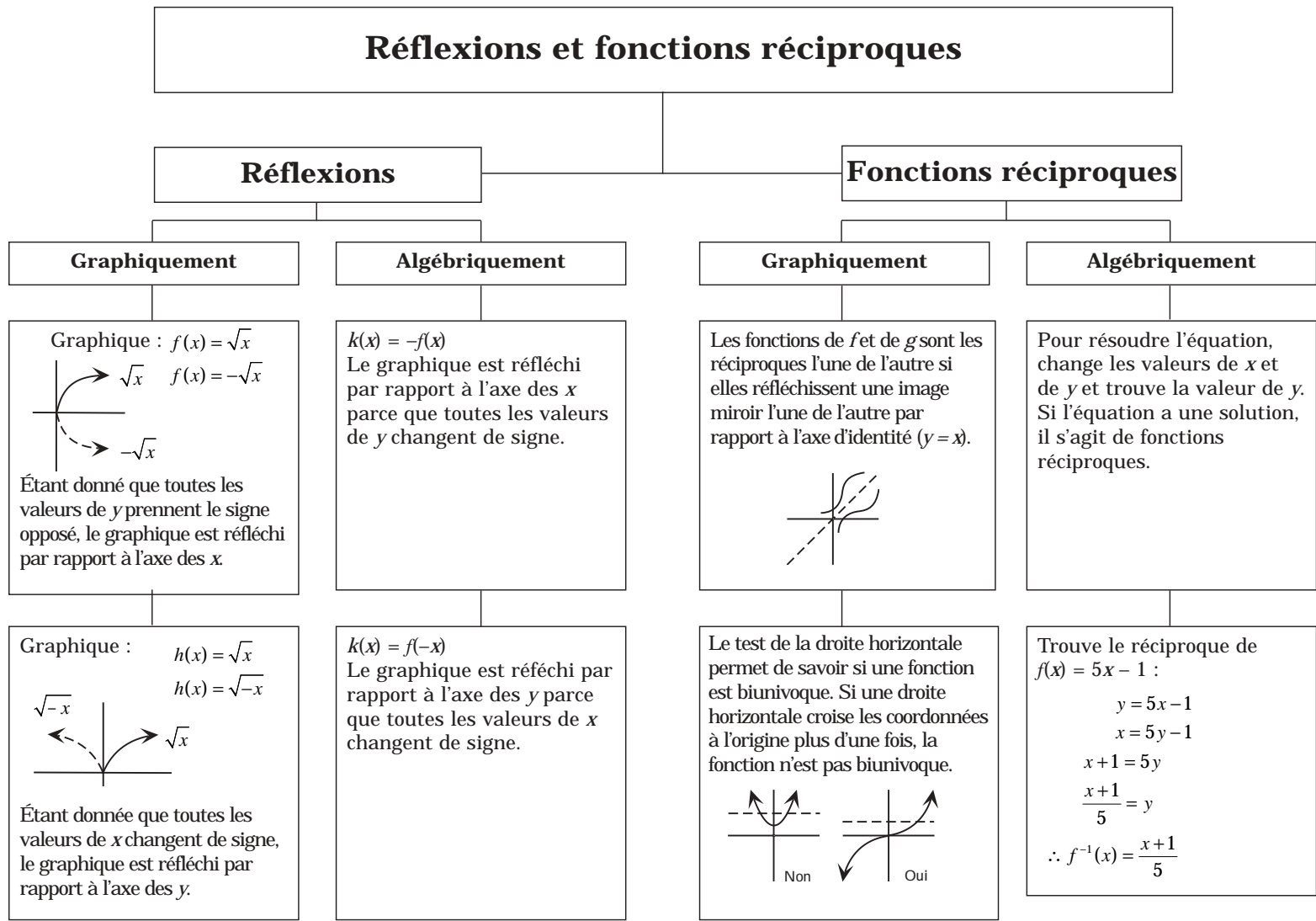
Organigramme des graphiques



Organigramme des graphiques



Organigramme des graphiques



Adaptation de la méthode en trois points

Équation générale des transformations

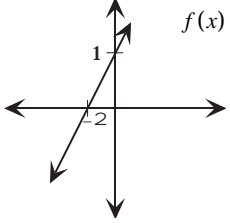
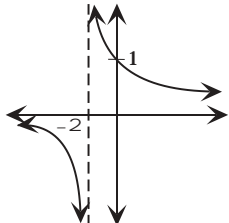
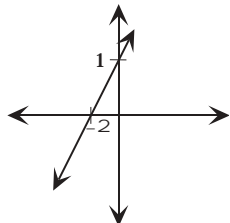
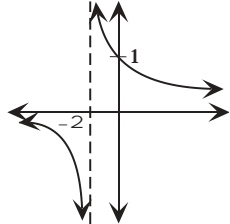
$$y = af(bx - c) + d$$

<p>Symbole a Étirement ou compression vertical</p>	<p>Explication — Il y a étirement si la valeur est supérieure à 1. — Il y a compression si la valeur est inférieure à 1.</p>
<p>Propriétés particulières a est l'amplitude. Si a est négatif, le graphique est réfléchi par rapport à l'axe des y</p>	
<p>Symbole b Étirement ou compression à l'horizontale</p>	<p>Explication — Il y a étirement si la valeur est inférieure à 1. — Il y a compression si la valeur est supérieure à 1.</p>
<p>Propriétés particulières b est le nombre de cycles de la sinusoidale dans 2π unités de x</p>	
<p>Symbole c Glissement horizontal</p>	<p>Explication — Glissement vers la droite de c / b unités si le signe est négatif — Glissement vers la gauche de c / b unités si le signe est positif.</p>
<p>Propriété particulière Aussi appelée <i>déphasage</i></p>	
<p>Symbole d Glissement vertical</p>	<p>Explication — Glissement de d unités vers le haut si le signe est positif — Glissement de d unités vers le bas si le signe est négatif.</p>
<p>Propriétés particulières On parle aussi d'axe horizontal</p>	

Adaptation de l'approche en trois points : Adapté de Simons, Sandra M. *Strategies for Reading Nonfiction*. Copyright © 1991, Spring Street Press. Utilisé avec l'autorisation de l'éditeur.

Vue d'ensemble du concept

Annexe B-12

<p>Concept Fonction inverses</p>	<p>Exemples Soit $f(x) = 2x + 1$, trace l'inverse du graphique</p> <p>$g(x) = \frac{1}{2x+1}$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = 2x + 1$</p> </div>  </div> <p style="text-align: center;">$g(x) = \frac{1}{2x+1}$</p>	
<p>Caractéristiques</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ quand elle est multipliée par la fonction originale, le produit est 1 ➤ ce sont des courbes ➤ si $f(x)$ est croissante, $\frac{1}{f(x)}$ devient plus petit ➤ si $f(x)$ est décroissante, $\frac{1}{f(x)}$ devient plus grand 	<p>À quoi ça ressemble?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ à des fonctions inverses parce que le graphique original est modifié pour créer un nouveau graphique 	<p>À quoi ça ne ressemble pas?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ ce n'est pas un étirement, une compression ni un glissement parce que la transformation consiste à étirer, à compresser ou à déplacer le graphique original
<p>Définition La fonction inverse est issue de l'inverse d'une autre fonction. Si on multiplie ces deux fonctions ensemble, le produit est 1.</p>	<p>Peux-tu l'illustrer?</p> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-bottom: 10px;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> ➤ les points les plus élevés deviennent les points les plus bas et les points les plus bas deviennent les plus élevés ➤ le point à $x = 0$ n'est pas défini <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-bottom: 10px;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> ➤ une asymptote est formée là où la fonction originale croise l'axe des x 	

Vue d'ensemble du concept (Concept Overview) : Utilisé avec l'autorisatino de Lynda Matchullis et Bette Mueller, Nellie McClung Collegiate, Pembina Valley n° 27.

Inscription au journal

Annexe B-13

Inscription au journal n°6

Trace le graphique de $f(x) = \frac{2}{5} \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. Trouve l'amplitude, l'axe horizontal, la période, le cycle et les zéros.

$$\frac{2}{5} \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- amplitude = ∞ (aucune restriction relative aux valeurs de y)
- axe horizontal = axe des x (aucun terme en k)
- cycle : $3x - \frac{\pi}{2} = 0$

$$3x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ (début)}$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{2}$$

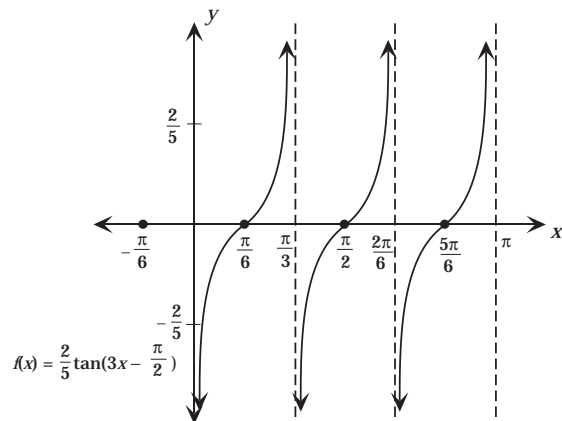
$$x = \frac{\pi}{2} \text{ (fin)}$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- période : $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$
- zéros de $\tan x = 0, \pi, 2\pi$
zéros de $\tan 3x$: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
zéros de $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$: $0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}}$$

- Mon graphique :



- J'en conclus que l'amplitude est l'infini parce qu'il n'y a aucune restriction relative aux valeurs de y .

$$\left(\frac{2}{5} \geq y \geq -\frac{2}{5}\right)$$

- L'axe horizontal est 0 (parce qu'il n'y a aucun terme en k) – c'est l'axe des x .
- Pour trouver le début du cycle, j'ai pris le terme à l'intérieur des parenthèses et je l'ai mis à zéro, puis j'ai trouvé la valeur de x . Ensuite, j'ai trouvé la fin du cycle $\left[\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi\right]$. $(bx - c)$ varie de 0 à π .
- La période d'une fonction \tan équivaut à $\frac{\pi}{b}$. J'ai simplement remplacé le terme en « b » et j'ai trouvé la période, qui est $\frac{\pi}{3}$.
- Pour trouver les zéros, j'ai pris les zéros originaux de \tan ($0, \pi, 2\pi$) et j'ai divisé par le terme en « b ».

J'ai ensuite ajouté le terme trouvé en « c » $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ à chaque zéro. J'ai obtenu mes nouveaux zéros pour la fonction $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ – pour obtenir à $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ à partir de $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

J'ai simplement isolé x en enlevant le coefficient 3 à l'intérieur de l'expression.

J'ai ainsi obtenu $\tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ –

les zéros obtenus sont: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

- J'ai ensuite tracé le graphique de la fonction $\frac{2}{5} \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ en utilisant toutes les données ci-dessus.